

3. Lee Jen Shin, Fung Yuan Cheng. Flow in locally constricted tubes at low Reynolds numbers. J. Appl. Mech., Ser E., 1970, vol. 37, No. 1.
4. Калугин В. Н., Меркулов В. И., Панчук В. И. К численному исследованию задач, связанных с течением вязкой жидкости в каналах с деформируемыми границами. Численные методы механики сплошной среды, 1971, т. 2, № 5.
5. Tom A., Apelt C. Field computation in ingeneering and physics. Van Nostred Comp. LTD, 1961.
6. Симуни Л. М. Численное решение некоторых задач движения вязкой несжимаемой жидкости. Инж. ж., 1964, т. 4, вып. 3.
7. Kirchner R. P., Chem C. F. Stability of time - dependent rotational couette flow, pt. 1. Experimental investigation. J. Fluid Mech., 1970, vol. 40, p. 39.

УДК 532.517

О ВЛИЯНИИ НЕПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СТРУИ БИКЛИ — ШЛИХТИНГА

В. Н. ВАРАПАЕВ, Ю. М. ШТЕМЛЕР, В. И. ЯГОДКИН

(Москва)

Изучается устойчивость струйного течения с профилем скорости Бикли — Шлихтинга в линейном приближении с учетом непараллельности основного потока. В предположении о малом изменении невозмущенного течения на длине волны возмущений получено модифицированное уравнение Орра — Зоммерфельда, позволяющее учитывать поперечную составляющую скорости и изменение потока по продольной координате x . Приведены зависимости $c_i = \text{const}$ и критические параметры R_* , α_* в точке потери устойчивости как с учетом, так и без учета непараллельности основного потока ($c = c_r + ic_i$ — комплексная скорость распространения возмущений, R — число Рейнольдса, α — волновое число).

Показано, что учет непараллельности примерно в три раза увеличивает величины R_* и α_* .

1. Рассматривается устойчивость струйного течения, описываемого соотношениями

$$\psi^\circ = 2dv^{1/2}x^{1/2} \text{th } \eta, \quad U^\circ = \frac{\partial \psi^\circ}{\partial y}, \quad V^\circ = -\frac{\partial \psi^\circ}{\partial x}$$

$$d = 9M / (16\rho v^{1/2}), \quad \eta = y/L.$$

Здесь ψ° — функция тока, U° и V° — продольная и поперечная составляющие скорости, M и ν — импульс, плотность и кинематический коэффициент вязкости струи, x и y — координаты вдоль и поперек струи.

Примем за характерные величины скорость на оси струи $U = 2/3 d^2 x^{-1/2}$ и линейный размер $L = 3x^2 / v^{1/2} / d$, пропорциональный ширине струи. Введем безразмерные величины: продольную компоненту скорости $w = U^\circ / U$, функцию тока $F = \psi^\circ / UL$, число Рейнольдса $R = UL/\nu$, независимые переменные $\eta = y/L$, $z = x/L$.

Предположим, что относительное изменение основного течения ψ° по x значительно меньше, чем относительное изменение возмущенного течения. Тогда решение линейризованного уравнения для функции тока ψ возмущенного движения можно представить в виде

$$(1.1) \quad \psi(\eta, z, t) = \varphi(\eta) \exp[i\alpha(z - ct)]$$

Здесь $c = c_r + ic_i$ и α — безразмерные комплексная скорость распространения возмущения и волновое число.

Амплитудная функция $\varphi(\eta)$ удовлетворяет модифицированному уравнению Орра — Зоммерфельда и однородным граничным условиям

$$(1.2) \quad \varphi^{IV} - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi - i\alpha R[(w - c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - w'' \varphi] =$$

$$= -2(F - 2\eta F')(\varphi''' - \alpha^2 \varphi') - 2(3F'' + 2\eta F')\varphi' -$$

$$- \frac{8i\alpha}{R}(2F' + 7\eta F'' - 2\eta^2 F''')\varphi - \frac{16}{R^2}(-5F + 19\eta F' + 24\eta^2 F'' + 4\eta^3 F''')\varphi'$$

$$(1.3) \quad \varphi(\pm\infty) = \varphi'(\pm\infty) = 0$$

Отметим, что при выводе (1.2) не отбрасывается ни один из членов в уравнении возмущенного движения для ψ , а лишь «замораживается» x в его коэффициентах (гипотеза о локальной автоматодельности возмущений). Можно показать, что такая процедура справедлива при $\alpha R \gg 1$.

Положив в уравнении (1.2) формально $F \equiv 0$, получим обычное уравнение Орра — Зоммерфельда. Правая часть в уравнении (1.2) учитывает влияние поперечной составляющей скорости основного потока и его изменение по x . Заметим, что хотя уравнение для возмущений (1.2) получено из уравнений Навье — Стокса, исследуемые профили скорости получены из автомодельных решений уравнений пограничного слоя.

2. Ограничимся рассмотрением симметричных решений уравнения (1.2). Тогда граничные условия для $\varphi(\eta)$ примут вид

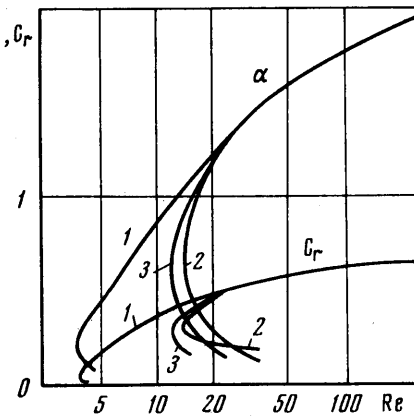
$$(2.1) \quad \varphi'(0) = \varphi'''(0) = \varphi(\infty) = \varphi'(\infty) = 0$$

Краевая задача (1.2), (2.1) при фиксированных α, R определяет собственное значение $c = c_r + ic_i$ и нейтральную кривую $c_i(\alpha, R) = 0$, по которой можно найти наименьшее число Рейнольдса R_* , определяющее начало неустойчивости.

Пусть φ_1 и φ_2 — два линейно-независимых решения уравнения (1.2), удовлетворяющих условиям (2.1) на бесконечности. Обозначим через η_c условную границу струи, вне которой при $\eta > \eta_c$ можно считать, что $w \equiv 0$, $F \equiv 1$, а уравнение (1.2) становится уравнением с постоянными коэффициентами. Тогда φ_1 и φ_2 можно представить в виде

$$\varphi_1 = \begin{cases} \exp(\beta\eta) & (\eta > \eta_c) \\ z_1(\eta) & (\eta \leq \eta_c) \end{cases}, \quad \varphi_2 = \begin{cases} \exp(\gamma\eta) & (\eta > \eta_c) \\ z_2(\eta) & (\eta \leq \eta_c) \end{cases}$$

Здесь β и γ — корни характеристического уравнения для (1.2) при $\eta > \eta_c$, имеющие отрицательные вещественные части. Функции z_1 и z_2 будем определять путем численного решения задачи Коши от $\eta = \eta_c$ до $\eta = 0$. В качестве начальных условий используются условия «склейки» при $\eta = \eta_c$ аналитического решения вне струи с численным решением при $\eta \leq \eta_c$



Фиг. 1

$$(2.2) \quad \frac{d^k}{d\eta^k} (\varphi_1) = \beta^k \exp(\beta\eta_c),$$

$$\frac{d^k}{d\eta^k} (\varphi_2) = \gamma^k \exp(\gamma\eta_c) \quad (k=0, 1, 2, 3)$$

В силу граничных условий (2.1) на оси струи для собственного значения c получим уравнение

$$(2.3) \quad D(\alpha, R, c_r, c_i) \equiv z_1'(0) z_2'''(0) - z_2'(0) z_1'''(0) = 0$$

3. Собственные значения уравнения (2.3) определялись методом, предложенным в [1]. Вместо уравнения (2.3) рассматривается эквивалентное ему уравнение

$$(3.1) \quad [\Phi(\eta, \alpha, R, c) q(\eta, \alpha, R, c) - \Psi(\eta, \alpha, R, c) \times \times (f, \eta, \alpha, R, c)]_{\eta=0} = 0$$

Функции Φ, q, Ψ, f будут решениями следующих задач Коши:

$$(3.2) \quad \Phi' + \Phi^2 + 2f'\Psi - (\alpha^2 + \lambda - f) + \lambda_1(f\Psi + \Phi) - \mu_1\Psi = 0$$

$$\Psi' = 1 - \Psi(q + \Phi)$$

$$f'' + 2f'q + f^2 - \lambda f + \mu + \lambda_1(f' + fq) - \mu_1 q = 0$$

$$q' = f + \alpha^2 - q^2$$

$$(3.3) \quad \Psi(\eta_c) = \frac{1}{\beta + \gamma}, \quad \Phi(\eta_c) = \gamma, \quad q(\eta_c) = \beta$$

$$f(\eta_c) = \beta^2 - \alpha^2, \quad f'(\eta_c) = 0$$

Функции Φ, Ψ, q, f выражаются через z_1 и z_2

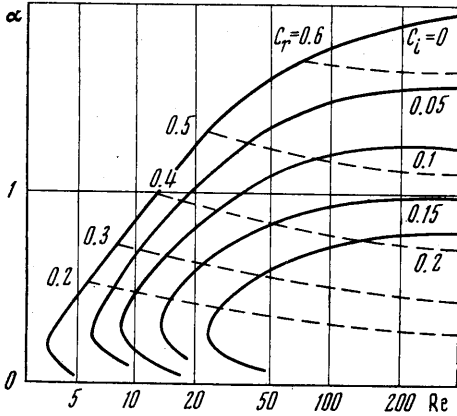
$$(3.4) \quad \Psi = \frac{p - q}{g - f}, \quad \Phi = \frac{g' - f'}{g - f} + p, \quad q = \frac{z_1'}{z_1}, \quad f = \frac{z_1''}{z_1} - \alpha^2$$

$$p = \frac{z_2'}{z_2}, \quad g = \frac{z_2''}{z_2} - \alpha^2$$

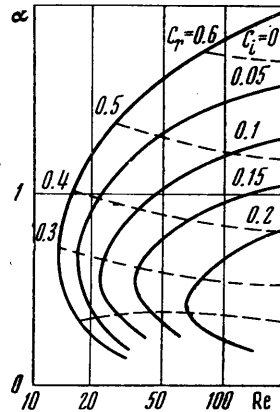
Уравнения (3.2) с граничными условиями (3.3) решались методом Рунге — Кутты, а корни (3.1) определялись модифицированным методом Ньютона.

4. Собственные значения краевой задачи (1.2), (4.1) численно исследовались для трех случаев: параллельного течения $U^\circ=U^\circ(y)$, $V^\circ=0$; квазиодномерного течения $U^\circ=U^\circ(y)$, $V^\circ=V^\circ(y)$ и непараллельного течения с замороженными по x коэффициентами $U^\circ=U^\circ(x, y)$, $V^\circ=V^\circ(x, y)$.

Нейтральные кривые $c_i(\alpha, R)=0$ для этих случаев приведены на фиг. 1. В первом случае результаты совпадают с известными результатами [2], полученными на основании уравнения Орра – Зоммерфельда. Критическое число Рейнольдса $R_*=4$. Для второго и третьего случаев соответственно получено $R_*=13.5$ и 11.5 .



Фиг. 2



Фиг. 3

Анализ результатов позволяет сделать следующие выводы:

1) учет непараллельности приводит к значительному росту числа R_* и волнового числа α_* (устойчивость струи повышается, а опасные возмущения становятся более коротковолновыми);

2) учет поперечной составляющей скорости более существен для определения критических параметров, чем учет зависимости по x . Это видно из того, что нейтральные кривые во втором и третьем случаях мало отличаются в окрестности критической точки (α_*, R_*) . На аналогичный результат в случае пограничного слоя указано в [3];

3) в случае учета непараллельности гипотеза о локальной автомодельности возмущений, справедливая при $\alpha R \gg 1$, обоснована, так как параметр $\alpha_* R_* \approx 10$.

На фиг. 2 и 3 приведены зависимости $c_i = \text{const}$ для первого и третьего случаев. Интересно сопоставить значения чисел Струхалиа $Sh_* = \alpha_* c_{i*} / 2\pi$ в точке потери устойчивости с учетом и без учета непараллельности. Оказалось, что в первом случае $Sh_* \approx 0.002$, а в третьем $Sh_* \approx 0.03$, что ближе к экспериментальным данным.

Поступила 3 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштик М. А., Сапожников В. А. Устойчивость ламинарного потока в присутствии поля массовых сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
2. Tatsumi T., Kakutani T. The stability of a two-dimensional laminar jet. J. Fluid Mech., 1958, vol. 4, pp. 261–275.
3. Cheng S. I. On the stability of laminar boundary layer flow. Quart. Appl. Math., 1953, vol. 11, No. 3, pp. 346–350.