УДК 533.601.18

ОБ ОДНОМ МОДЕЛЬНОМ МЕТОДЕ В КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ

А. И. ИВАНОВСКИЙ, С. Х. РОЗЕНФЕЛЬД

(*Москва*)

Развивается метод, основанный на использовании модельного уравнения $\mathbf{v}\partial f/\partial\mathbf{v}=vl^{-1}(f_0-f)$, где v – модуль молекулярной скорости, l – длина свободного пробега. Выясняется ряд общих свойств модели, подробно обсуждается предельный переход к сплошной среде.

1. Постановка задачи. В кинетической теории газов наряду с точными методами, основанными на уравнении Больцмана, широкое распространение получили модельные методы, среди которых наиболее часто используются релаксационная и эллипсоидальная статистические модели. Достоинства и недостатки этих моделей многократно обсуждались в литературе (см. [1]). В работах [2, 3] авторы данной статьи предложили модельный метод, основанный на кинетическом уравнении

$$\mathbf{v}\partial f/\partial\mathbf{r}=vl^{-1}(f_0-f) \tag{1.1}$$

Как показано в [2, 3], этот метод обладает двумя важными достоинствами: верным значением числа Прандтля в пределе сплошной среды, а также простотой и общностью математического аппарата. В [2, 3] этим методом решались задачи о плоском течении Куэтта, плоском и цилиндрическом течении Пуазейля, теплопередача, температурном крипе и термической эффузии в плоском и цилиндрическом капиллярах. Сопоставления результатов с расчетами других авторов, а в некоторых случаях и с экспериментом говорят в пользу предлагаемого метода. Вместе с тем вызывала неудовлетворенность недостаточная логическая обоснованность тех уравнений, которыми авторы пользовались в [2, 3].

В данной работе на основе (1.1) развивается несколько иной подход, оставляющий почти без изменения математический аппарат, но более удовлетворительный с логической точки зрения. Выясняется ряд общих свойств модели. Подробно исследуется предельный переход к сплошной среде.

2. Описание метода. Введем функцию распределения $f(\mathbf{v},\mathbf{r})$, имеющую смысл плотности числа частиц в элементе $d\mathbf{v}d\mathbf{r}$ фазового пространства. Далее введем гидродинамические величины

$$N=\int f\,d\mathbf{v},\quad N\mathbf{u}=\mathbf{Q}=\int f\mathbf{v}\,d\mathbf{v},\quad \frac{3}{2}N\frac{mv_0^2}{2}+N\frac{mu^2}{2}=\int f\frac{mv^2}{2}d\mathbf{v} \tag{2.1}$$

$$\mathbf{J}=\int f\mathbf{v}\frac{mv^2}{2}d\mathbf{v},\quad v_0=\left(\frac{2\theta}{m}\right)^{1/2},\quad P_{ij}=\int fm(v_i-u_i)(v_j-u_j)\,d\mathbf{v}$$

где N – плотность числа частиц, $N\mathbf{u}$ – поток числа частиц, Q – плотность энергии, J – поток энергии, P_{ij} – тензор напряжений.

Вместе с этими гидродинамическими величинами, которые в дальнейшем будем именовать «истинными», определим также «фиктивные» гидродинамические величны N^*, u^*, $v_0{}^*$

$$(2.2)\qquad N^* v_0{}^* = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int v f \, d\mathbf{v}$$

$$N^* v_0{}^* \mathbf{u}^* = \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \int v \mathbf{v} f \, d\mathbf{v}$$

$$N^* v_0{}^{*3} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \int v^3 f \, d\mathbf{v}$$

Далее введем функцию f_0

$$(2.3)\qquad f_0(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = \frac{N^*}{\pi\sqrt{\pi}\, v_0{}^{*3}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{u}^*)^2}{v_0{}^{*2}}\right)$$

формально совпадающую с локально-максвелловским распределением, в котором роль числа частиц, гидродинамической скорости и температуры играют фиктивные величны (2.2). Теперь вид статистической модели, задаваемой уравнением

$$\mathbf{v} \partial f / \partial \mathbf{r} = v l^{-1} (f_0 - f)$$

определен полностью (l — средняя длина пробега).

Для описания поведения разреженного газа необходимо знать, как находить поля фиктивных параметров при заданных условиях на границах течения, как связать истинные величины с фиктивными, существует ли у газа, описываемого с помощью (1.1), равновесное состояние и какова его структура. Выясним эти вопросы.

Можно показать, что функция f, удовлетворяющая уравнению (1.1), удовлетворяет также интегральному уравнению

$$(2.4)\qquad \int f(v\varkappa, \mathbf{r})\, d\varkappa = \frac{1}{l} \int d\mathbf{r}' \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} f_0(v\varkappa, \mathbf{r}') - \oint\!\!\oint (\varkappa\, d\mathbf{S}') f(v\varkappa, \mathbf{r}') \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2}$$

В объемном и поверхностном интегралах под $\varkappa$ понимается ядро $\varkappa = (\mathbf{r}-\mathbf{r}')/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$; $d\mathbf{S}'$ — элемент внешней поверхности, $R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$. Поверхность интегрирования в (2.4) не совпадает вообще говоря с реальной границей течения, а может заключать произвольную подобласть течения. Если расположить эту поверхность на расстояниях, значительно меньших длины пробега l от границы, то для направлений внутрь объема, очевидно, функция распределения f совпадает с функцией f_s частиц, отраженных от границы. Поэтому

$$(2.5)\qquad \int f(v\varkappa, \mathbf{r})\, d\varkappa = \frac{1}{l} \int d\mathbf{r}' \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} f_0(v\varkappa, \mathbf{r}') -$$

$$- \oint\!\!\oint (\varkappa\, d\mathbf{S}') f_s(v\varkappa, \mathbf{r}') \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2}$$

Будем считать отражение от стенки диффузным, т. е.

$$(2.6)\qquad f_s = \frac{N_s}{\pi\sqrt{\pi}\, v_s{}^3} \exp\left(-\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{u}_s)^2}{v_s{}^2}\right)$$

где $\mathbf{u}_s$ — скорость стенки, $mv_s^2/2$ — температура стенки. Так же как и в работах [2, 3], ограничимся рассмотрением течений с малыми числами Маха. В этом случае функция f_0 линеаризуется

$$f_0 = \frac{N^*}{\pi\sqrt{\pi}\, v_0^{*3}} \exp\left(-\frac{v^2}{v_0^{*2}}\right)\left(1+2\frac{\mathbf{v}\mathbf{u}^*}{v_0^{*2}}\right) \tag{2.7}$$

и аналогично f_s.

Теперь заметим, что принятые определения (2.2) фиктивных параметров обеспечивают обращение в нуль следующих интегралов:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} N u_j = \int \frac{v}{l}(f_0 - f)\, d\mathbf{v} = 0 \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} P_{ij} = \int \frac{v}{l}(f_0 - f)\, v_i\, d\mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} J_j = \int \frac{v}{l}(f_0 - f)\frac{mv^2}{2}\, d\mathbf{v} = 0$$

Используя равенства (2.8), выражающие сохранение числа частиц, компонент импульса и энергии в процессе соударений, можно получить интегральные уравнения для фиктивных параметров. Домножим уравнение (2.5) последовательно на v, $v\cdot\mathbf{v}$, v^3 и проинтегрируем по модулям импульсов (точнее по v^2dv). Получим

$$N^* v_0^* = \frac{1}{l}\int d\mathbf{r}'\, \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2}\left\{N^* v_0^* + \frac{3\sqrt{\pi}}{2}\varkappa \mathbf{Q}^*\right\} - \tag{2.9}$$

$$- \oint\!\!\oint \varkappa\, d\mathbf{S}'\, \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2}\left\{N_s v_s - \frac{3\sqrt{\pi}}{3}\varkappa N_s \mathbf{u}_s\right\}$$

$$\mathbf{Q}^* v_0^* = \frac{1}{l}\int d\mathbf{r}'\, \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2}\left\{3\varkappa(\varkappa\mathbf{Q}^*) v_0^* + \frac{9\sqrt{\pi}}{8}\varkappa\frac{N^* v_0^{*2}}{2}\right\} - \tag{2.10}$$

$$- \oint\!\!\oint \varkappa\, d\mathbf{S}'\, \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2}\left\{3\varkappa(\varkappa N_s \mathbf{u}_s v_s) + \frac{9\sqrt{\pi}}{8}\varkappa\frac{N_s v_s^2}{2}\right\}$$

$$N^* v_0^{*3} = \frac{1}{l}\int d\mathbf{r}'\, \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2}\left\{N^* v_0^{*3} + \frac{15\sqrt{\pi}}{16} v_0^{*2}(\varkappa\mathbf{Q}^*)\right\} - \tag{2.11}$$

$$- \oint\!\!\oint \varkappa\, d\mathbf{S}'\, \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2}\left\{N_s v_s^3 + \frac{15\sqrt{\pi}}{16} v_s^2(\varkappa N_s \mathbf{u}_s)\right\}$$

Интегральные уравнения (2.9)—(2.11) позволяют при заданных условиях на границах получить поля фиктивных параметров внутри объема. Пусть эти поля найдены. Домножим (2.5) последовательно на 1, $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}^2/2$, $v_i v_j$, $^1/_2 m v^2 \mathbf{v}$ и проинтегрируем по модулям скоростей. Получим

$$N = \frac{1}{l}\int d\mathbf{r}'\, \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2}\left\{N^* + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\varkappa\mathbf{Q}^*}{v_0^*}\right\} - \tag{2.12}$$

$$- \oint\!\!\oint \varkappa\, d\mathbf{S}'\, \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2}\left\{N_s + \frac{2}{\sqrt{\pi}} N_s \frac{\varkappa\mathbf{u}_s}{v_s}\right\}$$

$$(2.13)\qquad \mathbf{Q}=\frac{1}{l}\int d\mathbf{r}'\,\frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2}\left\{3\varkappa(\varkappa\mathbf{Q}^*)+\frac{2}{\sqrt{\pi}}N^*v_0^*\varkappa\right\}-$$

$$-\oint\!\!\oint \varkappa\, d\mathbf{S}'\,\frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}N_s v_s\varkappa+3\varkappa(N_s\mathbf{u}_s\varkappa)\right\}$$

$$(2.14)\qquad N\frac{v_0^2}{2}=\frac{1}{l}\int d\mathbf{r}'\,\frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2}\left\{N^*\frac{v_0^{*2}}{2}+\frac{8}{3\sqrt{\pi}}v_0^*(\varkappa\mathbf{Q}^*)\right\}-$$

$$-\oint\!\!\oint \varkappa\, d\mathbf{S}'\,\frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2}\left\{N_s\frac{v_s^2}{2}+\frac{8}{3\sqrt{\pi}}N_s v_s(\varkappa\mathbf{u}_s)\right\}$$

$$(2.15)\qquad \mathbf{J}=\frac{1}{l}\int d\mathbf{r}'\,\frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2}\left\{\frac{4}{\sqrt{\pi}}N^*v_0^*\frac{mv_0^{*2}}{2}\varkappa+\frac{15}{8}\varkappa\frac{mv_0^{*2}}{2}(\varkappa\mathbf{Q}^*)\right\}-$$

$$-\oint\!\!\oint \varkappa\, d\mathbf{S}'\,\frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2}\left\{\frac{4}{\sqrt{\pi}}N_s v_s\frac{mv_s^2}{2}\varkappa+\frac{15}{8}\varkappa\frac{mv_s^2}{2}(\varkappa N_s\mathbf{u}_s)\right\}$$

$$(2.16)\qquad P_{ij}=\frac{1}{l}\int d\mathbf{r}'\,\frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2}\varkappa_i\varkappa_j\left\{\frac{N^*v_0^{*2}}{2}+\frac{8}{3\sqrt{\pi}}v_0^*(\varkappa\mathbf{Q}^*)\right\}-$$

$$-\oint\!\!\oint \varkappa\, d\mathbf{S}'\,\frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2}\varkappa_i\varkappa_j\left\{\frac{N_s v_s^2}{2}+\frac{8}{3\sqrt{\pi}}v_s N_s(\varkappa\mathbf{u}_s)\right\}$$

Уравнения (2.12)—(2.16) позволяют выразить истинные гидродинамические величины через найденные фиктивные параметры.

3. Состояния, близкие к равновесию. $\mathscr{H}$ — теорема Больцмана (доказательство которой для модели (1.1) тривиально) утверждает, что равновесие в системе достигается когда $f=f_0$. Докажем, что для состояний, близких к локальному равновесию, фиктивные гидродинамические величины близки к истинным. В качестве критериев близости к равновесию примем

$$(3.1)\qquad l\left|\frac{\partial v_0^*}{\partial\mathbf{r}}\right|\ll v_0^*,\qquad l\left|\frac{\partial N^*}{\partial\mathbf{r}}\right|\ll N^*,\qquad l\left|\frac{\partial u^*}{\partial\mathbf{r}}\right|\ll u^*$$

т. е. перепады фиктивных гидродинамических величин на длине свободного пробега малы. В интегральных уравнениях (2.12)—(2.16) перейдем к пределу $l\to0$. При этом воспользуемся асимптотическим равенством

$$(3.2)\qquad \lim_{l\to0}\frac{1}{l}\int d\mathbf{r}'\,\frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2}A\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},\mathbf{r}'\right)=\int d\varkappa\,A(-\varkappa,\mathbf{r})+$$

$$+l\frac{\partial}{\partial x_j}\int\varkappa_jA(-\varkappa,\mathbf{r})\,d\varkappa+l^2\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\int\varkappa_i\varkappa_jA(-\varkappa,\mathbf{r})\,d\varkappa$$

Сохраняя слагаемые только первого порядка малости, находим

$$(3.3)\qquad N=N^*-\frac{2}{\sqrt{\pi}}l\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{N^*u_j^*}{v_0^*}$$

$$(3.4)\qquad Q_j=Q_j^*-\frac{2}{\sqrt{\pi}}l\frac{\partial}{\partial x_j}N^*v_0^*\qquad P=N\frac{mv_0^2}{2}$$

$$(3.5)\qquad P=P^*-\frac{8}{3\sqrt{\pi}}l\frac{\partial}{\partial x_j}N^*v_0^*u_j^*,\qquad P^*=N^*\frac{mv_0^{*2}}{2}$$

Таким образом, при $l\to0$ фиктивные гидродинамические величины стремятся к истинным. Кроме того, равенства (3.3)—(3.5) при выполнении

(3.1), очевидно, влекут за собой

$$l\left|\frac{\partial P}{\partial \mathbf{r}}\right| \ll P, \quad l\left|\frac{\partial N}{\partial \mathbf{r}}\right| \ll N, \quad l\left|\frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}}\right| \ll u \tag{3.6}$$

т. е. состояние близко к равновесию и в обычном смысле.

Таким образом, равновесным состоянием газа, описываемого с помощью модельного уравнения (1.1), является обычное локально-максвелловское распределение.

4. Гидродинамическое приближение. Важнейшим требованием к любой статистической модели является возможность корректного предельного перехода к уравнениям гидродинамики. Прежде всего вычислим значение коэффициентов вязкости и теплопроводности. В выражении (2.16) для тензора напряжений перейдем к пределу $l\to 0$, воспользовавшись при этом равенством (3.2). Получаем

$$P_{ij}=P^*\delta_{ij}-\frac{8}{15\sqrt{\pi}}l\frac{\partial}{\partial x_m}Q_k^*v_0^*(\delta_{ij}\delta_{km}+\delta_{ik}\delta_{jm}+\delta_{jk}\delta_{im}) \tag{4.1}$$

Свертывая по индексам i, j, находим

$$P=P^*-\frac{8}{9\sqrt{\pi}}l\frac{\partial}{\partial x_m}Q_m^*v_0^* \tag{4.2}$$

Из (4.1) и (4.2) получаем

$$P_{ij}=P\delta_{ij}-\frac{8}{15\sqrt{\pi}}l\left\{\frac{\partial Q_i^*v_0^*}{\partial x_j}+\frac{\partial Q_j^*v_0^*}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial Q_k^*v_0^*}{\partial x_k}\right\} \tag{4.3}$$

В этом уравнении, согласно (3.3)–(3.5), фиктирные величины можно заменить на истинные. Определим вязкость

$$\eta=\frac{8}{15\sqrt{\pi}}\rho v_0 l \tag{4.4}$$

Теперь

$$P_{ij}=P\delta_{ij}-\left\{\frac{\partial u_i\eta}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j\eta}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k\eta}{\partial x_k}\right\} \tag{4.5}$$

Пренебрегая членами типа $u_j\partial\eta/\partial x_i$, получаем обычное выражение тензора напряжений через тензор скоростей деформаций

$$P_{ij}=P\delta_{ij}-\eta\left\{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right\} \tag{4.6}$$

Аналогичные преобразования уравнения (2.15) приводят к следующему выражению для теплового потока:

$$J_i=\frac{4}{3\sqrt{\pi}}l\frac{\partial}{\partial x_i}Nv_0\frac{mv_0^2}{2}+\frac{5}{8}\frac{mv_0^2}{2}Q_i \tag{4.7}$$

Опуская здесь второй член, представляющий собой конвективный перенос тепла, получаем обычное уравнение теплопроводности

$$J_i=-k_\theta\frac{\partial\theta}{\partial x_i}, \quad k_\theta=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\rho}{m}v_0 l \tag{4.8}$$

Сопоставляя (4.4) и (4.8), вычислим число Прандтля

$$\mathrm{Pr}=c_P\eta/k_\theta={}^2/_3 \tag{4.9}$$

что совпадает с больцмановским значением числа Прандтля. В этом смысле модель (1.1) значительно лучше релаксационной модели, в которой число Прандтля, как известно, равно единице.

Выведем уравнение Навье — Стокса. Для этого перейдем к пределу $l \to 0$ в уравнении (2.10)

$$(4.10)\qquad l^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j} Q_j{}^* v_0{}^* + 2l^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j} Q_i{}^* v_0{}^* = \frac{15\sqrt{\pi}}{8} l \frac{\partial}{\partial x_j} P^*$$

Подставляя в (4.10) соотношение (3.5)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} Q_i{}^* v_0{}^* = \frac{9\sqrt{\pi}}{8} \frac{P^* - P}{l}$$

и опять пренебрегая производными вязкости по координатам, находим

$$(4.11)\qquad \Delta u_i + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u_j = \frac{1}{\eta} \frac{\partial P}{\partial x_i}$$

т. е. обычное уравнение Навье — Стокса (в рассматриваемом линейном приближении конвективный член исчезает). Аналогично могут быть получены уравнения для полей температуры и давления.

Для решения уравнений гидродинамики необходимо сформулировать некоторые граничные условия. Эти граничные условия также можно получить из уравнений (2.8) — (2.16), разлагая подынтегральные функции вблизи границы области и переходя к пределу $l \to 0$. Полная система граничных условий весьма громоздка. Выпишем только два из них: условие скольжения при наличии тангенциального к стенке градиента давления (стенка неподвижна)

$$(4.12)\qquad u|_s = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} v_0 \frac{l}{P} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{3}{8} l \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_s$$

условие температурного скачка при наличии нормального к стенке градиента температуры (газ неподвижен)

$$(4.13)\qquad \theta|_s = \theta_s - \frac{1}{2} l \frac{\partial \theta}{\partial z}\bigg|_s$$

Более общие граничные условия могут быть выведены из (2.8) — (2.16).

Переформулировка метода, предлагаемая в настоящей работе, не затрагивает основных результатов работ [2, 3], хотя некоторые из них теперь могут быть несколько уточнены. В заключение отметим, что схема, подобная развитой в настоящей работе, может быть построена и в случае течений с произвольными числами Маха, однако математическая сторона вопроса при этом резко усложняется.

Поступила 19 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Anderson D. G. M., Baum H., Krook M.* The current status of statistical models in kinetic theory. In: Rarefied Gas Dynamics, vol. 1. New York — London, Acad. Press., 1969.
2. *Ивановский А. И., Розенфельд С. Х.* Решение внутренних задач аэродинамики в переходном режиме с помощью модельного кинетического уравнения. ПМТФ 1972, № 2.
3. *Ивановский А. И., Розенфельд С. Х.* Теория термической эффузии в переходном режиме. Тр. ЦАО, 1972, вып. 115.