УДК 532.546

О СТЕПЕННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ИСТОЧНИКОВ

В. И. ВОРОНИН, В. В. ФАЛЕЕВ

(*Воронеж*)

Получено решение задачи о плоской степенной фильтрации несжимаемой жидкости при действии двух источников (стоков).

Решение основывается на преобразовании С. А. Чаплыгина, возможность использования которого при исследовании нелинейной фильтрации впервые отмечена в [1].

В работах [2–5] применено это преобразование при рассмотрении фильтрации с предельным градиентом.

В данной работе при построении точного решения использован другой нелинейный закон сопротивления — степенной.

Применение переменных С. А. Чаплыгина позволяет преобразовать исходную систему уравнений к уравнению Гельмгольца, которое сводится затем к функциональному соотношению, решаемому методом Винера — Хопфа. Полученные результаты указывают на возможность решения предложенным методом других задач плоской степенной фильтрации, порождаемой источниками и стоками, в частности при их симметричном расположении.

1. Плоская нелинейная фильтрация несжимаемой жидкости в пористой среде при степенном законе сопротивления описывается системой уравнений

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial\beta}=\frac{\sqrt{n+1}}{\chi}\exp(-2\varepsilon\tau)\frac{\partial p^*}{\partial\tau}\tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial\tau}=-\frac{\sqrt{n+1}}{\chi}\exp(-2\varepsilon\tau)\frac{\partial p^*}{\partial\beta}$$

$$\tau=\sqrt{n+1}\ln vv_0^{-1},\ \psi^*=\psi/M,\ p^*=p/p_0,\ \chi=v_0^nMp_0^{-1}\alpha^{-1},\ \varepsilon=n/2\sqrt{n+1}$$

где τ, β — переменные С. А. Чаплыгина, ψ^* — безразмерная функция тока, p^* — безразмерное давление, χ — параметр фильтрации, α — константа, характеризующая пористую среду и жидкость, $n+1$ — степень фильтрации (при $n=0$ фильтрация линейная), p_0 — характерное давление, v_0 — характерная скорость фильтрации. Исключив p^* из (1.1) и положив

$$\psi^*=Q(\tau,\beta)\exp(-\varepsilon\tau)\tag{1.2}$$

получим

$$\frac{\partial^2Q}{\partial\beta^2}+\frac{\partial^2Q}{\partial\tau^2}-\varepsilon^2Q=0\tag{1.3}$$

2. Пусть фильтрация в однородном плоском пласте порождается двумя источниками мощностью $2M$, симметрично расположенными на оси x на расстоянии d от начала координат (фигура 1, a).

В рассматриваемом случае оси x и y являются линиями тока, причем на оси y имеются точки D и D' в которых скорость достигает максимального для этой оси значения v_0. При решении достаточно рассмотреть течение в каком-либо из четырех квадрантов плоскости xy, например в первом.

В плоскости $\tau\beta$ этому квадранту соответствует полоса $0\leqslant\beta\leqslant\pi$ с разрезом в середине левой полуполосы (фигура 1, *б*). На границах полосы величины Q принимают следующие значения:

$$\text{на } AB\ Q=0,\ \text{на } OA\ Q=\exp(\varepsilon\tau),\ \text{на } OD\ (DC)\ Q=\exp(\varepsilon\tau) \tag{2.1}$$

Проведем в первом квадранте физической плоскости линию DA ($\beta=\pi/2$), на которой τ изменяется от 0 до ∞. В плоскости $\tau\beta$ этой линии соответствует пунктирная полупрямая, параллельная оси τ, на которой функция $Q_+(\tau, \pi/2)$ непрерывна вместе со своими производными.

Из-за наличия разреза CD (OD) целесообразно рассмотреть решение отдельно для верхней и нижней половин полос. Очевидно, что при $\tau<0$ для обоих решений функция $Q(\tau, \beta)$ абсолютно интегрируема по τ от $-\infty$ до 0, а при $\tau>0$ абсолютно интегрируемо по τ от 0 до ∞ произведение $Q\exp(-\omega\tau)$, где $\omega>\varepsilon$. Решение $Q=Q^{(1)}(\tau, \beta)$ для нижней полуполосы и $Q=Q^{(2)}(\tau, \beta)$ для верхней можно представить в виде обобщенных интегралов Фурье [6]

$$Q^{(j)}(\tau,\beta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\lambda\tau)\bar{Q}_-^{(j)}(\lambda,\beta)\,d\lambda+ \tag{2.2}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty-i\omega}^{\infty-i\omega}\exp(i\lambda\tau)\bar{Q}_+^{(j)}(\lambda,\beta)\,d\lambda \qquad (j=1,2)$$

$$\bar{Q}_-^{(j)}(\lambda,\beta)=\int_{-\infty}^{0}\exp(-i\lambda\xi)Q^{(j)}(\xi,\beta)\,d\xi$$

$$\bar{Q}_+^{(j)}(\lambda,\beta)=\int_{0}^{\infty}\exp(-i\lambda\xi)Q^{(j)}(\xi,\beta)\,d\xi$$

где λ — параметр Фурье.

Подставив (2.2) в (1.3) и обозначив оператор

$$L=d^2/d\beta^2-q^2$$

найдем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\lambda\tau)L(\bar{Q}_-^{(j)})\,d\lambda+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty-i\omega}^{\infty-i\omega}\exp(i\lambda\tau)L(\bar{Q}_+^{(j)})\,d\lambda=0$$

Выражение $L(\bar{Q}_-^{(j)})$ регулярно в верхней полуплоскости λ, а $L(\bar{Q}_+^{(j)})$ — в нижней полуплоскости. Поэтому везде

$$d^2\bar{Q}^{(j)}/d\beta^2-q^2\bar{Q}^{(j)}=0 \qquad (q^2=\lambda^2+\varepsilon^2,\ \bar{Q}^{(j)}=\bar{Q}_+^{(j)}+\bar{Q}_-^{(j)}). \tag{2.3}$$

Если

$$\bar{Q}_1=\bar{Q}(\lambda,0)=\bar{Q}_+(\lambda,0)+\bar{Q}_-(\lambda,0)$$

$$\bar{Q}_2=\bar{Q}(\lambda,\pi)=\bar{Q}_+(\lambda,\pi)+\bar{Q}_-(\lambda,\pi)$$

$$\bar{Q}=\bar{Q}(\lambda,\pi/2)=\bar{Q}_+(\lambda,\pi/2)+\bar{Q}_-(\lambda,\pi/2)$$

то для нижней и верхней половин полосы решения запишутся соответственно в виде

$$Q^{(1)}(\lambda, \beta)=\overline{Q}_1\frac{\operatorname{sh} q(\pi/2-\beta)}{\operatorname{sh} q\pi/2}+\overline{Q}\frac{\operatorname{sh} q\beta}{\operatorname{sh} q\pi/2}$$

$$\overline{Q}^{(2)}(\lambda, \beta)=\overline{Q}\frac{\operatorname{sh} q(\pi-\beta)}{\operatorname{sh} q\pi/2}+\overline{Q}_2\frac{\operatorname{sh} q(\beta-\pi/2)}{\operatorname{sh} q\pi/2}$$

Из (2.1) можно установить, что

$$\overline{Q}_1=0,\ \overline{Q}_2=0,\ \overline{Q}_-=i(\lambda+i\varepsilon)^{-1}$$

Поэтому

$$\overline{Q}^{(1)}(\lambda, \beta)=\left[\overline{Q}_+\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right)+\frac{i}{\lambda+i\varepsilon}\right]\frac{\operatorname{sh} q\beta}{\operatorname{sh} q\pi/2} \tag{2.4}$$

$$\overline{Q}^{(2)}(\lambda, \beta)=\left[\overline{Q}_+\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right)+\frac{i}{\lambda+i\varepsilon}\right]\frac{\operatorname{sh} q(\pi-\beta)}{\operatorname{sh} q\pi/2} \tag{2.5}$$

На линии DA кроме условия о непрерывном смыкании решения для верхней и нижней половин полосы при $\tau\geqslant 0$ необходимо еще потребовать равенство производных

$$\partial Q^{(1)}/\partial\beta=\partial Q^{(2)}/\partial\beta$$

Из (2.2), (2.4) и (2.5) следует, что

$$\left[\overline{Q}_+\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right)+\frac{i}{\lambda+i\varepsilon}\right]g\operatorname{cth}\frac{q\pi}{2}=\overline{\Psi}_-(\lambda) \tag{2.6}$$

где функция $\overline{\Psi}_-(\lambda)$ — регулярная в верхней полуплоскости.

Для решения функционального уравнения используется метод Винера — Хопфа [7]. Алгебраическая факторизация выражения

$$K(\lambda)=q\operatorname{cth} q\pi/2=\varphi_+(\lambda)\varphi_-(\lambda)$$

определяется функциями

$$\varphi_+(\lambda)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{2k-1}\frac{\lambda-is_k}{\lambda-ir_k}\qquad \varphi_-(\lambda)=\frac{2}{\pi}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{2k-1}\frac{\lambda+is_k}{\lambda+ir_k} \tag{2.7}$$

$$s_k=\sqrt{(2k-1)^2+\varepsilon^2},\qquad r_k=\sqrt{4k^2+\varepsilon^2}$$

Уравнение (2.6) с учетом (2.7) примет вид

$$\left[\overline{Q}_+\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right)+\frac{i}{\lambda+i\varepsilon}\right]\varphi_+(\lambda)=\frac{\overline{\Psi}_-(\lambda)}{\varphi_-(\lambda)} \tag{2.8}$$

Из физически очевидного требования конечности производных $\partial\psi^*/\partial\beta$ при $\tau\to\pm\infty$ устанавливаем, что левая и правая части уравнения (2.8) могут иметь особенность лишь в точке $\lambda=-i\varepsilon$ в виде полюса некоторой кратности, их разложения Лорана в этой точке справедливы во всей плоскости λ. Если допустить, что кратность полюса $m>1$, то полюс той же кратности должна иметь в точке $\lambda=-i\varepsilon$ функция $\overline{Q}_+(\lambda, \pi/2)$. Тогда в выражении для оригинала этой функции, найденном с помощью теории вычетов, появились бы слагаемые, содержащие множители τ^{m-1}, $\tau^{m-2}, \ldots$, коэффициенты которых ввиду конечности $\psi^*(\tau, \beta)$ во всей полосе τ, β (в частности, при $\tau\to\pm\infty$) следует положить равным 0. Полагая коэффициент равным 0 при τ^{m-1}, находим, что порядок полюса равен $m-1$. Продолжая эти рассуждения, убеждаемся, что $m\leqslant 1$.

Отсюда следует, что

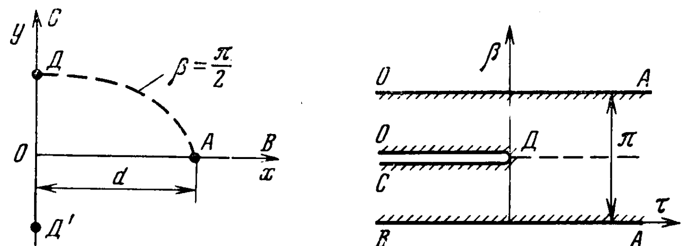
$$\left[\bar{Q}_+\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right)+\frac{i}{\lambda+i\varepsilon}\right]\varphi_+(\lambda)=\frac{ia}{\lambda+i\varepsilon} \tag{2.9}$$

где a — вещественная константа.

Из (2.9) вытекает, что

$$\bar{Q}_+\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right)+\frac{i}{\lambda+i\varepsilon}=\frac{ia}{(\lambda+i\varepsilon)\varphi_+(\lambda)} \tag{2.10}$$

Заметим, что функция $\psi^*(\tau, \beta)$ определяется с точностью до постоян-



а б

ного слагаемого, поэтому функция $\bar{Q}_+(\lambda, \pi/2)$ определяется с точностью до слагаемого $ib'/(\lambda+i\varepsilon)$, где b' — вещественная постоянная.

Тогда (2.10) примет вид

$$\bar{Q}_+\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right)=\frac{ia}{(\lambda+i\varepsilon)\varphi_+(\lambda)}+\frac{ib}{\lambda+i\varepsilon} \tag{2.11}$$

Оригинал функции (2.11) находим, используя теорему о вычетах

$$Q_+\left(\tau, \frac{\pi}{2}\right)=-[b+a\Phi(\varepsilon)]\exp(\varepsilon\tau)+\frac{2a}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\exp(-s_k\tau)}{s_k(s_k+\varepsilon)\Phi(s_k)} \tag{2.12}$$

$$\left(\Phi(s_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{2k-1}{2k}\frac{s_k+r_k}{s_k+s_k}\right)$$

Постоянные a и b находятся из условий

$$Q_+(0, \pi/2)=1, \quad \psi^*(\infty, \pi/2)=1/2$$

которые приводят к уравнениям

$$-a\Phi(\varepsilon)-b=\frac{1}{2}, \quad -a\Phi(\varepsilon)-b+\frac{2a}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{s_k(s_k+\varepsilon)\Phi(s_k)}=1 \tag{2.13}$$

Применив при вычислении оригинала для $i/(\lambda+i\varepsilon)\varphi_+(\lambda)$ теорему о вычетах при $\tau=0$ для верхней и нижней полуплоскостей λ, устанавливаем, что

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{s_k(s_k+\varepsilon)\Phi(s_k)}=\Phi(\varepsilon) \tag{2.14}$$

Из (2.13) и (2.14) имеем

$$a=[2\Phi(\varepsilon)]^{-1},\quad b=-1$$

Тогда выражение (2.12) примет вид

$$Q_+\left(\tau,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\exp(\varepsilon\tau)+\frac{1}{\pi\Phi(\varepsilon)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\exp(-s_k\tau)}{s_k(s_k+\varepsilon)\Phi(s_k)}$$

Далее для (2.4) и (2.5) найдем

$$\bar{Q}^{(1)}(\lambda,\beta)=\frac{i}{2\Phi(\varepsilon)}\frac{\operatorname{sh}q\beta}{(\lambda+i\varepsilon)\varphi_+(\lambda)\operatorname{sh}q\pi/2} \tag{2.15}$$

$$\bar{Q}^{(2)}(\lambda,\beta)=\frac{i}{2\Phi(\varepsilon)}\frac{\operatorname{sh}q(\pi-\beta)}{(\lambda+i\varepsilon)\varphi_+(\lambda)\operatorname{sh}q\pi/2} \tag{2.16}$$

С учетом (2.15) и (2.16) решение задачи (2.2) записывается в виде

$$Q(\tau,\beta)=\frac{\beta}{\pi}\exp(\varepsilon\tau)+$$
$$+\frac{1}{\pi\Phi(\varepsilon)}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\exp(-s_k\tau)\sin(2k-1)\beta}{s_k(s_k+\varepsilon)\Phi(s_k)}\qquad(\tau>0)$$

$$Q^{(1)}(\tau,\beta)=\frac{2\beta}{\pi}\exp(\varepsilon\tau)+ \tag{2.17}$$
$$+\frac{2}{\pi\Phi(\varepsilon)}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{k\Phi(r_k)\exp(r_k\tau)\sin 2k\beta}{r_k(r_k-\varepsilon)}\qquad(\tau<0)$$

$$Q^{(2)}(\tau,\beta)=\exp(\varepsilon\tau)+\frac{2}{\pi\Phi(\varepsilon)}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k\Phi(r_k)\exp(r_k\tau)\sin 2k\beta}{r_k(r_k-\varepsilon)}\qquad(\tau<0)$$

$$\left(\Phi(r_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{2k-1}{2k}\frac{r_k+r_k}{r_k+s_k}\right)$$

Для перехода к плоскости физических координат x^*, y^* следует проинтегрировать выражения

(2.18)
$$dx^*=-\frac{M}{v_0 d}\left[\frac{1}{\chi}\exp(-\sqrt{n+1}\,\tau)\cos\beta\,dp^*+\right.$$
$$\left.+\exp\left(-\frac{\tau}{\sqrt{n+1}}\right)\sin\beta\,d\psi^*\right],\qquad x^*=\frac{x}{d}$$
$$dy^*=-\frac{M}{v_0 d}\left[\frac{1}{\chi}\exp(-\sqrt{n+1}\,\tau)\sin\beta\,dp^*-\right.$$
$$\left.-\exp\left(-\frac{\tau}{\sqrt{n+1}}\right)\cos\beta\,d\psi^*\right],\qquad y^*=\frac{y}{d}$$

с учетом найденного решения и соотношений (1.1) и (1.2). Параметр v_0, определяющий поле размерных скоростей в плоскости фильтрации, находится интегрированием первого выражения (2.18) по τ в пределах от $-\infty$ до ∞ при $\beta=\pi$. Поскольку этот интеграл должен быть равен единице, то, используя (1.1) и (1.2), (2.17) и теорему о вычетах, имеем

(2.19)
$$v_0=\frac{M}{\pi d\sqrt{n+1}}\left[\sqrt{n+1}+\right.$$
$$+\frac{1}{\Phi(\varepsilon)}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)}{s_k(s_k+\varepsilon)\,(s_k+{}^1/_2(n+2)\,(n+1)^{-1/2}\Phi(s_k)}+$$
$$\left.+\frac{4}{\Phi(\varepsilon)}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k^2\Phi(r_k)}{r_k(r_k-\varepsilon)\,[r_k-{}^1/_2(n+2)\,(n+1)^{-1/2}]}\right]$$

При линейной фильтрации ($n=0$) s_k и r_k — целые числа. Применив асимптотическое представление для $k!$, вычисляем $\Phi(s_k)$ и $\Phi(r_k)$

(2.20)
$$\Phi(s_k)=\frac{2^k}{\pi}\frac{(k-1)!}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)},\qquad \Phi(r_k)=\frac{1}{2^k}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{k!}$$

Подставив (2.20) в найденное решение, убеждаемся, что оно, как и следовало ожидать, совпадает с классическим решением, полученным методом комплексного потенциала.

Поступила 19 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Христианович С. А.* Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси. ПММ, 1940, т. 4, вып. 1.
2. *Ентов В. М.* О некоторых двумерных задачах теории фильтрации с предельным градиентом. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
3. *Ентов В. М.* Об одной задаче фильтрации с предельным градиентом, допускающей точное решение. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
4. *Ентов В. М., Салганик Р. Л.* О решении плоских задач фильтрации с предельным градиентом методом малого параметра. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
5. *Бернадинер М. Г., Ентов В. М.* Некоторые точные решения плоских задач фильтрации с предельным градиентом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
6. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М., Гостехиздат, 1948.
7. *Нобл Б.* Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.