

УДК 538.4

ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ И РАЗРЫВЫ В ИДЕАЛЬНОЙ НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

И. Е. ТАРАПОВ

(Харьков)

Пусть в идеальной жидкой среде, т. е. в среде, где отсутствуют диссипативные процессы, создано постоянное и однородное поле \mathbf{B}_0 .

Если эта среда проводящая, а ее намагничиванием и поляризацией можно пренебречь, то конечные возмущения поперечных (перпендикулярных к \mathbf{B}_0) составляющих скорости и магнитного поля распространяются вдоль \mathbf{B}_0 с постоянной скоростью, не изменяя своего вида [1]. Эти плоские поперечные волны, получившие название альфвеновских, являются линейными и не могут приводить к разрывам непрерывности, если только нет разрывов в начальных условиях.

Здесь рассматриваются плоские поперечные волны в идеальной жидкой среде, которая не только проводит ток, но и может намагничиваться в магнитном поле. В такой среде поперечные волны перестают быть линейными и могут трансформироваться в скачки величин поля и скорости. Эти волны, как альфвеновские, оставляют неизменной плотность среды, так что могут существовать в несжимаемой жидкости. Это обстоятельство отражается на характере разрывов непрерывности, которые проанализированы в п. 5.

1. Система основных уравнений. В магнитогидродинамическом приближении ($cE \sim cD \sim vH \sim vB$) дифференциальные уравнения, описывающие непрерывные течения изотропно намагничивающейся идеальной жидкой среды, записываются в виде ([2-4]).

$$(1.1) \quad \partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla(p + \psi_p) + \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{B}) + M \nabla H$$

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} + \rho T \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_{\rho, H} dH \right) + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\rho, H} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \quad c\mathbf{E} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}(\rho, T, H), \quad \mathbf{M} \parallel \mathbf{H}, \quad \psi_p \equiv \int_0^H \left\{ M - \rho \left(\frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_{T, H} \right\} dH$$

При этом считается, что закон намагничивания среды — вид зависимости $M = M(\rho, T, H)$ — известен, ибо он совпадает с соответствующим законом в собственной системе координат (K^*) $M^*(\rho, T, H^*)$ в силу того, что в рассматриваемом приближении $\mathbf{H} = \mathbf{H}^*$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^*$.

Заметим, что третье уравнение системы (1.1) означает сохранение полной энтропии в каждой частице. Иногда вместо этого уравнения удобно включать в основную систему уравнение энергии, которое в рассматриваемом

мом приближении имеет вид

$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho U + \frac{HB}{4\pi} - \psi_T - \frac{H^2}{8\pi} \right) = \\ = -\operatorname{div} \left\{ \mathbf{v} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho U - \psi_T + p + \psi_p \right) + \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \right\} \\ \left(\psi_T = \int_0^H \left\{ M - T \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_{\rho, H} \right\} dH \right)$$

где U — функция внутренней энергии среды, не зависящая от электромагнитного поля.

Обычным приемом получаем из (1.1) и (1.2) следующие соотношения на поверхностях разрыва:

$$(1.3) \quad [\rho v_n] = 0, [B_n] = 0, B_n[v_\tau] = [v_n \mathbf{B}_\tau] \\ \left[\rho v_n v_\tau - \frac{B_n \mathbf{H}_\tau}{4\pi} \right] = 0, \left[\rho v_n^2 + p + \psi_p + \frac{H^2 - 2B_n H_n}{8\pi} \right] = 0 \\ \left[v_n \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho U + p + \frac{HB}{4\pi} + \psi_p - \psi_T \right) - \frac{1}{4\pi} B_n (\mathbf{H} \cdot \mathbf{v}) \right] = 0$$

Здесь v_τ , \mathbf{H}_τ , \mathbf{B}_τ — составляющие векторов \mathbf{v} , \mathbf{H} , \mathbf{B} , касательные к элементу поверхности разрыва, который имеет орт нормали \mathbf{n} ; $[F] \equiv F_2 - F_1$, где F_1 — значение некоторой величины F до скачка, а F_2 — за ним.

Поскольку переход через поверхность разрыва сопровождается **неубыванием** энтропии, то решение системы (1.3) должно быть подчинено условию

$$(1.4) \quad \left[S + \frac{1}{\rho} \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_{\rho, H} dH \right] \geq 0$$

где S — функция энтропии среды в отсутствии магнитного поля.

Заметим, что уравнение ударной полярности для намагничивающейся среды, получаемое из (1.3), имеет вид

$$(1.5) \quad [U] + \frac{p_2 + p_1}{2} \left[\frac{1}{\rho} \right] + \frac{(B_{\tau_2} - B_{\tau_1})^2}{16\pi} \left[\frac{1}{\rho} \right] + \left[\frac{\psi_p - \psi_T}{\rho} \right] + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{M_{\tau_1}}{\rho_2} + \frac{M_{\tau_2}}{\rho_1} \right) [B_\tau] - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right) [2\pi M^2 + \psi_p] = 0$$

Таким образом, даже в случае скачков, когда $[\rho] = 0$, в идеальной намагничивающейся среде происходит изменение внутренней энергии в скачке за счет магнитокалорического эффекта.

2. Уравнения поперечных плоских волн в идеальном жидком магнетике. Отыскивая решение системы (1.1) в виде

$$(2.1) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(x, t), T = T(x, t), p = p(x, t), \rho = \text{const} \\ \mathbf{B} = B_0(\mathbf{i}_x + \mathbf{b}(x, t)), \mathbf{v} \cdot \mathbf{i}_x = \mathbf{b} \cdot \mathbf{i}_x = 0$$

получаем уравнения, описывающие распространение поперечных волн в идеальном магнетике

$$(2.2) \quad p + \frac{H^2}{8\pi} + \frac{B_0 M}{\sqrt{1+b^2}} + \psi_p = f(t)$$

$$(2.3) \quad T = T^\circ(x) \exp \left\{ - \frac{B_0}{\rho c_v} \int_{h^\circ(x)}^{h(x,t)} \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_{\rho, h} dh \right\}$$

$$(2.4) \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = a_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\mathbf{b}}{\sqrt{1+b^2}} h(b, x) \right\}$$

$$(2.5) \quad a_0^2 \equiv \frac{B_0^2}{4\pi\rho}, \quad h(b, x) \equiv \frac{H}{B_0} = \sqrt{1+b^2} - \frac{4\pi M(\rho, T, h)}{B_0}$$

Для описания волновых движений решением этой системы необходимо задать начальные условия

$$\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}^\circ(x), \quad \mathbf{b}(x, 0) = \mathbf{b}^\circ(x), \quad T(x, 0) = T^\circ(x)$$

Кроме того, для определения функции $f(t)$ необходимо краевое условие — значения h, p, T в какой-либо точке $x = x_0$.

Соотношение (2.2) определяет функцию $p(x, t)$.

Уравнения (2.3), (2.4) образуют систему для определения $\mathbf{v}(x, t)$, $\mathbf{b}(x, t)$, $T(x, t)$. Уравнения (2.4) удобно переписать в виде

$$(2.6) \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}, \quad \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = F_1(b, x) \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} + F_2(b, x) \frac{\mathbf{b}}{\sqrt{1+b^2}}$$

$$F_1(b, x) \equiv 1 - \frac{4\pi M(\rho, T, h)}{B_0(1+b^2)^{3/2}} - \frac{4\pi b^2 \chi(\rho, T, h)}{(1+b^2)(1+4\pi \chi(\rho, T, h))}$$

$$F_2(b, x) \equiv \frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{4\pi}{B_0} \frac{\partial M}{\partial x}$$

$$(2.7) \quad \chi(\rho, T, h) = \frac{1}{B_0} \left\{ \left(\frac{\partial M}{\partial h} \right)_{\rho, T} + \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_{\rho, h} \frac{\partial T}{\partial h} \right\}$$

Анализ системы (2.3) — (2.5) для произвольного вида зависимости $M(\rho, T, h)$ представляется затруднительным и громоздким. Поэтому в дальнейшем остановимся на рассмотрении наиболее характерных частных случаев задачи.

3. Распространение волн по насыщенному магнетiku. В состоянии магнитного насыщения при температурах T , ниже температуры Кюри θ , можно принять

$$(3.1) \quad M(\rho, T, h) = K(\rho) (\theta - T)$$

Зависимость $K = K(\rho)$ учитывает магнитострикционные напряжения. Несмотря на то что в рассматриваемых задачах принято $\rho = \text{const}$, зависимость $K(\rho)$ существенно влияет на результаты, ибо она явно входит в ψ_p . Это обстоятельство не учитывалось в работах [4, 5], хотя еще в [6] было замечено, что магнитострикционные напряжения, сравнимые по порядку с давлением в жидких магнетиках, играют существенную роль в задачах о распределении напряжений. Заметим, что $\psi_p = 0$ только лишь при $K = \rho \text{ const}$.

Примем также, что \mathbf{B} и \mathbf{H} имеют одинаковое направление, поэтому всегда $4\pi M < B$.

В этом случае в уравнениях (2.6), согласно (2.7), имеем

$$(3.2) \quad F_1(b, x) = 1 - \frac{m(1-\tau)}{(1+b^2)^{3/2}} + \frac{b^2\beta m^2\tau}{(1+b^2)(1-\beta m^2\tau)}$$

$$F_2(b, x) = \frac{m\tau}{1-\beta m^2\tau} \frac{d}{dx} \{ \ln \tau^\circ(x) - \beta m^2 \tau^\circ(x) - \beta m \sqrt{1 + (b^\circ(x))^2} \}$$

$$\tau^\circ(x) = T^\circ(x)/\theta, \quad \beta_v = B_0^2/4\pi r c_0 \theta, \quad m = 4\pi K\theta/B_0$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1°. Пусть $b^\circ(x) = \text{const}$, $\tau^\circ(x) = \text{const}$. Тогда из (2.6) и (3.2) имеем

$$(3.3) \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = a^2(b) \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x}$$

$$a(b) = a_0 \sqrt{F_1(b)} = a_0 \left(1 - \frac{m(1-\tau(b))}{(1+b^2)^{3/2}} + \frac{b^2\beta m^2\tau(b)}{(1+b^2)(1-\beta m^2\tau(b))} \right)^{1/2}$$

$$(3.4) \quad \tau(b) = \tau_0 \exp \{ \beta m (\sqrt{1+b^2} + m\tau(b)) \}$$

$$\tau_0 = \tau^\circ \exp \{ -\beta m \sqrt{1+(b^\circ)^2} - m\tau_0 \}$$

Система (3.3) допускает решение Римана в виде простых волн: $\mathbf{v} = f(b)\mathbf{b}$, $f = \pm a(b)$. При этом скорость перемещения плоскости $x = x(t, b)$, в которой сохраняется неизменным значение величины b , равна

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_b = - \left(\frac{\partial b}{\partial t} \right) / \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right) = f(b) = \pm a(b)$$

Отсюда имеем $x \pm ta(b) = F(b)$, где $F(b)$ — произвольная функция. Это соотношение совместно с (3.4) определяет решение (3.3) в виде неявной зависимости $b = b(x, t)$.

Поскольку при $m \neq 0$, вообще говоря, $da/db \neq 0$, то эти волны, будучи сколь угодно гладкими в начальный момент, впоследствии «прокидываются», и с этого момента времени непрерывное решение Римана теряет силу. Возникают поверхности разрыва непрерывности величины b , а следовательно, и v , p , τ . Таким образом, даже при малых значениях m , что характерно для большинства проводящих жидкостей, конечные возмущения в идеальном магнетике рано или поздно преобразуются в скачки.

Из формул (3.4) следует, что возможны как волны, приводящие к намагничивающим скачкам ($dF_1/db > 0$), проходя через которые магнетик увеличивает свое магнитное поле, так и волны, преобразующиеся в размагничивающие скачки ($dF_1/db < 0$). Вопрос о существовании того или иного вида скачков должен решаться из условия неубывания энтропии в скачке.

2°. Система (3.3) допускает автомодельное решение типа центрированной волны разрежения

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(\xi), \quad \mathbf{v} = f(\xi)\mathbf{b}(\xi), \quad f(\xi) = \frac{1}{b(\xi)} \left(c - a_0 \int \xi \frac{db}{d\xi} d\xi \right)$$

$$F_1(b) = \xi^2, \quad (\xi = x/a_0 t)$$

которое описывает конечное возмущение, распространяющееся вдоль прямолинейных характеристик без изменения направления векторов \mathbf{b} , \mathbf{v} .

3°. Волны, описанные в предыдущих двух случаях, существуют при произвольных функциях $b^\circ(x)$, $\tau^\circ(x)$, но в достаточно холодном магнетике ($\tau \ll 1$), т. е. когда в (3.2) можно отбросить члены порядка τ .

Заметим, что при $\beta \ll 1$ волны не меняют начального распределения температуры в магнетике.

4. Волны в ненасыщенном магнетике. Функцию намагниченности среды можно с достаточной степенью общности записать в виде

$$(4.1) \quad M = \frac{M_0}{\tau} \frac{d\varphi(h)}{dh} \equiv \frac{M_0}{\tau} \varphi' \quad \left(\tau(x, t) = \frac{T}{T_0} \right)$$

где M_0 — характерная намагниченность, причем возможно $M_0 = M_0(\rho)$, а τ — отношение температуры магнетика к некоторой характерной постоянной температуре T_0 .

Формула (4.1) учитывает зависимость M от T согласно закону Кюри для парамагнетиков. Для ненасыщенного парамагнетика $\varphi' = h$, а для ферромагнитных суспензий [4] можно принять $\varphi' = h^{1/2}$.

Записывая уравнения распространения волны в форме (2.6), для закона (4.1) получим

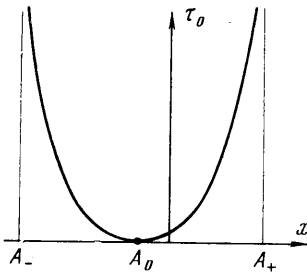
$$F_1 = a_0^2 \left\{ 1 - \frac{m_0 \varphi'}{\tau (1+b^2)^{3/2}} - \frac{4\pi\chi b^2}{(1+b^2)(1+4\pi\chi)} \right\}$$

$$F_2 = \frac{a_0^2 m_0 \tau \varphi'}{1+4\pi\chi} \{ \tau^2 + 2m_0 \beta (\varphi(h) - \varphi(h_0)) \}^{-1} \left\{ \frac{d}{dx} \ln \tau_0 - \frac{\beta}{\tau^2} \frac{d\varphi(h_0)}{dx} \right\}$$

$$\chi = \frac{m_0 \varphi'' \{ \tau^2 + 2m_0 \beta (\varphi(h) - \varphi(h_0)) \} - \beta (\varphi')^2}{4\pi\tau \tau^2 + 2m_0 \beta (\varphi(h) - \varphi(h_0))}$$

$$h = \sqrt{1+b^2} - m_0 \varphi' / \tau, \quad m_0 = 4\pi M_0 / B_0, \quad \beta = B_0^2 / 4\pi r c_s T_0$$

В том случае, когда волны не меняют начального распределения температуры $\tau_0(x)$ (при $\beta \ll 1$), а магнетик далек от насыщения ($\varphi' = h$), из (2.6) и (4.2) получаем



Фиг. 1

Рассмотрим случай, когда функция распределения температуры по магнетикку имеет вид

$$(4.4) \quad \tau_0(x) = m_0 \frac{a^2(x)}{a_0^2 - a^2(x)} \equiv m_0 \frac{(k_1 x + k_2)^4}{a_0^2 - (k_1 x + k_2)^4}$$

где k_1, k_2 — постоянные.

Вид этой функции представлен на фиг. 1, где

$$A_0 = -k_2 / k_1, \quad A_+ = (\sqrt{a_0} - k_2) / k_1, \quad A_- = -(\sqrt{a_0} + k_2) / k_1$$

Поскольку $\tau_0(x) \geq 0$, то решение системы (4.3) надо рассматривать для $A_- \leq x \leq A_+$. Не уменьшая общности вида функции (4.4), для определенности будем считать $k_1 > 0, \sqrt{a_0} \geq k_2 > 0$.

Исключая из системы (4.3) v и переходя к характеристическим переменным ξ, η , получаем для \mathbf{b} уравнение

$$(4.5) \quad \frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{3}{4} a_x' \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \eta} \right) + \frac{a_x'^2 + a a_{xxx}''}{2} \mathbf{b} = 0$$

$$\left(\xi = \int_0^x \frac{dx}{a(x)} - t, \quad \eta = \int_0^x \frac{dx}{a(x)} + t, \quad a(x) = (k_1 x + k_2)^2 \right)$$

Отсюда получаем

$$b(\xi, \eta) = 1/2(1 - 1/2 k_1 k_2 (\xi + \eta)^3) (b_1(\xi) + b_2(\xi))$$

где b_1, b_2 — произвольные вектор-функции, вид которых определяется из начальных условий.

Если $b(x, 0) = b^0(x)$, $v(x, 0) = v^0(x)$, то имеем

$$b_1(x) = \frac{b^0(X(x))}{(1 - k_1 k_2 x)^3} - \frac{v^0(X(x))}{k_2^2 (1 - k_1 k_2 x)^3} - \frac{k_1}{k_2} \int \frac{v^0(X(\xi))}{(1 - k_1 k_2 \xi)^2} d\xi$$

$$b_2(x) = \frac{2b^0(X(x))}{(1 - k_1 k_2 x)^3} - b_1(x), \quad X(x) = \frac{k_2^2 x}{1 - k_1 k_2 x}$$

Заметим, что решение в замкнутом виде системы (4.3) можно получить и при $a^2(x) = (k_1 x + k_2)^{2/3}$.

Для $a(x) = (k_1 x + k_2)^2$ получаем два семейства характеристик

$$x^+ = \frac{k_2^2 (\xi + t)}{1 - k_1 k_2 (\xi + t)}, \quad x^- = \frac{k_2^2 (\eta - t)}{1 - k_1 k_2 (\eta - t)}$$

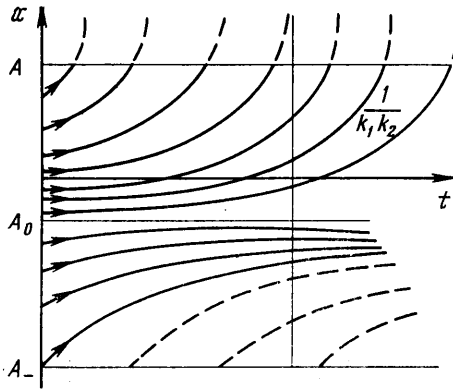
причем семейство x^+ определяет волны, бегущие в сторону положительного направления оси $x - e$ (вправо), а семейство x^- — волны, распространяющиеся влево.

Рассмотрим, например, семейство x^+ (фиг. 2). Сплошными линиями представлены те участки характеристик, которые отвечают реально существующим волнам для $t > 0$, т. е. которые при $t = 0$ начинаются на сегменте $A_- \leq x \leq A_+$ и при $t > 0$ лежат внутри этой полосы, соответствующей положительным значениям температуры $\tau_0 > 0$.

По первой ветви каждой характеристики ($x^+ > A_0$) идет распространение возмущений вправо из области низких температур в область с более высокой температурой жидкости. Эти возмущения ускоряются, ибо их скорость растет по мере удаления от начального положения и достигает наибольшей величины, равной a_0 , которая не зависит от начального положения возмущения.

Поскольку скорость распространения возмущения из какой-то плоскости $x^+ = \text{const}$ тем больше, чем эта плоскость находится дальше от точки $x = A_0$, то рассматриваемые возмущения «размазываются», удаляясь от своего начального положения. Это схематически представлено на фиг. 3, б.

По второй ветви характеристики ($x^+ < A_0$) возмущения распространяются вправо из области более высоких температур в область пониженных температур. Характер их распространения качественно отличен от предыдущих волн. Эти возмущения замедляются, и в области нулевых температур ($x = A_0$) скорость всех возмущений становится равной нулю. Наибольшая начальная скорость этих возмущений равна a_0 (там, где $\tau_0 = \infty$). Как нетрудно видеть, эти возмущения, замедляясь в своем движении, становятся все более концентрированными (см. фиг. 3, а).

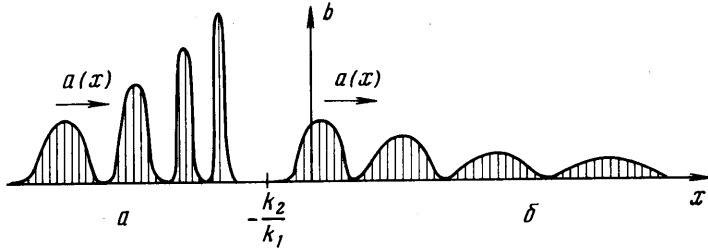


Фиг. 2

Из выражения типа интеграла энергии для системы (4.3), которое имеет вид

$$\oint_L \left\{ \frac{v^2}{2} + \frac{a^2(x) b^2}{2} \right\} dx + a^2(x) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}) dt = 0$$

где L — любой кусочно-гладкий замкнутый контур, можно получить, что амплитуда ускоряющихся волн уменьшается, а замедляющихся — увеличивается.



Фиг. 3

5. Разрывы в намагничивающей среде. В п. 3 было показано, что в идеальном насыщенном магнетике конечные возмущения поперечного поля \mathbf{b} и скорости \mathbf{v} могут преобразовываться в скачки величин b , v , p , T . Рассмотрим пример расчета такого типа разрывов.

Пусть насыщенный идеальный жидкий магнетик подчиняется следующим уравнениям состояния:

$$(5.1) \quad i = c_p T, \quad M = \rho K (\theta - T)$$

где i — энтальпия, $c_p = \text{const}$ — теплоемкость магнетика.

Подставляя (5.1) в (1.4) и рассматривая случай $[\rho] = 0$, получаем

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \alpha^2 \left[b - \frac{m' b}{\sqrt{1+b^2}} \right] &= [b], \quad [v] = \frac{v_0}{B_0} [b] \\ -\frac{8\pi}{B_0^2} [p] &= \left[(\sqrt{1+b^2} - m')^2 + \frac{2m'}{\sqrt{1+b^2}} \right] \\ \frac{2}{\beta_p} [\tau] &= \left[\alpha^2 b^2 \left(1 - \frac{m'}{\sqrt{1+b^2}} \right) - 2b^2 \left(1 - \frac{m'}{\sqrt{1+b^2}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2m\sqrt{1+b^2} - 2m'm \right] \\ \alpha^2 &\equiv \frac{B_0^2}{4\pi\rho v_0^2}, \quad \beta_p = \frac{B_0^2}{4\pi\rho c_p \theta}, \quad m = \frac{4\pi\rho K}{B_0}, \quad m' = m(1-\tau) \end{aligned}$$

Эта система служит для определения $[p]$, $[b]$, $[\tau]$ и $[v]$ по известным параметрам жидкости до скачка. При этом условие (1.4) осуществимости скачка приобретает вид

$$(5.3) \quad [\tau] \geq \tau_1 \left\{ \exp \left(m\beta_p \sqrt{1+b_1^2} \left(\frac{1-\varphi}{\varphi} + \frac{m[\tau]}{\sqrt{1+b_1^2}} \right) \right) - 1 \right\}$$

$$\varphi = \varphi(\xi, b_1) \equiv \sqrt{\frac{1+b_1^2}{1+b_1^2 \xi^2}}, \quad \xi = \frac{b_2}{b_1},$$

где ξ — интенсивность скачка.

Система (5.2), (5.3) описывает скачки, в которых терпят разрыв величины векторов \mathbf{V}_i , \mathbf{v}_i , а их направления не меняются (в предположении, что \mathbf{V} и \mathbf{H} остаются параллельными между собой и после скачка). Это следует из последнего соотношения системы (1.3) и предположения $[b] \neq 0$.

Такие разрывы, как это следует из п. 3, присущи только намагничивающимся средам и могут являться предельной формой волны Римана при $B/H \neq \text{const}$.

В качестве примера решения системы (5.2) рассмотрим случай $\beta_p \ll 1$. Заметим, что для таких сред, как калий, натрий и т. п., при $B_0 \leq 10^4$ гс имеем $\beta_p \leq 10^{-4}$.

Для этого случая, считая $m \ll 1$, из (5.2) после ряда несложных выкладок получаем

$$(5.4) \quad m_1 = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 - M^*(\xi, b_1)},$$

$$\frac{2}{\beta_p} [\tau] = b_1^2 (1 - \xi^2) \left(1 - \frac{m_1}{N^*(\xi, b_1)} \right)$$

$$(5.5) \quad m_1 = \frac{m(1 - \tau_1)}{\sqrt{1 + b_1^2}}, \quad M^*(\xi, b_1) =$$

$$= (\varphi + 1)^{-1} \left(\varphi + \frac{1 - \xi b_1^2}{1 + \xi^2 b_1^2} \right)$$

$$N^*(\xi, b_1) = \left(M^* + \frac{2\varphi}{(1 + \varphi)(1 - \tau_1)} \right)^{-1},$$

$$\gamma = \frac{v_1}{(v_a)_1} = \alpha^{-1} \left(1 - \frac{m}{\sqrt{1 + b_1^2}} \right)^{-1/2}$$

$$(v_a)_1 = \sqrt{\frac{B_0 H_1}{4\pi\rho}}$$

причем $v_1 (= v_0)$ — скорость магнетика до скачка, $(v_a)_1$ — альфвеновская скорость в магнетике до скачка.

Поскольку $m_1 < 1$ (ибо $H_1 > 0$) и $0 \leq M^* \leq 1$ (при любых $\xi \geq 0$, $b_1 \geq 0$), то из (5.4) следует:

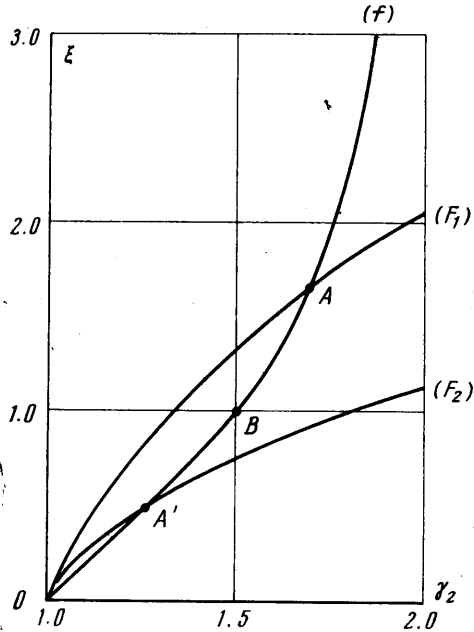
$$(5.6) \quad 1 < \gamma^2 < (1 - m_1)^{-1}$$

Таким образом, рассматриваемые скачки могут возникать только при скоростях больших альфвеновской.

Условие осуществимости скачка (5.3) в рассматриваемом примере означает $[\tau] \geq 0$, а в силу (5.4) дает $(\gamma^2 - 1) \leq N^*(\gamma^2 - M^*)$, если $\xi < 1$, и $(\gamma^2 - 1) \geq N^*(\gamma^2 - M^*)$ при $\xi > 1$.

Таким образом, в плоскости $\xi\gamma^2$ кривая $F = (1 - N^*M^*)(1 - N^*)^{-1}$, пересекаясь с кривой $f = (1 - m_1M^*)(1 - m_1)^{-1}$, дает на (f) точку (A), которая вместе с точкой (B) пересечения (f) с прямой $\xi = 1$ определяет значения γ^2 , при которых возможны скачки соответствующей интенсивности ξ . При этом для фиксированных τ_1 , m_1 , b_1 возможны либо намагничивающиеся ($\xi > 1$), либо размагничивающиеся ($\xi < 1$) скачки.

На фиг. 4 представлены графики кривой (f) при $b_1 = 1$, $m_1 = 0.5$ и двух кривых (F) для тех же значений b_1 и m_1 и $\tau_1 = 0.5$ — кривая (F₁) (возмож-



Фиг. 4

ны только намагничивающие скачки интенсивности $1 < \xi \leq \xi_A$ и $\tau_1 = 0.1$ — кривая (F_2) (возможны только размагничивающие скачки интенсивности $\xi_A \leq \xi < 1$). Исследование соответствующих уравнений для (f) и (F) приводит к выводу о том, что размагничивающие скачки возможны при $\tau_1 < \tau^*$, а намагничивающие — при $\tau_1 > \tau^*$, где $\tau^* = 1 - m_1(1 + b_1^2)(1 + b_1^2 - m_1)^{-1}$. При $\tau_1 = \tau^*$ скачков рассматриваемого типа нет, ибо при $\xi = 1$ имеем $[\tau] = [p] = 0$, так что в этом случае возможны обычные вращательные разрывы.

После того как из (5.4) найдено значение ξ , из третьего уравнения (5.2) определяется скачок давления

$$8\pi[p] = B_0^2 b_1^2 \{2m_1(\varphi\xi^2 - 1) + 1 - \xi^2\}$$

Автор благодарит А. Г. Куликовского и А. А. Бармина за ценные замечания, сделанные при обсуждении работы.

Поступила 29 IX 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Alfven H.* Existence of electromagnetic — hydrodynamics waves. Nature, 1942, t. 150, № 3805.
2. *Седов Л. И.* О пондеромоторных силах взаимодействия электромагнитного поля и ускоренно движущегося материального континуума с учетом конечности деформации. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
3. *Тарапов И. Е.* К гидродинамике поляризующихся и намагничивающихся сред. Магнитная гидродинамика, 1972, № 1.
4. *Neuringer J. L., Rosensweig R. E.* Ferrohydrodynamics. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 12.
5. *Curtis R.* Flows and wave propagation in ferrofluids. Phys. Fluids, 1971, vol. 14, No. 10.
6. *Страттон Д.* Теория электромагнетизма. М.-Л., Гостехиздат, 1948.