УДК 536.25+541.18:538

КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ФЕРРОЖИДКОСТИ

М. И. ШЛИОМИС

(*Пермь*)

Выясняются условия, при которых наступает неустойчивость равновесия неравномерно нагретой феррожидкости в поле тяжести и неоднородном магнитном поле. Последнее является, во-первых, причиной архимедовых подъемных сил, во-вторых, градиенты магнитной напряженности приводят к появлению внутренних источников тепла (магнетокалорический эффект). Этот эффект, как правило, чрезвычайно слаб и корректный учет его требует одновременного учета сжимаемости жидкости в уравнении теплопроводности. Показано, что как раз пренебрежением сжимаемостью объясняется ошибочный, противоречащий законам термодинамики вывод о конвективной неустойчивости изотермической феррожидкости, сделанный в серии работ Б. М. Берковского.

Сформулирован безразмерный критерий, характеризующий устойчивость равновесия феррожидкости. В предельных случаях больших или малых полостей этот критерий переходит в феррогидродинамические аналоги обычных критериев Шварцшильда или Рэлея.

1. Термином «феррожидкость» принято называть коллоидную суспензию ферромагнетика в какой-либо обычной жидкости (например, дисперсию магнетита в керосине [1, 2], кобальта [3] или железа [4] в толуоле). При размерах магнитных частиц порядка 10^{-6} *см* их интенсивное броуновское движение обеспечивает высокую степень однородности коллоида: в поле тяжести или в неоднородном магнитном поле сколько-нибудь заметные градиенты концентрации частиц либо не возникают совсем, либо устанавливаются за очень большое время.

«Феррогидродинамика» [5] трактует магнитную суспензию как однородный жидкий магнетик, намагниченность которого $\mathbf{M}$ (магнитный момент единицы объема) определяется мгновенными локальными значениями температуры и напряженности поля

$$\mathbf{M}=M(T,H)\mathbf{H}/H \tag{1.1}$$

Кроме уравнения «магнитного состояния» (1.1), $\mathbf{M}$ и $\mathbf{H}$ связаны уравнениями Максвелла (феррожидкости, как правило, не электропроводны)

$$\operatorname{div}(\mathbf{H}+4\pi\mathbf{M})=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}=0 \tag{1.2}$$

В неоднородном поле на единицу объема магнетика действует сила [6] $(\mathbf{M}\nabla)\mathbf{H}$, которую с помощью (1.1) и (1.2) можно представить в виде $M\nabla H$. Включая магнитную силу и силу тяжести $\rho\mathbf{g}$ в уравнение Навье — Стокса, получаем для несжимаемой жидкости

$$\rho[\partial\mathbf{v}/\partial t+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}]=-\nabla p+\eta\Delta\mathbf{v}+\rho\mathbf{g}+M\nabla H,\quad \operatorname{div}\mathbf{v}=0 \tag{1.3}$$

К уравнениям (1.1)—(1.3) нужно присоединить еще уравнение переноса тепла

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla s\right)=\varkappa\Delta T+\frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 \tag{1.4}$$

где s — энтропия единицы массы, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности.

2. Равновесие неравномерно нагретой феррожидкости в общем случае невозможно. На это имеются две причины: наряду с обычным, термогра-

витационным механизмом конвекции, связанным с тепловым расширением жидкости, есть еще и специфический термомагнитный механизм, в основе которого лежит температурная зависимость намагниченности. При прочих равных условиях сильнее намагничиваются более холодные участки жидкости, а потому на них действует и большая магнитная сила в направлении ∇H. Величины $\partial M/\partial T$ и ∇H в магнитном механизме конвекции играют ту же роль, что и $\partial\rho/\partial T$ и $\mathbf{g}$ в гравитационном.

Уравнение феррогидростатики

$$\nabla p=\rho\mathbf{g}+M\nabla H \tag{2.1}$$

требует, чтобы магнитная сила и сила тяжести были уравновешены в каждой точке градиентом давления. Применяя операцию rot к уравнению (2.1), получим необходимое условие равновесия в виде

$$\nabla T\times\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\mathbf{g}+\frac{\partial M}{\partial T}\nabla H\right)=0$$

Итак, механическое равновесие магнитной жидкости возможно либо при $T=\text{const}$, либо при избранном значении ∇H, обращающем в нуль выражение в скобках (в этом случае ∇T может быть любым), либо при градиентах температуры и поля, параллельных вектору $\mathbf{g}$. В последнем случае, однако, возникает вопрос об устойчивости неподвижного режима.

Для исследования конвективной устойчивости преобразуем общее уравнение переноса тепла (1.4). Выберем в качестве независимых термодинамических координат p, T и H, так что, например

$$\nabla s=\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{p,H}\nabla T+\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_{T,H}\nabla p+\left(\frac{\partial s}{\partial H}\right)_{p,T}\nabla H \tag{2.2}$$

Вычисление производных, входящих в (2.2), осуществляется с помощью термодинамического тождества (2.3)

$$d\Phi=-s\,dT+\rho^{-1}dp-(M/\rho)\,dH \tag{2.3}$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{p,H}=\frac{c_{p,H}}{T},\qquad\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_{T,H}=\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{p,H} \tag{2.4}$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{p,T}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{p,H}-\frac{M}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{p,H}$$

(Φ — термодинамический потенциал, отнесенный к единице массы, $c_{p,H}\equiv c$ — теплоемкость при постоянном поле и давлении). Подставляя в (2.2) найденные значения производных от энтропии (2.4) и ∇p из уравнения (2.1), имеем

$$\rho\nabla s=\frac{\rho c}{T}\nabla T+\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{p,H}\mathbf{g}+\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{p,H}\nabla H$$

Аналогично преобразуется производная $\partial s/\partial t$, после чего уравнение теплопроводности (1.4) в не изменяющемся со временем магнитном поле принимает вид

$$\rho c\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla T\right)+\mathbf{v}T\left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p\mathbf{g}+\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H\nabla H\right]= \tag{2.5}$$

$$=\varkappa\Delta T+\frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2$$

Здесь члены в квадратных скобках описывают не связанное с процессами диссипации (адиабатическое) изменение температуры из-за сжимаемости [7] и магнетокалорического эффекта [8].

Намагниченность и (у большинства веществ) плотность уменьшаются при нагревании

$$\beta=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p>0,\qquad \gamma=-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H>0$$

так что элемент жидкости при адиабатическом смещении верх ($\delta z>0$) из положения равновесия охлаждается, попадая в область с меньшим давлением, и нагревается (охлаждается), если напряженность магнитного поля растет (убывает) с высотой. Суммарное изменение температуры равно

$$\delta T=-\frac{T}{\rho c}(\beta\rho g-\gamma MG)\delta z\qquad \left(G\equiv\frac{dH}{dz}\right)\tag{2.6}$$

3. Рассмотрим малые нестационарные возмущения неподвижного режима (2.1), характеризуемые скоростью $\mathbf{v}$, температурой θ и давлением q. Линеаризованные по этим величинам уравнения движения (1.3) и теплопроводности (2.5) имеют вид

$$\begin{gathered}\rho\partial\mathbf{v}/\partial t=\eta\Delta\mathbf{v}+(\beta\rho g-\gamma MG)\theta\mathbf{k}-\nabla q,\quad \operatorname{div}\mathbf{v}=0\\ \rho c\partial\theta/\partial t=\varkappa\Delta\theta+[\rho cA-T_0(\beta\rho g-\gamma MG)](\mathbf{vk})\quad (A\equiv-dT/dz)\end{gathered}\tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{k}$ – единичный вектор вдоль оси z; плотность, намагниченность и их температурные коэффициенты β и γ берутся при некоторых постоянных средних значениях абсолютной температуры $T_0=\langle T(z)\rangle$ и поля $H_0=\langle H(z)\rangle$.

Перейдем к безразмерной форме уравнений (3.1), приняв за единицу длины характерный размер полости l, а единицы времени, скорости, температуры и давления определим как

$$[t]=l^2/\nu,\quad [v]=\chi/l,\quad [\theta]=l\{A-T_0/\rho c(\beta\rho g-\gamma MG)\}$$
$$[q]=\rho\nu\chi/l^2\quad (\nu=\eta/\rho,\quad \chi=\varkappa/\rho c)$$

Получающиеся при таком выборе единиц безразмерные уравнения для возмущений имеют тот же вид, что и в задачах обычной конвекции [9], но с другой безразмерной комбинацией параметров в качестве числа Рэлея R

$$\begin{gathered}\partial\mathbf{v}/\partial t=\Delta\mathbf{v}+R\theta\mathbf{k}-\nabla q,\quad \operatorname{div}\mathbf{v}=0\\ P\partial\theta/\partial t=\Delta\theta+(\mathbf{vk}),\quad P=\nu/\chi\end{gathered}\tag{3.2}$$

$$R=\frac{(\beta\rho g-\gamma MG)l^4}{\rho\nu\chi}\left[A-\frac{T_0}{\rho c}(\beta\rho g-\gamma MG)\right]\tag{3.3}$$

На основании известных результатов теории конвекции можно утверждать, следовательно, что механическое равновесие феррожидкости устойчиво, пока R остается меньше некоторого критического значения R_0. При $R>R_0$ неподвижный режим сменяется стационарным конвективным движением, причем величина R_0 определяется только геометрией полости и граничными условиями на ее поверхности. Например, для плоского слоя жидкости, на границах которого возмущения скорости и температуры исчезают ($\mathbf{v}=\theta=0$), $R_0=1708$ при горизонтальном и 1558 при вертикальном расположении слоя.

4. Рассмотрим различные предельные случаи формулы (3.3). Прежде всего заметим, что в отсутствие внешних источников тепла равновесие феррожидкости всегда устойчиво. В самом деле, как видно из (3.3), изотермическое равновесие ($A=0$) характеризуется отрицательными «числами Рэлея»

$$R=-\frac{T_0l^4}{\eta\varkappa}(\beta\rho g-\gamma MG)^2 \tag{4.1}$$

так что условие устойчивости $R<R_0$ заведомо выполняется.

Парадоксальный вывод о возможности тепловой конвекции и даже «термоконвективного взрыва» в изотермической феррожидкости, сделанный Б. М. Берковским и В. Г. Баштовым [10–13] [1], основан на некорректном пренебрежении сжимаемостью в уравнении теплопроводности, хотя другой слабый эффект – магнетокалорический – при этом учитывался. Именно он должен был стать, по мнению авторов, движущей силой столь необычной конвекции. Поскольку в указанных работах не был учтен член с ∇p в (2.2), то в выражении (2.6) и в квадратных скобках формулы (3.3), определяющей эффективное число Рэлея, не оказалось члена с $\beta\rho g$. В итоге для изотермической жидкости вместо правильной формулы (4.1) получилось

$$R=\frac{T_0l^4}{\eta\varkappa}(\beta\rho g-\gamma MG)\gamma MG$$

Отсюда делался вывод о возможности конвективной ситуации ($R>R_0$) при условии

$$\beta\rho g>\gamma MG \tag{4.2}$$

Но пренебрегать в (3.3) указанным членом можно лишь при выполнении условия $\beta\rho g\ll\gamma MG$, не совместимого с (4.2).

Б. М. Берковский и др. [11] дают следующее качественное объяснение открытого ими механизма неустойчивости: «Если магнитное поле имеет постоянный градиент, направленный вертикально вверх, то при смещении элемента объема жидкости из положения равновесия вверх температура его повышается (из-за магнетокалорического эффекта – М. Ш.), соответственно уменьшается его плотность ρ и при наличии гравитационного поля на него начинает действовать архимедова сила, направленная от положения равновесия. Данная неустойчивость носит пороговый характер...».

Чтобы обнаружить ошибку в этом рассуждении, нужно учесть изменение температуры, обусловленное сжимаемостью. Тогда при выполнении условия (4.2) элемент объема жидкости, сместившийся из положения равновесия вверх, будет охлаждаться, как видно из (2.6), а не нагреваться, как сказано в приведенной выше цитате.

В неизотермической феррожидкости кризис равновесия наступает при $R=R_0$, т. е. когда

$$A=\frac{\eta\chi R_0}{l^4D}+\frac{T_0D}{\rho c}\qquad (D\equiv\beta\rho g-\gamma MG) \tag{4.3}$$

В небольших полостях главными факторами устойчивости равновесия являются вязкость и теплопроводность: при

$$l^4\ll\varkappa\eta R_0/T_0D^2 \tag{4.4}$$

второй (адиабатический) член в (4.3) может быть опущен. Эффективное число Рэлея (3.3) принимает в этом случае более простой вид [14]

$$R=ADl^4/\eta\chi$$

В другом предельном случае, когда выполняется неравенство, обратное (4.4), можно пренебречь стабилизирующим влиянием диссипации. Пороговое значение температурного градиента определяется в этом слу-

[1] *Берковский Б. М.* Исследование термоконвективных явлений в жидкостях. Докт. дисс., ИТМО АН БССР, Минск, 1971.

чае эффективным критерием Шварцшильда

$$A = T_0 D / \rho c$$

Здесь уместно отметить, что формула, получаемая из (4.3) при $M=0$ (немагнитная жидкость), была найдена более сорока лет назад [15]. Любопытно, что для получения этой «интерполяционной» формулы, переходящей в предельных случаях в критерии Рэлея или Шварцшильда, достаточно в обычные уравнения конвекции (приближение Буссинеска) внести лишь одно изменение: учесть сжимаемость в уравнении теплопроводности.

Сравнение эффективности магнитного и гравитационного механизмов конвекции показывает [16], что для типичных феррожидкостей магнитный механизм становится преобладающим ($\gamma MG \gg \beta\rho g$) при $G \gtrsim 100$ *э/см*. В этом случае выражение (4.3) принимает вид [17]

$$A = \frac{\eta\chi R_0}{\gamma M l^4(-G)} + \frac{T_0\gamma M(-G)}{\rho c}$$

а неравенство (4.4) сводится к $l^4 \ll 10^7 G^{-2}$.

6. Выше предполагалось, что градиенты магнитной напряженности и температуры могут быть заданы независимо. Такое предположение можно считать оправданным, если градиент поля G_i, индуцированный температурным градиентом A, мал в смысле

$$\gamma M G_i \ll \beta\rho g \tag{5.1}$$

т. е. когда можно пренебречь влиянием магнитных сил, связанных с G_i, на конвективную неустойчивость.

Оценим величину G_i. Пусть жидкость находится в однородном внешнем поле $\mathbf{H} = (0, 0, H_l)$ при температуре $T(z)$. Зависимость $M(T)$ приведет к тому, что внутри феррожидкости поле H_i окажется неоднородным. Из первого уравнения (1.2) следует:

$$-\frac{dH_i}{dz}\left[1+4\pi\left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T\right] = 4\pi\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H \frac{dT}{dz}$$

и поскольку $(\partial M/\partial H)_T \geqslant 0$, то

$$|G_i| = -dH_i/dz \leqslant 4\pi\gamma MA \tag{5.2}$$

Отсюда ясно, что на пороге конвекции градиент поля G_i может достигать заметной величины только в очень тонких слоях жидкости [18], где критический градиент температуры A велик. Условие (5.1), позволяющее не учитывать индуцированный градиент поля, с помощью (5.2) и (4.3) сводится к неравенству

$$l^4 \gg 4\pi\eta\chi R_0 (\gamma M/\beta\rho g)^2$$

При типичных значениях параметров феррожидкости и $R_0 \sim 10^3$ это неравенство выполняется вплоть до $l \approx 1$ *мм* [18].

Автор благодарен участникам семинаров, руководимых Г. А. Любимовым и Г. И. Петровым, за обсуждение рассмотренных здесь вопросов.

Примечание при корректуре. Эта работа была доложена автором на указанных выше семинарах в декабре 1972 г. О результатах ее тогда же стало известно Б. М Берковскому и В. Г. Баштовому. В феврале 1973 г. они направили в печать статью «Термомеханика ферромагнитных жидкостей», в которой без ссылки на автора приводятся его результаты (в частности, формула (3.3)), а об ошибочности собственных работ [10–13] вообще не упоминается. Статья опубликована в журнале «Магнитная гидродинамика», 1973, № 3.

Поступила 3 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kaiser R., Mickolczy G.* Magnetic properties of stable dispersions of subdomain magnetite particles. J. Appl. Phys., 1970, vol. 41, No. 3.
2. *Бибик Е. Е., Матыгуллин Б. Я., Райхер Ю. Л., Шлиомис М. И.* Статические магнитные свойства коллоидов магнетита. Магнитная гидродинамика, 1973, № 1.
3. *McTague J. P.* Magnetoviscosity of magnetic colloids. J. Chem. Phys., 1969, vol. 51, No. 1.
4. *Мозговой Е. Н., Блум Э. Я.* Магнитные свойства мелкодисперсных ферросуспензий. Магнитная гидродинамика, 1971, № 4.
5. *Neuringer J. L., Rosensweig R. E.* Ferrohydrodynamics. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 12.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред, гл. 4. М., Гостехиздат, 1957.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред, гл. 1. М., Гостехиздат. 1953.
8. *Вонсовский С. В.* Магнетизм, гл. 16, 18. М., «Наука», 1971.
9. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
10. *Берковский Б. М., Баштовой В. Г.* Гравитационная конвекция в ферромагнитной жидкости. Магнитная гидродинамика, 1971, № 2.
11. *Баштовой В. Г., Берковский Б. М., Синицын А. К.* Термоконвективный взрыв в ферромагнитной жидкости. Магнитная гидродинамика, 1972, № 1.
12. *Luikov A. V., Berkowsky B. M., Bashtovoi V. G.* Convection in ferromagnetic fluid due to magnetocaloric effect. Progress in Heat and Mass Transfer, 1972, vol. 5.
13. *Берковский Б. М., Баштовой В. Г.* Процессы конвективного теплообмена в ферромагнитных жидкостях. Материалы IV Всесоюзного совещания по тепло- и массообмену. Минск, 1972.
14. *Lalas D. P., Carmi S.* Thermoconvective stability of ferrofluids. Phys. Fluids, 1971. vol. 14, No. 2.
15. *Jeffreys H.* The instability of a compressible fluid heated below. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1930, vol. 26, p. 170.
16. *Curtis R. A.* Flows and wave propagation in ferrofluids. Phys. Fluids, 1971, vol. 14, No. 10.
17. *Зайцев В. М., Шлиомис М. И.* К гидродинамике ферромагнитной жидкости. ПМТФ, 1968, № 1.
18. *Finlayson B. A.* Convective instability of ferromagnetic fluids. J. Fluid Mech., 1970, vol. 40, pt 4.