

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ
ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ПОВЕРХНОСТЯМИ ВРАЩЕНИЯ**

Л. М. СИМУНИ

(Ленинград)

Большое число работ посвящено численному решению задачи о движении жидкости между вращающимися прямолинейными цилиндрами, причем особое внимание привлекает случай, когда внешний цилиндр покоится, а внутренний вращается [1, 2]. Численное решение некоторых задач движения между криволинейными поверхностями рассмотрено в работах [3, 4].

В данной статье рассматривается задача о движении вязкой жидкости между двумя поверхностями вращения, периодическими вдоль оси вращения (ось z). Пусть образующие внутренней и внешней поверхностей определяются уравнениями $R_1=f_1(z)$ и $R_2=f_2(z)$, причем движение вызвано вращением одной из поверхностей и периодически по переменной z (период определяется геометрией области).

Рассмотрим течение в области $R_1 \leq R \leq R_2$, $z_0 \leq z \leq z_0 + T$, где T — общий период образующих.

Система уравнений Навье — Стокса обычным образом преобразуется к системе относительно функции тока ψ , завихренности φ и безразмерной окружной скорости w . Введем преобразование координат по формулам $x=z$, $y=(r-R_1)/R_3$. Тогда исходная система преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\text{Re}}{R_3 y + R_1} \left[\frac{1}{R_3} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\varphi}{R_3 y + R_1} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{R_3' y + R_1'}{R_3} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + 2w \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{R_3' y + R_1'}{R_3} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] = \\
 & = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + A(x, y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + D(x, y) \varphi \\
 & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + A(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + E(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial y} = (R_3 y + R_1) \varphi \\
 & \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\text{Re}}{R_3 y + R_1} \frac{1}{R_3} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \\
 & = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial w}{\partial y} \\
 & A(x, y) = \frac{1 + (R_3' y + R_1')^2}{R_3^2}, \quad B(x, y) = -\frac{2(R_3' y + R_1')}{R_3}, \\
 & C(x, y) = \frac{1}{R_3(R_3 y + R_1)} - \frac{(R_3'' y + R_1'') R_3 - 2R_3'(R_3' y + R_1')}{R_3^2} \\
 & D(x, y) = -\frac{1}{(R_3 y + R_1)^2}, \quad E(x, y) = -\left[\frac{1}{R_3(R_3 y + R_1)} + \right. \\
 & \left. + \frac{(R_3'' y + R_1'') R_3 - 2R_3'(R_3' y + R_1')}{R_3^2} \right]
 \end{aligned}$$

где $\text{Re} = U_* R_* / \nu$, U_* и R_* — характерные постоянные, ν — кинематический коэффициент вязкости. Штрих означает дифференцирование по x , $R_3 = R_2 - R_1$. Задачу ре-

шаем методом конечных разностей. В качестве краевых условий на линиях z_0 и z_0+T примем условие периодичности всех определяемых величин.

Примем, кроме того, что расход жидкости через сечение, перпендикулярное оси, равен нулю. Тогда можно положить $\psi=0$ на образующих поверхностях R_1 и R_2 . Для окружной скорости на этих образующих примем условие прилипания.

Для определения значения завихренности в точках поверхности R_1 примем условие типа условия Тома [5]

$$(2) \quad \varphi_{i,0} = 2R_1^{-1}A_i, \quad \sigma\varphi_{i,1}(\Delta y)^{-2}$$

Аналогичное условие записывается для поверхности R_2 . Применялась та же процедура решения, что и в задачах с прямолинейными границами [6].

Решение конечно-разностного аналога второго уравнения системы (2) осуществлялось методом верхней релаксации, причем параметр релаксации подбирался экспериментально.

В качестве примера рассмотрим задачу о вращении поверхности, образующая которой задана уравнением $R_1 = R_*(1 + \alpha \cos \omega z)$ внутри прямолинейного цилиндра. Исследуем зависимость решения от параметра α . На фиг. 1 представлены линии тока в переменных r, z для $Re = 150$, $\omega = 2/3\pi$, $0 \leq z \leq 3$.

Отметим, что при $\alpha = 0$, т. е. в случае, когда внутренняя поверхность является цилиндром, для этого числа Рейнольдса осуществляется течение с вихрями Тейлора, причем в промежутке $0 \leq z \leq 3$ формируется четыре вихря [7].

В случае малых значений параметра α и единичной угловой скорости внутренней поверхности формируется течение с четырьмя торообразными вихрями на промежутке $0 \leq z \leq 3$. Такого рода численное решение получалось при $\alpha = 0.01, 0.02, 0.03$.

При больших значениях параметра α осуществляется течение с двумя торообразными вихрями. Такое течение получалось при $\alpha = 0.1, 0.2, 0.3$. Для некоторых промежуточных значений параметра ($\alpha = 0.04, 0.05$) не получилось стационарного течения. Такой переход от течения с четырьмя торообразными вихрями к течению с двумя торообразными вихрями наблюдался для всех чисел Рейнольдса, для которых течение Куэтта, осуществляющееся при $\alpha = 0$, неустойчиво.

Для чисел Рейнольдса, при которых течение Куэтта между цилиндрами устойчиво, для всех значений α осуществляется течение с двумя торообразными вихрями.

Другим интересным примером движения вязкой жидкости между цилиндрами сложной формы является задача о вращении внутреннего цилиндра, когда он имеет периодически расположенные кольцевые выемки.

В случае движения между прямолинейными концентрическими цилиндрами, когда преимущественно вращается внутренний цилиндр, течение Куэтта становится неустойчивым и образуется течение с вихрями Тейлора.

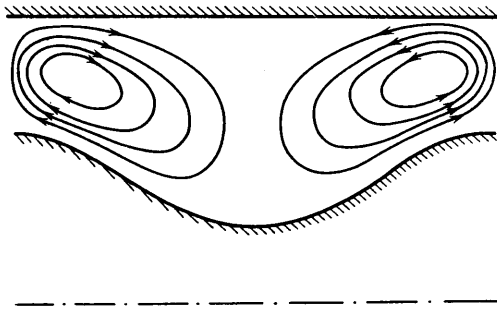
В рассматриваемом течении чисто круговые движения не являются решением уравнений Навье — Стокса. Однако удалось численно показать неединственность решения стационарной задачи при определенных значениях параметров, причем для этих значений параметров оба решения являются устойчивыми по отношению к малым возмущениям.

Рассмотрим движение, получающееся из состояния покоя при постепенном разгоде внутреннего цилиндра до единичной угловой скорости. Примем для определенности

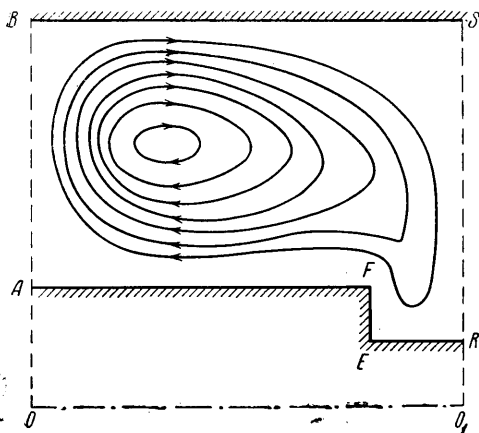
$$w = 1 - e^{-ht}, \quad \frac{OO_1}{OA} = 1.5, \quad \frac{OB}{OA} = 2, \quad \frac{EF}{OA} = 0.3, \quad \frac{ER}{OO_1} = 0.2$$

(фиг. 2). Тогда при $Re = 150$ для достаточно больших значений t получаем картину функции тока, изображенную на фиг. 2. Ввиду симметрии течения относительно линии RS на фиг. 2, а также на фиг. 3 изображена половина периодической картины движения.

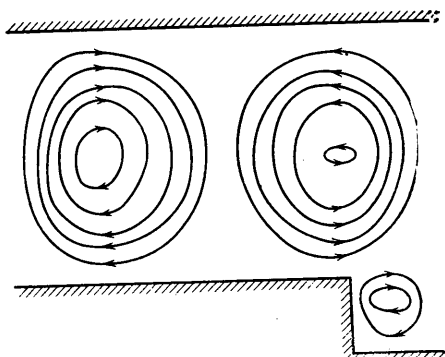
Рассмотрим теперь задачу о вращении того же внутреннего цилиндра высотой $2OO_1$, внутри цилиндра с неподвижными стенками, сечением одной из которых является отрезок AB , и соответственно на линии вместо условия периодичности примем условие прилипания.



Фиг. 1

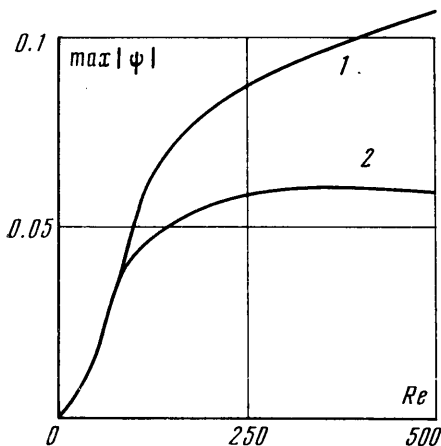


Фиг. 2



Фиг. 3

В этом случае получим некоторое поле значений функции тока и завихренности. Это поле было принято за исходное при решении периодической задачи, и в процессе установления получалось решение, представленное на фиг. 3. Таким образом, решения, представленные на фиг. 2 и 3, являются различными решениями стационарной задачи при одних и тех же значениях параметров, полученными исходя из различных начальных данных.



Фиг. 4

Устойчивость полученных течений проверялась экспериментально введением в правые части уравнения, определяющего завихренность, и уравнения, определяющего окружную скорость возмущающих функций, значения которых являются показаниями датчика случайных чисел, распределенных нормально в диапазоне $(-1, 1)$. Включение датчика случайных чисел не влияло на результаты, представленные на фиг. 2, 3. Отметим, что накладываемые возмущения были симметричны относительно линии RS .

Неединственность решения задачи наблюдалась не при всех значениях числа Рейнольдса. Для случая, когда $Re < 80$, получалось только течение типа изображенного на фиг. 2. На фиг. 4 показано изменение максимума абсолютного значения функции тока в зависимости от числа Рейнольдса в случае двух и четырех вихрей Тейлора в области решения. Неединственность наблюдалась, начиная с $Re = 80$. Представляет интерес изменение картины течения при изменении геометрических характеристик области течения.

Если уменьшать высоту выемки для течений, изображенных на фиг. 2, 3 они приближаются к одному и тому же течению Тейлора с двумя вихрями на промежутке RS . При этом в течении, которое изображено на фиг. 2, у линии AB развивается вихрь, аналогичный изображенному на фиг. 3. Проверка точности численного счета осуществлялась дроблением шагов сетки. Результаты, приведенные в работе, получены при $\Delta x = BS/15$, $\Delta y = AB/20$. Контрольные расчеты проводились при $\Delta x = BS/30$, $\Delta y = AB/20$ и $\Delta x = BS/30$, $\Delta y = AB/40$. Сравнение результатов показывает, что при выбранных значениях параметров исходная сетка дает хорошую точность. Аналогично осуществлялось дробление шага для задачи о вращении волнистого цилиндра.

Поступила 12 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А. Л., Произволова Е. К. Численное изучение течения жидкости между вращающимися цилиндрами. Численные методы в газовой динамике, МГУ, 1963.
2. Meyer K. A. Time - dependent numerical study of Taylor vortex flow. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 9.

3. Lee Jen Shin, Fung Yuan Cheng. Flow in locally constricted tubes at low Reynolds numbers. J. Appl. Mech., Ser E., 1970, vol. 37, No. 1.
4. Калугин В. Н., Меркулов В. И., Панчук В. И. К численному исследованию задач, связанных с течением вязкой жидкости в каналах с деформируемыми границами. Численные методы механики сплошной среды, 1971, т. 2, № 5.
5. Tom A., Apelt C. Field computation in ingeneering and physics. Van Nostred Comp. LTD, 1961.
6. Симуни Л. М. Численное решение некоторых задач движения вязкой несжимаемой жидкости. Инж. ж., 1964, т. 4, вып. 3.
7. Kirchner R. P., Chem C. F. Stability of time - dependent rotational couette flow, pt. 1. Experimental investigation. J. Fluid Mech., 1970, vol. 40, p. 39.

УДК 532.517

О ВЛИЯНИИ НЕПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СТРУИ БИКЛИ — ШЛИХТИНГА

В. Н. ВАРАПАЕВ, Ю. М. ШТЕМЛЕР, В. И. ЯГОДКИН

(Москва)

Изучается устойчивость струйного течения с профилем скорости Бикли — Шлихтинга в линейном приближении с учетом непараллельности основного потока. В предположении о малом изменении невозмущенного течения на длине волны возмущений получено модифицированное уравнение Орра — Зоммерфельда, позволяющее учитывать поперечную составляющую скорости и изменение потока по продольной координате x . Приведены зависимости $c_i = \text{const}$ и критические параметры R_* , α_* в точке потери устойчивости как с учетом, так и без учета непараллельности основного потока ($c = c_r + ic_i$ — комплексная скорость распространения возмущений, R — число Рейнольдса, α — волновое число).

Показано, что учет непараллельности примерно в три раза увеличивает величины R_* и α_* .

1. Рассматривается устойчивость струйного течения, описываемого соотношениями

$$\psi^\circ = 2dv^{1/2}x^{1/2} \text{th } \eta, \quad U^\circ = \frac{\partial \psi^\circ}{\partial y}, \quad V^\circ = -\frac{\partial \psi^\circ}{\partial x}$$

$$d = 9M / (16\rho v^{1/2}), \quad \eta = y/L.$$

Здесь ψ° — функция тока, U° и V° — продольная и поперечная составляющие скорости, M и ν — импульс, плотность и кинематический коэффициент вязкости струи, x и y — координаты вдоль и поперек струи.

Примем за характерные величины скорость на оси струи $U = 2/3 d^2 x^{-1/2}$ и линейный размер $L = 3x^{2/3} \nu^{1/2} / d$, пропорциональный ширине струи. Введем безразмерные величины: продольную компоненту скорости $w = U^\circ / U$, функцию тока $F = \psi^\circ / UL$, число Рейнольдса $R = UL/\nu$, независимые переменные $\eta = y/L$, $z = x/L$.

Предположим, что относительное изменение основного течения ψ° по x значительно меньше, чем относительное изменение возмущенного течения. Тогда решение линейризованного уравнения для функции тока ψ возмущенного движения можно представить в виде

$$(1.1) \quad \psi(\eta, z, t) = \varphi(\eta) \exp[i\alpha(z - ct)]$$

Здесь $c = c_r + ic_i$ и α — безразмерные комплексная скорость распространения возмущения и волновое число.

Амплитудная функция $\varphi(\eta)$ удовлетворяет модифицированному уравнению Орра — Зоммерфельда и однородным граничным условиям

$$(1.2) \quad \varphi^{IV} - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi - i\alpha R[(w - c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - w'' \varphi] =$$

$$= -2(F - 2\eta F')(\varphi''' - \alpha^2 \varphi') - 2(3F'' + 2\eta F')\varphi' -$$

$$- \frac{8i\alpha}{R}(2F' + 7\eta F'' - 2\eta^2 F''')\varphi - \frac{16}{R^2}(-5F + 19\eta F' + 24\eta^2 F'' + 4\eta^3 F''')\varphi'$$

$$(1.3) \quad \varphi(\pm\infty) = \varphi'(\pm\infty) = 0$$

Отметим, что при выводе (1.2) не отбрасывается ни один из членов в уравнении возмущенного движения для ψ , а лишь «замораживается» x в его коэффициентах (гипотеза о локальной автоматодельности возмущений). Можно показать, что такая процедура справедлива при $\alpha R \gg 1$.