

УДК 621.43.014

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ДОННОГО ДАВЛЕНИЯ ПРИ ИСТЕЧЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУИ В КАНАЛ

Я. А. ВАГРАМЕНКО, А. Ф. ПУЧКОВА

(Москва)

Рассматривается истечение осесимметричной струи в цилиндрический канал произвольно большой площади поперечного сечения. Предложен способ расчета донного давления в срывной зоне, ограниченной невязкой границей струи, стенкой канала и уступом. Представлены новые экспериментальные данные о донном давлении при истечении струи в канал большого диаметра.

Для широкого диапазона начальных чисел Маха M_a при больших отношениях f площади сечения канала к площади среза сопла экспериментальные и расчетные данные о донном давлении в вихревой зоне, примыкающей к торцу, практически отсутствуют. Качественные соображения позволяют предположить, что при больших значениях f возможны различные режимы, при которых происходит взаимодействие струи со стенкой или в области волны разрежения, центрированной на кромке сопла, или в гиперзвуковой внутренней зоне, характер течения в которой подобен пространственному источнику. Эти режимы могут рассматриваться как два предельных случая.

Предлагается приближенный способ расчета донного давления p , позволяющий рассмотреть оба случая взаимодействия струи со стенкой канала. Если струя примыкает к стенке зоной, находящейся вне начальной области влияния волны разрежения, определим границы струи на основе представлений о подобии гиперзвуковых недорасширенных струй. Известно [1], что в области, где сверхзвуковая недорасширенная струя становится подобна осесимметричному источнику, ее геометрия практически не зависит от начального угла раствора сопла и в некоторых критериях подобия универсальна. Результаты [1] и другие известные данные для границы струи на участке ее расширения в универсальных координатах x° , r° хорошо обобщаются формулой

$$(1) \quad r^\circ = \sqrt{x^\circ}, \quad x = x^\circ A, \quad r = r^\circ A (1 - q)^{-0.5}$$

где x , r — продольная и радиальная координаты границы струи, выраженные в радиусах среза сопла, k — показатель адиабаты.

$$q = \left(1 + \frac{1}{k} M_a^{-2} \right) (1 + 1/s_a)^{-0.5}$$

$$A = M_a \sqrt{k n} (1 + 1/s_a)^{0.25}$$

$$s = \frac{k-1}{2} M^2, \quad s_a = \frac{k-1}{2} M_a^2, \quad \alpha = -\frac{k}{k-1}$$

$$n = \pi(M_a) / \pi(M), \quad \pi(M) = (1+s)^\alpha$$

$\pi(M)$ — газодинамическая функция давления. Согласно (1) для угла γ между осью струи и касательной к границе струи можно получить соотношение

$$(2) \quad \sin^2 \gamma = \frac{A^2(1-q)^2}{4r^2 + A^2(1-q)^2}$$

Определяя приближенно давление p_c за скачком в зоне выхода края струи на поверхность цилиндра ($r = \sqrt{f}$) при больших числах Маха M на невязкой границе струи по формуле Ньютона $p_c = \pi(M)(1 + kM^2 \sin^2 \gamma)p_0$, получаем зависимость

$$(3) \quad f = \frac{A^2}{4}(1-q)^2 \left[\frac{\xi k M^2}{p_*/p - 1} - 1 \right]$$

Здесь p_0 — полное давление на линии тока, совпадающей с невязкой границей струи, p_* — полное давление на разделительной линии тока, равное давлению в точке присоединения этой линии к стенке, $\xi = (p_* - p) / (p_c - p)$ — параметр присоединения, $p = \pi(M)p_0$ — донное давление, равное давлению в слое смешения.

В случае малого расширения струи, пренебрегая изменением давления, плотности ρ и скорости v вдоль линии тока вблизи границы струи, воспользуемся уравнениями [2]

$$(4) \quad \frac{\partial p}{\partial \psi} = -\frac{v}{r} \frac{\partial \gamma}{\partial z}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \psi} = -\frac{\sin \gamma}{\rho v r^2}$$

Здесь z — расстояние вдоль линии тока, ψ — функция тока.

Возьмем за исходное приближение течение типа Прандтля — Майера, в котором

$$(5) \quad \frac{\partial p}{\partial \gamma} = -\frac{\rho v^2}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

Учитывая соотношения

$$\partial r / \partial z = \sin \gamma, \quad \partial \gamma / \partial z = \sin \gamma \partial \gamma / \partial r$$

и используя в уравнениях (4) выражение (5) при условии, что $\partial p / \partial \psi = -\partial p / \partial \gamma \cdot \partial \gamma / \partial \psi$, получаем

$$(6) \quad r \frac{\partial \gamma}{\partial r} = -\frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

Решение уравнения (6) при начальном условии $r=1$, $\gamma=\gamma_0$ имеет вид

$$(7) \quad r = \exp[\sqrt{M^2 - 1}(\gamma_0 - \gamma)], \quad \gamma_0 = \nu(M) - \nu(M_a) + \gamma_a$$

Здесь γ_0 — угол границы струи у кромки сопла, $\nu(M)$ — функция Прандтля — Майера, γ_a — полуугол раствора сопла. Сравнение (7) с данными численного расчета струи [3] обнаруживает хорошую точность полученного приближения при $r \leq 2$. Заметим, что для определения границы струи в координатах (x, r) следует проинтегрировать уравнение (6), учитывая, что $\text{tg } \gamma = dr / dx$.

Соответствующее дифференциальное уравнение

$$\frac{dr}{dx} = \text{tg} \left(\gamma_0 - \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \ln r \right)$$

вблизи $\gamma = \gamma_0$ имеет решение

$$(8) \quad x = \sqrt{M^2 - 1} \ln \left[\sin \gamma_0 / \sin \left(\gamma_0 - \frac{r-1}{\sqrt{M^2 - 1}} \right) \right].$$

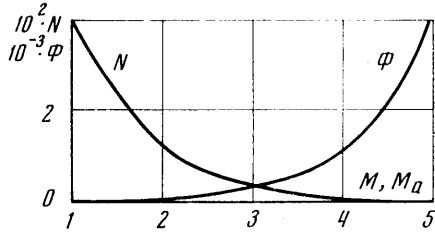
Используя формулу (7) и указанное ранее приближение для давления p_c за замыкающим скачком, получаем зависимость

$$(9) \quad f = \exp \left\{ 2\sqrt{M^2 - 1} \left[\gamma_0 - \arcsin \left(\frac{p^*/p - 1}{\xi k M^2} \right)^{0.5} \right] \right\}$$

Формулы (3), (9) дают связь между числом Маха M на невязкой границе, а следовательно, донным давлением и относительной шириной площади канала f в указанных предельных случаях взаимодействия струи со стенкой канала. В этих формулах из дополнительного условия должно быть еще задано отношение p^*/p , выраженное через число M .

При равенстве статического давления и температуры торможения на всех линиях тока в слое смешения, когда

$$\begin{aligned} p^*/p &= \pi(\lambda) / \pi(\lambda_*), \\ \lambda_*^2 / \lambda^2 &= v_*^2 / v^2 \\ \lambda^2 &= \frac{k+1}{2} M^2 (1+s)^{-1} \end{aligned}$$



Фиг. 1

где λ — коэффициент скорости на невязкой границе, получаем зависимость

$$(10) \quad p^*/p = \left[\frac{1+s}{1+s(1-\sigma)} \right]^{-\alpha}, \quad \sigma = v_*^2 / v^2.$$

Здесь, как и ранее, параметры, помеченные звездочкой, соответствуют разделительной линии тока. Тогда указанное дополнительное условие будет относиться к определению относительной скорости на разделительной линии тока и может быть представлено в виде интегрального соотношения сохранения расхода в циркуляционной зоне [4]

$$\int_0^{\eta_*} \frac{f(\eta) d\eta}{1+s[1-f^2(\eta)]} = \int_0^1 \frac{f^2(\eta) d\eta}{1+s[1-f^2(\eta)]}$$

где η — автомодельная координата слоя смешения на краю струи, $f(\eta)$ — профиль скорости в слое смешения, например, [4]

$$f(\eta) = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3, \quad f^2(\eta_*) = \sigma$$

Соответствующие расчетные величины σ представлены в таблице. При $k=1.4$ можно воспользоваться аппроксимацией $\sigma = 0.35 + 0.018M$ [5].

k	$M=2.0$	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5
1.1	0.364	0.369	0.374	0.380	0.385	0.390	0.396	0.401
1.2	0.371	0.380	0.389	0.396	0.403	0.412	0.418	0.426
1.3	0.378	0.389	0.400	0.409	0.418	0.426	0.433	0.441
1.4	0.407	0.396	0.385	0.418	0.427	0.435	0.442	0.450

В случае гиперзвукового источника соотношение для донного давления (3) удобно представить в виде

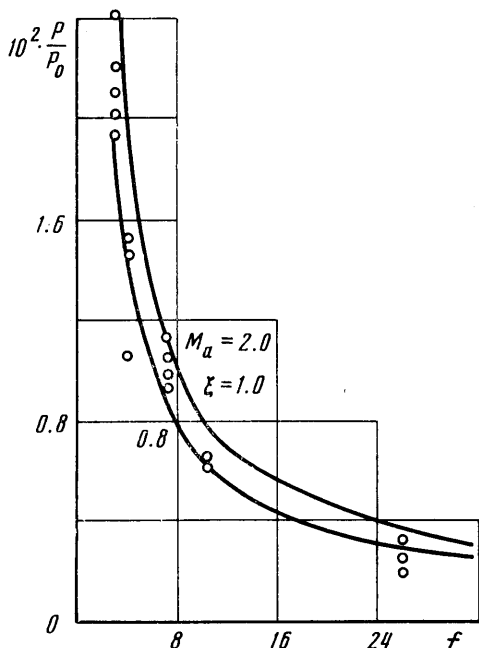
$$(11) \quad f = N(M_a, k) \Phi(M, k)$$

где функции N , Φ зависят соответственно только от M_a и M

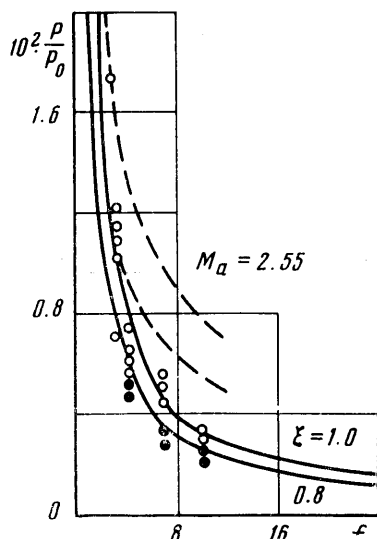
$$N(M_a, k) = \frac{\pi(M_a)}{4kM_a^2} [kM_a^2(1+1/s_a)^{0.25} - (1+kM_a^2)(1+1/s_a)^{-0.25}]^2$$

$$\Phi(M, k) = (1+s)^{h/(h-1)} \left\{ \xi k M^2 \left[\left(1 - \frac{s\sigma}{1+s} \right)^{-h/(h-1)} - 1 \right]^{-1} - 1 \right\}$$

На фиг. 1 представлены соответствующие зависимости при $k=1.4$, $\xi=1$. На фиг. 2—5 результаты расчета донного давления при различных значениях ξ сравниваются с экспериментальными данными. Эксперимен-



Фиг. 2

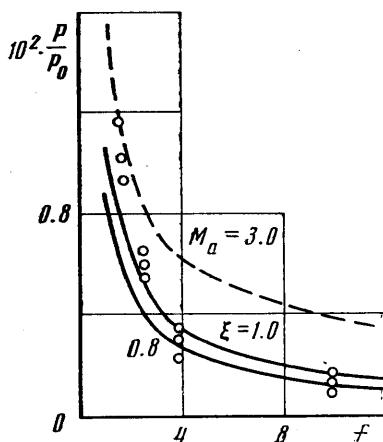


Фиг. 3

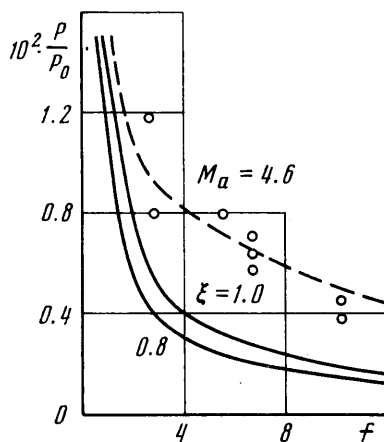
ты проводились при $k=1.4$, $M_a=2 \div 4.6$, $f=1 \div 20$, $\gamma_a=10, 15^\circ$ и начальном внешнем давлении 0.04 мм рт. ст. Измерения донного давления осуществлялись в нескольких точках донного торца. На графиках расчетные кривые по формуле (11) для источника показаны сплошными линиями, по формуле (9) — пунктирными; темными кружками обозначены опытные данные при $\gamma_a=10^\circ$, светлыми — $\gamma_a=15^\circ$. На фиг. 3 верхняя пунктирная кривая соответствует расчету по (9) при $\gamma_a=15^\circ$, нижняя пунктирная кривая — при $\gamma_a=10^\circ$.

При $f > 2$ достаточно точные расчетные результаты получаются по модели источника (формула (11)), если $M_a \leq 3$; расчет по формулам для волны разрежения при этом оказывается неприемлемым. Вместе с тем при $M_a=4.6$ во всем исследуемом диапазоне площадей f изменение донного давления соответствует расчетным данным, полученным на основе соотношения для волны разрежения (9). Для объяснения этих фактов следует вспомнить, что с уменьшением M_a увеличивается предельный угол рас-

ширения струи, т. е. область на краю струи, расширяющаяся подобно течению Прандтля — Майера, отдалается от оси струи. Асимптотическое установление в струе закономерностей источника при удалении от среза сопла происходит тем быстрее, чем меньше число M_a (см. [3]). Поэтому при одинаковом сжатии струи до поперечного размера цилиндра (за счет уплотнения периферии струи в ударном слое) течение вблизи границы струи при $M_a \sim 2$ будет ближе к состоянию, характерному для гиперзву-



Фиг. 4



Фиг. 5

кового источника, и, наоборот, при $M_a = 3 \div 4$ течение на краю струи имеет большее сходство с центрированной волной разрежения.

В различных диапазонах определяющих параметров рассмотренные два предельных подхода при определении донного давления дополняют друг друга. Совпадение с опытными данными дает расчет при значениях параметра присоединения $\xi = 1.0 \div 0.8$ [6].

Поступила 4 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Мурзинов И. Н. Параметры подобия при истечении сильно недорасширенных струй в затопленное пространство. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 4.
2. Гинзбург И. П. Аэрогазодинамика. М., «Высшая школа», 1966.
3. Аверенкова Г. И., Ашратов Э. А., Волконская Т. Г., Дьяконов Ю. Н., Егорова Н. И., Мельников Д. А., Росляков Г. С., Усков В. И. Сверхзвуковые струи идеального газа, Ч. 1, 2, М., Изд. МГУ, 1970, 1971.
4. Гогин Л. В. Приближенный расчет критических давлений присоединения и отрыва турбулентного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4.
5. Юрченко К. Е. О выборе гипотезы турбулентности в теории донного давления. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 6.
6. Korst H. H. A theory for base pressures in transonic and supersonic flow. Trans. ASME, Ser. J, J. Appl. Mech., 1956, vol. 23, No. 4.