УДК 532.5:532.135

ВЛИЯНИЕ ВНУТРЕННЕЙ ВЯЗКОСТИ МАКРОМОЛЕКУЛ НА ВЯЗКОУПРУГОЕ ПОВЕДЕНИЕ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ

В. Н. ПОКРОВСКИЙ, В.И. ЧУПРИНКА

(*Москва*)

При описании движения растворов полимеров макромолекулы могут быть [1] схематизированы идеально жесткими или идеально гибкими частицами. Рассмотрение течения суспензии таких частиц, выполненное для жестких эллипсоидов вращения [2] и для идеально гибких протекаемых ожерелий [3], приводит к уравнениям движения, которые описывают основные черты вязкоупругого поведения слабых растворов жестких и гибких макромолекул.

Можно предположить, что некоторые классы макромолекул обладают промежуточными свойствами [1] и их движение в потоке следует схематизировать частично-жесткими частицами, т. е. частицами с внутренней вязкостью. Для оценки влияния внутренней вязкости на свойства растворов полимеров достаточно ограничиться рассмотрением поведения суспензии частично-жестких гантелей. В данном сообщении для разбавленной суспензии частично-жестких гантелей вычислены выражения для тензора напряжений, который определяется через моменты функции распределения, и релаксационные уравнения для моментов. Вместе с уравнениями непрерывности и движения полученные соотношения составляют систему уравнений движения суспензии, которая оказывается в общем случае незамкнутой. Полученные результаты в предельных случаях, когда внутренняя вязкость равна нулю или бесконечности, совпадают с известными [4] результатами. Некоторые типы течения суспензии гантелей с малой внутренней вязкостью изучались в работе [5].

1. Движение гантели, как системы двух связанных броуновских частиц — бусинок в системе координат, связанной с центром масс, описывается функцией распределения вероятности W, зависящей от времени t и разности координат бусинок $S_j=r_j''-r_j'$.

Задача о поведении гантели в потоке формулируется с помощью уравнения Смолуховского [6], которое может быть записано в форме уравнения непрерывности

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial (u_j W)}{\partial S_j}=0 \tag{1.1}$$

Здесь u_j — относительная скорость движения бусинок, которая определяется из рассмотрения баланса действующих на каждую бусинку сил (без учета сил инерции).

На каждую бусинку действуют упругая сила

$$-2T\varkappa S_i \tag{1.2}$$

сила гидродинамического сопротивления

$$\zeta(\nu_{ik}S_k-u_i) \tag{1.3}$$

сила внутренней вязкости

$$-\chi(u_j e_j e_i) \tag{1.4}$$

и эффективная сила броуновского движения

$$-T\nabla_i \ln W \tag{1.5}$$

В выражениях (1.2) — (1.5) T — температура в энергетических единицах, $\varkappa$ — коэффициент упругости гантели, $\nu_{ik}=\partial v_i / \partial x_k$ — тензор градиентов скорости, ζ — коэффициент гидродинамического увеличения, χ — коэффициент внутренней вязкости, $e_k=S_k / S$ — косинус угла между осью гантели и осью k лабораторной системы координат.

Рассматривая сумму сил, действующих на каждую бусинку (без сил инерции), находим относительную скорость движения бусинок

$$
u_i=\nu_{ik}S_k-\frac{2\chi}{\zeta+2\chi}\nu_{ks}e_se_kS_i-\frac{4T\varkappa}{\zeta+2\chi}S_i-
-\frac{2T}{\zeta+2\chi}e_je_i\nabla_j\ln W+\frac{2T}{\zeta}e_j[\mathbf{e}\nabla\ln W]_{ij}
\tag{1.6}
$$

Соотношения (1.1) — (1.6) определяют диффузионное уравнение

$$
\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{2T}{\zeta}\left(\frac{2S_j}{S^2}\frac{\partial W}{\partial S_j}+e_se_j\frac{\partial^2 W}{\partial S_j\partial S_s}-\frac{\partial^2 W}{\partial S_j^2}\right)-
-\frac{2T}{\zeta+2\chi}\left(\frac{2S_j}{S^2}\frac{\partial W}{\partial S_j}+e_se_j\frac{\partial^2 W}{\partial S_j\partial S_s}\right)-\frac{4T\varkappa}{\zeta+2\lambda}\left(3W+S_j\frac{\partial W}{\partial S_j}\right)+
+\nu_{js}S_s\frac{\partial W}{\partial S_j}-\frac{6\chi}{\zeta+2\chi}e_se_l\nu_{sl}W-\frac{2\chi}{\zeta+2\chi}e_se_l\nu_{sl}S_j\frac{\partial W}{\partial S_j}=0
\tag{1.7}
$$

Отметим, что уравнение (1.7) при $\chi\to\infty$ совпадает с уравнением диффузии для палочки — с частным случаем уравнения диффузии эллипсоида вращения ([2], формула (6.5)) при соответствующем выборе коэффициента вращательной диффузии.

В случае если градиенты скорости отсутствуют, нормированное на единицу решение уравнения (1.7) имеет вид

$$
W_0=(\varkappa/\pi)^{3/2}e^{-\varkappa S^2}
\tag{1.8}
$$

При малых градиентах скорости функция распределения может быть найдена в виде разложения по инвариантным комбинациям вектора S_i и симметризованного и антисимметризованного тензоров градиентов скорости:

$$
\gamma_{ik}={}^1/_2(\nu_{ik}+\nu_{ki}),\quad \omega_{ik}={}^1/_2(\nu_{ik}-\nu_{ki}).
$$

В стационарном случае с точностью до членов второго порядка по градиентам скорости

$$
W=W_0\left(1+\frac{\zeta}{4T}\gamma_{ik}S_iS_k+\frac{1}{32}\frac{\zeta^2}{T^2}\gamma_{ik}\gamma_{sj}S_iS_kS_jS_s-
-\left(\frac{\zeta}{8\varkappa T}\right)^2\gamma_{ik}\gamma_{ik}-L\gamma_{si}\omega_{sk}S_iS_k\right)
\tag{1.9}
$$

Коэффициент при последнем члене зависит от S^2 и коэффициента внутренней вязкости. При больших значениях коэффициента внутренней вязкости, когда $\varepsilon=\chi / \zeta\gg 1$

$$
L=\frac{\zeta^2}{24T^2}S^2+\frac{\zeta^2}{72\varepsilon T^2}S^2(5-2\varkappa S^2)+
+\frac{1}{432}\left(\frac{\zeta}{\varepsilon T}\right)^2S^2(35-56\varkappa S^2+12\varkappa^2S^4)+\ldots
\tag{1.10}
$$

Если $\chi=0$, то $L=\zeta^2 / 16T^2\varkappa$.

2. Наблюдаемые физические величины, такие как напряжения, выражаются через моменты функции распределения, например через моменты второго порядка

$$\langle e_i e_k\rangle = \int W e_i e_k dS, \quad \langle S_i S_k\rangle = \int W S_i S_k dS.$$

В стационарном случае с точностью до членов первого порядка по градиентам скорости с помощью функции (1.9) находим

$$\langle e_i e_k\rangle = {}^1/_3\delta_{ik} + {}^2/_5\tau\gamma_{ik}, \qquad \tau = \zeta/8\varkappa T \tag{2.1}$$

$$\langle S_i S_k\rangle = \frac{1}{2\varkappa}\delta_{ik} + \frac{\tau}{\varkappa}\gamma_{ik} \tag{2.2}$$

$$\langle e_i e_k S_j S_l\rangle = \frac{1}{10\varkappa}(\delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{il}\delta_{kj} + \delta_{ij}\delta_{kl}) + \frac{\tau}{14\varkappa}(\delta_{ik}\delta_{lj}\delta_{sn} + \ldots)\gamma_{sn} \tag{2.3}$$

В общем случае моменты удобнее определять из уравнений для моментов, которые могут быть найдены непосредственно из уравнения (1.7). Например, умножая уравнение (1.7) на S_iS_k и интегрируя, находим

$$\frac{d\langle S_i S_k\rangle}{dt} = -\frac{\langle S^2\rangle_0}{\tau}\left(\langle e_i e_k\rangle - \frac{1}{3}\delta_{ik}\right) - \frac{1}{\tau_e}\left(\langle S_i S_k\rangle - \frac{3}{2\varkappa}\langle e_i e_k\rangle\right) + \tag{2.4}$$
$$+ \langle S_i S_j\rangle\nu_{kj} + \langle S_k S_j\rangle\nu_{ij} - \frac{4\varepsilon}{1+2\varepsilon}\langle e_i e_k S_j S_l\rangle\nu_{jl}$$

Аналогично могут быть найдены уравнения для других моментов функции распределения.

Заметим, что в предельных случаях при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon \to \infty$ выражение (2.4) точно совпадает с выражениями, указанными в работе [4] для гибкой и жесткой гантелей.

В уравнения (2.4) входят два характерных времени

$$\tau = \frac{\zeta\langle S^2\rangle_0}{12T} = \frac{\zeta}{8T\varkappa}, \qquad \tau_e = \frac{\zeta + 2\chi}{8T\varkappa} = \tau(1+2\varepsilon) \tag{2.5}$$

которые характеризуют ориентационный и деформационный релаксационные процессы, протекающие при течении суспензии гантелей.

Действительно, суммируя уравнения (2.4) с одинаковыми индексами, находим релаксационное уравнение для растяжения гантели

$$\frac{d\langle S^2\rangle}{dt} = -\frac{1}{\tau_e}\left(\langle S^2\rangle - \frac{3}{2\varkappa}\right) + \frac{2}{1+2\varepsilon}\langle S_j S_l\rangle\nu_{jl} \tag{2.6}$$

При больших внутренних вязкостях, когда $\varepsilon \to \infty$, $\langle S_i S_k\rangle = \langle S^2\rangle_0\langle e_i e_k\rangle$, уравнение (2.4) переходит в уравнение

$$\frac{d\langle e_i e_k\rangle}{dt} = -\frac{1}{\tau}\left(\langle e_i e_k\rangle - \frac{1}{3}\delta_{ik}\right) + \tag{2.7}$$
$$+ \langle e_k e_s\rangle\nu_{is} + \langle e_i e_s\rangle\nu_{ks} - 2\langle e_i e_k e_j e_l\rangle\nu_{js}$$

которое описывает ориентационный процесс при движении суспензии гантелей.

К сожалению, оказывается невозможным записать замкнутую систему уравнений для моментов функции распределения, которые поэтому не могут быть найдены в общем случае. При малых градиентах скорости, однако, моменты функции распределения могут быть определены через градиенты скорости при произвольном значении внутренней вязкости.

Действительно, рассматривая случай, когда моменты не зависят от координат, уравнения (2.4) и (2.7) можно переписать в виде

$$\langle S_iS_k\rangle=\frac{1+2\varepsilon}{2\varkappa}\delta_{ik}+\int_0^\infty e^{-s/\tau_e}[\langle S_iS_j\rangle\nu_{kj}+\langle S_kS_j\rangle\nu_{ij}]ds- \tag{2.8}$$

$$-24\frac{T}{\zeta}\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\int_0^\infty e^{-s/\tau_e}\langle e_ie_k\rangle ds-\frac{4\varepsilon}{1+2\varepsilon}\int_0^\infty e^{-s/\tau_e}\langle e_ie_kS_jS_l\rangle\nu_{jl}\,ds$$

$$\langle e_ie_k\rangle={}^1/_3\delta_{ik}+\int_0^\infty e^{-s/\tau}(\langle e_ke_j\rangle\nu_{ij}+\langle e_ie_j\rangle\nu_{kj}-2\langle e_ie_ke_je_s\rangle\nu_{js})\,ds \tag{2.9}$$

В последних выражениях все подынтегральные функции берутся в точке $t-s$.

Из соотношений (2.8) и (2.9) могут быть найдены моменты функции распределения в виде разложения в ряд по кратным интегралам. С точностью до членов первого порядка по градиентам скорости находим

$$\langle S_iS_k\rangle=\frac{1}{2\varkappa}\delta_{ik}+\frac{5+6\varepsilon}{5\varkappa(1+2\varepsilon)}\int_0^\infty e^{-s/\tau_e}\gamma_{ik}(t-s)\,ds- \tag{2.10}$$

$$-\frac{48T}{5\zeta}\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\int_0^\infty e^{-s/\tau_e}\left[\int_0^\infty e^{-s'/\tau}\gamma_{ik}(t-s-s')\,ds'\right]ds$$

$$\langle e_ie_k\rangle=\frac{1}{3}\delta_{ik}+\frac{2}{5}\int_0^\infty e^{-s/\tau}\gamma_{ik}(t-s)\,ds \tag{2.11}$$

В стационарном случае выражения для моментов $\langle S_iS_k\rangle$ с точностью до членов второго порядка по градиентам скорости могут быть определены сравнительно просто.

Значения моментов при малых ε с точностью до членов первого порядка по ε определяются из уравнения (2.4) с помощью известных в нулевом приближении по ε значений моментов $\langle S_iS_k\rangle$, $\langle e_ie_k\rangle$ и $\langle e_ie_kS_jS_l\rangle$ и равны

$$\langle S_iS_k\rangle=\frac{1}{2\varkappa}\{\delta_{ik}+2\tau\gamma_{ik}+4\tau^2[\gamma_{ij}\gamma_{kj}+{}^1/_{10}(5+4\varepsilon)(\omega_{kj}\gamma_{ij}+\omega_{ij}\gamma_{kj})]\} \tag{2.12}$$

Для больших ε значения моментов вычисляются с помощью функции распределения (1.9) с учетом (1.10) и с точностью до членов второго порядка по $1/\varepsilon$ равны

$$\langle S_iS_k\rangle=\frac{1}{2\varkappa}\left\{\delta_{ik}+2\tau\gamma_{ik}+4\tau^2\left[\gamma_{ij}\gamma_{kj}-\frac{7}{54}\left(9-12\frac{1}{\varepsilon}+\right.\right.\right. \tag{2.13}$$

$$\left.\left.\left.+35\frac{1}{\varepsilon^2}\right)(\omega_{lk}\gamma_{li}+\omega_{li}\gamma_{lk})\right]\right\}$$

3. При движении суспензии гантелей из-за связанности центров трения попарно появляются дополнительные объемные силы, которые вносят вклад в осредненное значение тензора напряжений суспензии.

Наблюдаемое значение тензора напряжений структурно-неоднородной системы с точностью до членов первого порядка по скоростям вычисляется как среднее значение тензора микронапряжений

$$\sigma_{ik}=\frac{1}{V}\int_V \tilde{\sigma}_{ik}\,dV$$

Указанное среднее может быть определено [3] в общем виде через плотность объемных сил $\sigma_i(\mathbf{x})$ и силы, действующие на элемент поверхности рассматриваемого объема $\tilde{\sigma}_{il}df_l$

$$(3.1)\qquad \sigma_{ik}=\sigma_{ik}^{*}+\frac{1}{V}\int \sigma_i x_k\,dV,\quad \sigma_{ik}^{*}=\frac{1}{V}\oint \tilde{\sigma}_{il}x_k\,df_l$$

Здесь σ_{ik}^* — тензор напряжений, связанный с поверхностными силами. В рассматриваемом случае суспензии слабой концентрации

$$\sigma_{ik}^{*}=-p\delta_{ik}+2\mu(1+{}^3/_2\varphi)\gamma_{ik}$$

где p — гидростатическое давление, μ — коэффициент вязкости жидкости, φ — объемная концентрация твердой фазы.

Силы, действующие на жидкость центрами трения гантели, можно считать точечными, при этом каждая бусинка действует на жидкость с силой $\zeta(w_i^\alpha-\nu_{ik}r_k^\alpha)$, где r_j^α и w_j^α — координата и скорость диффузии α-й бусинки, и поэтому

$$\sigma_i(\mathbf{x})=\zeta\sum_\alpha (w_i^\alpha-\nu_{ik}r_k^\alpha)\,\delta(\mathbf{r}^\alpha-\mathbf{x}^\alpha)$$

где суммирование выполняется по всем бусинкам единицы объема системы.

Скорости диффузии бусинок w_i^α определяются из баланса всех сил, действующих на каждую бусинку, т. е. для гантели — суммой сил, определяемых формулами (1.2)—(1.5). Вычисляя скорости диффузии w_i^α для каждой бусинки, находим выражение для объемных сил σ_i и по (3.1) определяем выражение для тензора напряжений, которое после усреднения по функции распределения приобретает вид

$$(3.2)\qquad \sigma_{ik}=-p\delta_{ik}+2\mu(1+{}^3/_2\varphi)\gamma_{ik}+\frac{1}{4}n\zeta\left[\frac{\langle S^2\rangle_0}{\tau}\left(\langle e_ie_k\rangle-\frac{1}{3}\delta_{ik}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\tau_e}\left(\langle S_iS_k\rangle-\frac{3}{2\varkappa}\langle e_ie_k\rangle\right)+\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\langle e_ie_kS_jS_l\rangle\nu_{jl}\right]$$

где n — число гантелей в единице объема.

Заметим, что выражение (3.2) в предельных случаях при $\varepsilon=0$ и $\varepsilon\to\infty$ совпадает с выражениями, найденными в работе [4] для суспензии гибких и жестких гантелей, однако выражение (3.2) при малых ε определяет при сдвиге касательное напряжение, отличное от указанного в работе [5].

Таким образом, система уравнений движения суспензии частично-жестких гантелей кроме известных уравнений непрерывности и уравнений движения включает в себя определение тензора напряжений (3.2) и набор уравнений для моментов функции распределения, одним из которых является уравнение (2.4). Система уравнений движения оказывается незамкнутой и анализ движения суспензии не может быть выполнен в общем виде. При анализе системы уравнений приближенными методами может быть использована малость внутренней вязкости или градиентов скорости.

Например, при малых градиентах скорости тензор напряжений может быть определен через градиенты скорости при произвольном значении внутренней вязкости. Так, после подстановки моментов (2.3), (2.10) и (2.11) в уравнение (3.2) с точностью до членов первого порядка по градиентам скорости находим

$$\sigma_{ik}=-p\delta_{ik}+2\mu(1+{}^3/_2\varphi)\gamma_{ik}+2nT\left\{\frac{4\tau\varepsilon}{5(1+2\varepsilon)}\gamma_{ik}+\right. \tag{3.3}$$

$$+\frac{5+6\varepsilon}{5(1+2\varepsilon)^2}\int\limits_0^\infty e^{-s/\tau_e}\gamma_{ik}(t-s)\,ds-$$

$$-\frac{6\varepsilon}{5\tau(1+2\varepsilon)^2}\int\limits_0^\infty e^{-s/\tau_e}\left[\int\limits_0^\infty e^{-s/\tau}\gamma_{ik}(t-s-s')\,ds'\right]ds+$$

$$\left.+\frac{6\varepsilon}{5(1+2\varepsilon)}\int\limits_0^\infty e^{-s/\tau}\gamma_{ik}(t-s)\,ds\right\}$$

Таким образом, выражение для тензора напряжений при учете внутренней вязкости значительно усложняется. Интересно, что теперь система уравнений и тензор напряжений определяются двумя временами релаксации: τ и $\tau_e=\tau(1+2\varepsilon)$.

Отметим, что в случае стационарных однородных движений тензор напряжений для суспензии вязкоупругих гантелей с помощью уравнения (2.4) может быть представлен в виде

$$\sigma_{ik}=-p\delta_{ik}+2\mu(1+{}^3/_2\varphi)\gamma_{ik}+{}^1/_4n\zeta(\langle S_iS_j\rangle\nu_{kj}+\langle S_kS_j\rangle\nu_{ij}) \tag{3.4}$$

Это выражение определяет напряжения с точностью до членов третьего порядка по градиентам скорости, если моменты функции распределения известны с точностью до членов второго порядка, как определено формулами (2.12) и (2.13).

4. В качестве примера рассмотрим однородное сдвиговое движение, когда только одна компонента тензора градиентов скорости (ν_{12}) отлична от нуля.

Рассматривая осциллирующее движение, когда $\nu_{12}\sim e^{-i\omega t}$, и используя выражение (3.3), находим зависящую от частоты ω комплексную динамическую вязкость $\eta=\eta'+i\eta''$ и комплексный динамический модуль сдвига $G'-iG''=-i\omega\eta$, компоненты которого имеют вид

$$G'=nT\left[\frac{5+6\varepsilon}{5(1+2\varepsilon)^2}\frac{\tau_e^2\omega^2}{1+\omega^2\tau_e^2}-\right. \tag{4.1}$$

$$\left.-\frac{6\varepsilon}{5\tau(1+2\varepsilon)^2}\frac{\tau\tau_e(\tau+\tau_e)\omega^2}{(1+\omega^2\tau^2)(1+\omega^2\tau_e^2)}+\frac{6\varepsilon}{5(1+2\varepsilon)}\frac{\tau^2\omega^2}{1+\omega^2\tau^2}\right]$$

$$G''=\mu\omega\left(1+\frac{3}{2}\varphi\right)+nT\left[\frac{4\varepsilon\tau\omega}{5(1+2\varepsilon)}+\frac{5+6\varepsilon}{5(1+2\varepsilon)^2}\frac{\tau_e\omega}{1+\omega^2\tau_e^2}-\right. \tag{4.2}$$

$$\left.-\frac{6\varepsilon}{5\tau(1+6\varepsilon)^2}\frac{\tau\tau_e(1+\tau\tau_e\omega^2)\omega}{(1+\omega^2\tau^2)(1+\omega^2\tau_e^2)}+\frac{6\varepsilon}{5(1+2\varepsilon)}\frac{\tau\omega}{1+\omega^2\tau^2}\right]$$

При предельных значениях ε выражения (4.1) и (4.2) приобретают простой вид. Если $\varepsilon=0$, то

$$G'=nT\frac{\tau^2\omega^2}{1+\tau^2\omega^2},\quad G''=\mu\omega\left(1+\frac{3}{2}\varphi\right)+nT\frac{\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2} \tag{4.3}$$

Если ε очень велико, то

$$G'=\frac{3}{5}nT\frac{\tau^2\omega^2}{1+\tau^2\omega^2},\quad G''=\mu\omega\left(1+\frac{3}{2}\varphi\right)+nT\frac{\tau\omega\,(1+{}^2/{}_5\tau^2\omega^2)}{1+\tau^2\omega^2}\tag{4.4}$$

Для определения напряжений при установившемся сдвиговом движении суспензии частично-жестких гантелей можно использовать выражение (3.4). При этом необходимо знать моменты $\langle S_iS_k\rangle$, которые в стационарном случае при малых и больших ε определяются формулами (2.12) и (2.13) с точностью до членов второго порядка по градиентам скорости.

Рассматривая малые ε, по формуле (3.12) находим необходимые для вычисления напряжений моменты

$$\langle S_1^2\rangle=\frac{1}{2\varkappa}\left[1+\left(2+\frac{4}{5}\varepsilon\right)\tau^2\nu_{12}^2\right],\quad \langle S_2^2\rangle=\frac{1}{2\varkappa}\left[1-\frac{4}{5}\varepsilon\tau^2\nu_{12}^2\right]\tag{4.5}$$

$$\langle S_3^2\rangle=\frac{1}{2\varkappa},\quad \langle S_1S_2\rangle=\frac{1}{2\varkappa}\tau\nu_{12}$$

Теперь по (3.4) находим измеряемые величины: эффективную сдвиговую вязкость и разности нормальных напряжений

$$\eta=\mu(1+{}^3/{}_2\varphi)+nT\tau(1-{}^4/{}_5\varepsilon\tau^2\nu_{12}^2),\tag{4.6}$$
$$\sigma_{11}-\sigma_{22}=2nT\tau^2\nu_{12}^2,\quad \sigma_{22}-\sigma_{33}=0$$

Аналогично указанные величины могут быть вычислены по формулам (2.13) и (3.4) при больших ε.

Подобным образом влияние внутренней вязкости может быть указано для любого типа течения. В рассматриваемых случаях внутренняя вязкость влияет на значение динамического модуля, а также на зависимость эффективной вязкости и разностей нормальных напряжений от градиента скорости.

Изучение простой модели — суспензии гантелей с внутренней вязкостью — дает пример вязкоупругой системы, поведение которой определяется двумя релаксационными процессами: ориентационным и деформационным, и в этом отношении тесно связано с рассмотрением вязкоупругого поведения систем с длинными макромолекулами.

Поступила 21 VII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цветков В. Н., Эскин В. Е., Френкель С. Я.,* Структура макромолекул в растворах. М., «Наука», 1964.
2. *Покровский В. Н.* Напряжения, вязкость и оптическая анизотропия движущейся суспензии жестких эллипсоидов. Усп. физ. н., 1971, т. 105, вып. 4.
3. *Покровский В. Н.* Релаксационные процессы в деформируемых полимерных системах. В сб. «Успехи реологии полимеров», М., «Химия», 1970, стр. 134.
4. *Bird R. B., Warner H. B.,* Jr., *Evans D. C.* Kinetic theory and rheology of dumbbell suspensions with brownian motion. Adv. Polymer Sci., 1971, vol. 8, No. 1.
5. *Booij H. C., Wiechen P. H.* van. Effect of internal viscosity on the deformation of a linear macromolecule in a sheared solution. J. Chem. Phys., 1970, vol. 52, No. 10.
6. *Chandrasekhar, S.* Stochastic problems in Physics and astronomy. Rev. Mod. Phys., 1943, vol. 15, No. 1.