

УДК 532.529.6 : 537.2

## О ЗАХВАТЕ МЕЛКИХ КАПЕЛЬ КРУПНЫМИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В. М. ЕНТОВ, В. А. КАМИНСКИЙ, Э. Г. СИНАЙСКИЙ

(Москва)

При исследовании процесса разрушения эмульсий путем коалесценции капель до сих пор используется, с теми или иными модификациями, теория коагуляции коллоидов М. Смолуховского (например, [1]). Однако между коллоидами и эмульсиями имеется существенное различие.

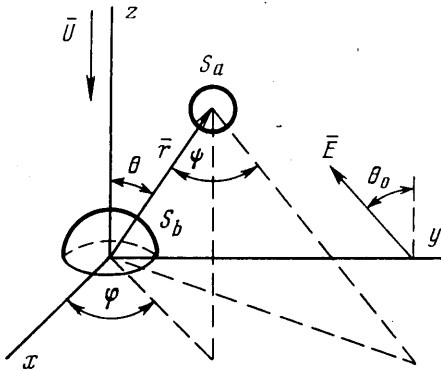
Силы притяжения, обуславливающие слияние двух коллоидных частиц, становятся преобладающими на расстояниях, много больших размера частиц, так что коллоидные частицы можно считать в гидродинамическом смысле не взаимодействующими. Напротив, дисперсная фаза в эмульсиях представляет собой молекулярно гладкие сферические капли размером от нескольких долей микрона и более, и при их сближении становятся существенными силы гидродинамического взаимодействия, препятствующие коалесценции. Как правило, капли можно считать жесткими недеформируемыми сферами, поскольку их поверхность стабилизирована поверхностно-активными веществами. При сближении таких сфер слой жидкости между ними порождает тормозящую силу, пропорциональную скорости сближения капель и обратно пропорциональную расстоянию между их поверхностями. В результате сближение капель под действием конечной силы происходит за бесконечное время. Отсюда следует, что процесс коалесценции капель требует наличия силы притяжения, растущей до бесконечности при сближении капель, и любая теория коалесценции требует совместного учета сил притяжения капель и гидродинамических сил.

**1. Постановка задачи.** В предлагаемой работе сделана попытка рассмотреть с учетом всех действующих факторов элементарный акт процесса укрупнения эмульсии — коалесценцию большой и малой капель в электрическом поле. Учитывая естественное различие скоростей больших и малых капель, будем считать большую каплю радиуса  $b$  неподвижно закрепленной в начале координат сферической системы  $(r, \theta, \varphi)$ , а поток, увлекающий малую каплю радиуса  $a$ , — набегающим со скоростью  $U$  на бесконечности (фиг. 1). При достаточно малых размерах капель  $a$  и  $b$  достаточно рассмотреть безынерционные движения в квазистационарном приближении. При этом имеем уравнения движения малой капли в виде

$$(1.1) \quad \mathbf{F}_g + \mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{T}_g + \mathbf{T} = 0, \quad d\mathbf{r}_a/dt = \mathbf{V}.$$

Здесь  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{T}$  — сила и момент, создаваемые электрическим полем,  $\mathbf{F}_g$  и  $\mathbf{T}_g$  — сила и момент, создаваемые гидродинамическими усилиями, действующими на поверхности малой капли. Через  $\mathbf{r}_a$  обозначен радиус-вектор центра малой капли,  $\mathbf{V}$  — ее скорость,  $\Omega$  — угловая скорость ее вращения.

В первых двух уравнениях системы (1.1) гидродинамические силы и момент могут быть, в принципе, линейно выражены через неизвестные  $\mathbf{V}$  и  $\Omega$ . Исключая из них  $\Omega$  и выражая  $\mathbf{V}$  в функции от  $\mathbf{r}_a$  и параметров задачи, получим из последнего уравнения дифференциальное уравнение траектории частицы. Рассмотрим на удалении от большой капли в набегающем потоке нормальное к вектору скорости  $U$  сечение. Задаваясь в нем начальным положением  $(r, \theta, \varphi)$  малой частицы и интегрируя затем численно уравнение (1.1), можно проследить траекторию частицы до тех пор, пока она либо попадет на большую каплю (препятствие), либо прой-



Фиг. 1

дет мимо нее. Меняя начальное положение частицы, выделим в набегающем потоке ту минимальную трубку тока, которая не содержит частиц, не попадающих на препятствие. Отношение площади нормального сечения этой трубки тока к площади сечения большой сферы  $\pi b^2$  называется относительным сечением захвата малых частиц большой, и его определение составляет главную задачу настоящей работы. Для простоты рассмотрим вначале случай, когда движение происходит в меридиональной плоскости, а затем — упро-

щенный общий пространственный случай.

**2. Гидродинамические силы.** В каждый момент для отыскания гидродинамических сил, действующих на малую каплю в предположении, что ее движение задано, нужно решить уравнения Стокса при условиях прилипания на сферах и условиях на бесконечности

$$(2.1) \quad \nu \Delta \mathbf{u} = \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$(2.2) \quad \mathbf{u}|_{s_b} = 0, \quad \mathbf{u}|_{s_a} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$$

$$(2.3) \quad \mathbf{u} \rightarrow (-U \cos \theta, U \sin \theta, 0) \quad (r \rightarrow \infty)$$

Полное решение сформулированной задачи неизвестно и необходимые выражения для гидродинамических сил будут получены путем аппроксимации и соединения известных частных решений. Из решения этой задачи в данном случае необходим лишь один элемент: выражения для силы  $\mathbf{F}$  и момента  $\mathbf{T}_g$ .

В силу линейности задачи имеем

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_e, \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}_s + \mathbf{T}_e$$

Здесь «стоксовские» слагаемые  $\mathbf{F}_s$ ,  $\mathbf{T}_s$  отвечают жестко закрепленной малой частице ( $\mathbf{V} = \boldsymbol{\Omega} = 0$ ), а «собственные» слагаемые линейно зависят от  $\mathbf{V}$  и  $\boldsymbol{\Omega}$  и отвечают отсутствию потока на бесконечности ( $U = 0$ ).

Обозначим через  $\mathbf{u}^0(\mathbf{r})$  поле скоростей стоксовского обтекания большой частицы

$$u_r^0 = U \cos \theta \left( \frac{3}{2} \frac{b}{r} - \frac{1}{2} \frac{b^3}{r^3} - 1 \right)$$

$$u_\theta^0 = U \sin \theta \left( 1 - \frac{3}{4} \frac{b}{r} - \frac{1}{4} \frac{b^3}{r^3} \right)$$

Характерный масштаб изменения этого поля скоростей равен  $b$ . Это означает, что в любой области размером, много меньшим  $b$ , этот поток может быть приближенно представлен квазиплоским потоком в меридиональной плоскости  $\varphi = \text{const}$ , образуемым наложением однородного потока и простого сдвига. Тогда силы и момент, действующие на неподвижную малую каплю ( $a \ll b$ ), могут быть подсчитаны из известных решений. При этом на удалении от большой сферы имеем

$$(2.4) \quad \mathbf{F}_s = 6\pi\mu a \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{T}_s = 4\pi\mu a^3 \text{rot } \mathbf{u}^0$$

Вблизи поверхности большой капли необходимо учитывать ее ограничивающее влияние. При этом нарушается равноправие направлений вдоль и поперек поверхности, так что имеем

$$(2.5) \quad \begin{aligned} F_{sr} &= 6\pi\mu a f_{sr} u_r^0, & F_{s\theta} &= 6\pi\mu a u_\theta^0 f_{s\theta} \\ T_{s\varphi} &= 8\pi\mu a^3 t_{s\varphi} G & (G &= 1/2 |\operatorname{rot} u^0|) \end{aligned}$$

где  $f_{sr}$ ,  $f_{s\theta}$ ,  $t_{s\varphi}$  — безразмерные функции расстояния между сферами.

Необходимые решения для случая произвольных сфер отсутствуют, однако известны решения для случая сферы вблизи плоскости в сдвиговом потоке [2-4]. Эти решения позволяют установить, что сила и момент, действующие на малую частицу, заметным образом отличаются от стоксовых ( $f_{sr}$ ,  $f_{s\theta}$ ,  $t_{s\varphi}$  отличаются от единицы) лишь на расстоянии нескольких радиусов малой сферы. Тем более это справедливо для движения малой сферы вблизи большой. Таким образом, достаточно рассмотреть лишь область, непосредственно примыкающую к большой частице. В этой области можно считать поток локально-плоским и воспользоваться результатами указанных выше работ, в которых приведены значения коэффициентов  $t_{s\varphi}$  и  $f_{s\theta}$  в функции от безразмерного расстояния  $x_1 = (r-b)/a$ . Фактически были использованы табличные данные для  $1 < x_1 < b/a$ , а далее для  $r_{s\theta}$  и  $t_{s\varphi}$  принимались «стоксовские» выражения. Для коэффициента  $f_{sr}$  данные отсутствуют, за исключением единственного результата [5], относящегося к силе, которая действует на малую частицу вблизи критической точки потока, обтекающего большую каплю. Из этого решения следует, как и можно было предполагать, что коэффициент  $f_{sr}$  по порядку величины близок к «стоксовскому» ( $f_{sr}=1$ ), составляя несколько единиц. При приближении к поверхности большой сферы скорость  $u_r^0$  убывает как квадрат расстояния от поверхности, так что соответствующая радиальная сила также падает. В то же время коалесценция капель за конечное время требует бесконечных сил, поэтому в дальнейшем просто пренебрежено изменением коэффициента  $f_{sr}$  в приповерхностном слое и он принят всюду равным единице, что в данном случае не может существенно сказаться на результатах.

Гидродинамические силы, связанные с собственным движением малой капли относительно большой, изучены более подробно. Результаты ранних исследований, начиная с работ [6, 7], содержатся в монографии [8]. За последнее время получен ряд новых точных и асимптотических [9, 10] решений. Изученные решения позволяют охватить все три основных типа мгновенного движения: движение вдоль линии центров [11], движение перпендикулярно к этой линии в меридиональной плоскости [9, 12] и вращение вокруг оси, перпендикулярной к меридиональной плоскости [9, 13].

Полученные численные результаты существенно дополняются асимптотическим исследованием [9, 14] движения сферы в непосредственной близости от плоскости и для случая сфер произвольного радиуса, когда просвет между сферами мал по сравнению с радиусом меньшей сферы.

Ограничиваясь движением в меридиональной плоскости, имеем для компонент гидродинамической силы

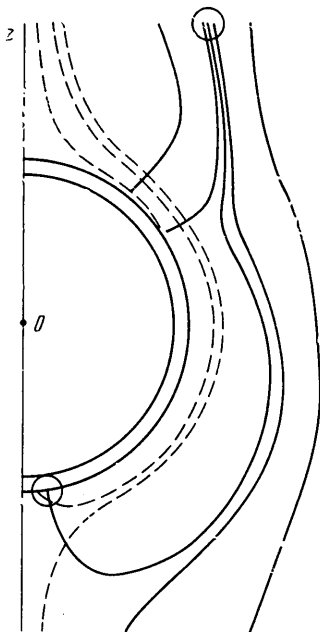
$$(2.6) \quad \begin{aligned} F_{re} &= -6\pi\mu a f_{re} V_r, & F_{\theta e} &= -6\pi\mu a f_{\theta e} V_\theta + 6\pi\mu a^2 f_{\theta e}^* \Omega \\ T_{\varphi e} &= 8\pi\mu a^2 V_\theta t_{\varphi e}^* - 8\pi\mu a^3 t_{\varphi e} \Omega \end{aligned}$$

причем на основании указанных точных и асимптотических решений для коэффициентов  $f_{re}$ ,  $f_{\theta e}$ ,  $f_{\theta e}^*$ ,  $t_{\varphi e}$ ,  $t_{\varphi e}^*$  удастся получить приближенные представления во всем требуемом диапазоне изменения расстояний между сферами  $x_1$  и отношения  $k=a/b$ .

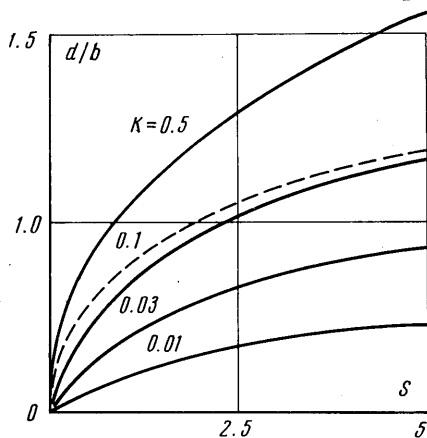
При этом существенно, что коэффициент  $f_{re}$  при  $x_1 \rightarrow 1$  имеет особенность порядка  $1/(x_1-1)$ , а коэффициенты  $t_{\varphi_e}, t_{\varphi_e}^*, f_{\theta_e}, f_{\theta_e}^*$  — особенность вида  $\ln(x_1-1)$ . При  $x_1 \rightarrow \infty$ , очевидно,  $f_{re}, f_{r\theta}, t_{\varphi_e} \rightarrow 1, f_{\theta_e}^*, f_{\varphi_e}^* \rightarrow 0$ .

Наконец, отметим, что в силу общего принципа Бреннера [8] между  $t_{\varphi_e}^*$  и  $f_{\theta_e}^*$  имеется однозначная связь:  $3f_{\theta_e}^* = 4t_{\varphi_e}^*$ .

**3. Электрические силы.** Полагая, что капли являются идеально проводящими, а дисперсионная среда непроводящей, будем учитывать силы электростатического взаимодействия капль, вызванного их поляризацией во внешнем электрическом поле напряженности  $E$ . Соответствующая задача решена в [15] и независимо и с более подробным расчетом. Предположим, что линия центров



Фиг. 2



Фиг. 3

сфер, вектор  $E$  и скорость  $U$  лежат в одной плоскости ( $\varphi = \pi/2$ ). Обозначая через  $\psi$  угол между вектором  $E$  и линией центров, имеем для компонент электрической силы

$$(3.1) \quad F_r = \varepsilon a^2 E^2 (F_1 \cos^2 \psi - F_2 \sin^2 \psi), \quad F_\theta = -\varepsilon a^2 E^2 F_3 \sin 2\psi$$

Здесь  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость дисперсионной среды,  $F_1, F_2, F_3$  — функции безразмерного расстояния  $x_1$  и отношения  $k$ , представленные в [15] в виде рядов и рассчитанные в широком диапазоне значений аргументов<sup>1</sup>. Момент электрических сил, как легко показать, равен нулю.

**4. Движение в меридиональной плоскости. Результаты расчетов.** Переходя в (1.1) к безразмерным переменным по формулам

$$u = \frac{u_r^0}{U}, \quad v = \frac{u_\theta^0}{U}, \quad x_1 = \frac{r-b}{a}, \quad \tau = \frac{Ut}{a}, \quad \omega = \frac{a\Omega}{U}$$

$$k = \frac{a}{b}, \quad g = \frac{aG}{U}, \quad S = \frac{\varepsilon a^2 E^2}{6\pi\mu a U}$$

и полагая  $\psi = \pi - \theta - \theta_0$ , получим

$$(4.1) \quad f_{sr}u - f_{re} \frac{dx_1}{d\tau} - S [F_1 \cos^2(\theta + \theta_0) - F_2 \sin^2(\theta + \theta_0)] = 0$$

<sup>1</sup> Лапига Е. Я. Исследование влияния электрического поля на процесс коалесценции капль. Дипломная работа, МФТИ, 1971.

$$(4.2) \quad gf_{s\theta}v - f_{\theta e} \left( x_1 + \frac{1}{k} \right) \frac{d\theta}{d\tau} + \omega f_{\theta e}^* - SF_3 \sin 2(\theta + \theta_0) = 0$$

$$(4.3) \quad t_{\varphi e}^* \frac{d\theta}{d\tau} - \omega t_{\varphi e} + gt_{s\varphi} = 0$$

Исключив из (4.2), (4.3)  $\omega$ , найдем

$$(4.4) \quad \frac{dx_1}{d\tau} = \frac{1}{f_{re}} [f_{s\tau}u - S(F_1 \cos^2(\theta + \theta_0) - F_2 \sin^2(\theta + \theta_0))]$$

$$(4.5) \quad \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{gf_{s\theta}v - SR_3 \sin 2(\theta + \theta_0) + gt_{\varphi e}f_{\theta e}^*}{(x_1 + 1/k)(f_{\theta e}t_{\varphi e} - f_{\theta e}^*t_{\varphi e}^*)}$$

$$x_1(0) = x_{10}, \quad \theta(0) = \theta_1$$

Входящие в уравнения (4.4) и (4.5) коэффициенты при гидродинамических силах  $f_{re}$ ,  $f_{\theta e}$ ,  $f_{\theta e}^*$ ,  $t_{\varphi e}$ ,  $t_{\varphi e}^*$  выбирались следующим образом. В области  $1 < x_1 < 1.5$  для них брались близкие асимптотические выражения

$$f_{\theta e} \sim -\frac{2}{15} \frac{2+k+2k^2}{(1+k)^3} \ln(x_1-1) + 0.959$$

$$f_{\theta e}^* \sim -\frac{2}{15} \frac{1+4k}{(1+k)^2} \ln(x_1-1) - 0.2526$$

$$t_{\varphi e}^* \sim -\frac{1}{10} \frac{1+4k}{(1+k)^2} \ln(x_1-1) + 0.29$$

$$t_{\varphi e} \sim -\frac{2}{5} \frac{1}{(1+k)^2} \ln(x_1-1) + 0.3817$$

$$f_{re} \sim \frac{1}{(1+k)^2(x_1-1)} - \frac{1+7k+k^2}{5(1+k)} \ln(x_1-1) + 0.97$$

В области  $x_1 \geq 1/k$  для значений  $k \ll 1$  справедливы следующие «дальние» асимптотические выражения:

$$f_{\theta e} \sim \left( 1 - \frac{9}{16} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{8} \frac{1}{x_1^3} \right)^{-1}, \quad f_{\theta e}^* \sim \frac{1}{8x_1^4}, \quad t_{\varphi e}^* \sim \frac{3}{32x_1^4}$$

$$t_{\varphi e} \sim 1 + \frac{5}{16x_1}, \quad f_{re} \sim 1 + 1.125 \frac{1}{x_1} + 1.266 \frac{1}{x_1^2}$$

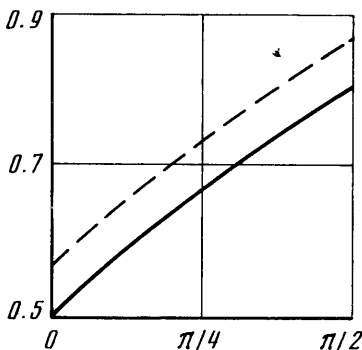
и для произвольных значений  $k \leq 1$  использовались представления

$$f_{re} \sim \frac{1}{1 - 2.25k(kx_1 + 1)^{-2}}, \quad f_{\theta e} \sim \frac{1}{1 - 0.56k(kx_1 + 1)^{-2}}$$

$$t_{\varphi e}^* \sim \frac{0.56k^2(kx_1 + 1)^{-3}}{1 - 0.56k(kx_1 + 1)^{-2}}$$

Для произвольных значений  $k \leq 1$  выражения для дальних асимптотик для остальных коэффициентов отсутствуют. Поэтому в остальных областях строились кусочно-линейные аппроксимации на основе табличных данных. Значения градиента скорости в сдвиговом потоке брались равными  $0.5 |\operatorname{rot} u^0/U|$ , а значения коэффициентов  $f_{s\tau}$ ,  $t_{s\varphi}$ ,  $f_{s\theta}$  — равными 1, поскольку, как отмечалось ранее, эти коэффициенты мало отличаются от единицы и остаются конечными при  $x_1 \rightarrow 1$ . Для  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  брались точные аналитические выражения.

Уравнения (4.4), (4.5) интегрировались численно на ЭВМ БЭСМ-3М. В результате определялись траектории частиц и безразмерный радиус сечения захвата  $d/b$  в зависимости от двух параметров  $k$  и  $S$ . На фиг. 2 представлены характерные траектории для случаев  $\theta_0=0$ ,  $k=0.1$ ,  $S=5$  и  $S=0.1$  (пунктирные линии). Заметим, что с увеличением  $S$  чувствительность поведения траекторий к незначительному изменению  $\theta_1$  увеличивается.



Фиг. 4

При  $S \geq 1$  отличие меньше 10%. С уменьшением  $S$  отличие увеличивается. Это обстоятельство объясняется тем, что при малых  $S$  частица  $S_a$  длительное время движется в вязком слое ( $1 < x_1 < 2$ ) вдоль поверхности  $S_b$ , в то время как при  $S \geq 1$  частица  $S_a$  проходит вязкий слой почти под прямым углом к поверхности  $S_b$  (фиг. 2). Из этого можно сделать вывод, что расчет сечения захвата при  $S \geq 1$  можно проводить на основе приближенных уравнений, что значительно облегчает решение задачи.

Зависимость  $d/b$  от  $\theta_0$  для  $k=0.1$  и  $S=1$ , найденная из точных уравнений (4.4), (4.5) (сплошная линия) и из приближенных (пунктир), представлена на фиг. 4.

**5. Трехмерный случай. Упрощенные уравнения.** Рассмотрим теперь трехмерный случай ( $\theta_0 \neq 0$ ,  $\varphi \neq \pi/2$ ). Пренебрежем сопротивлением вязкого слоя, что справедливо, как уже отмечено, для  $S \geq 1$ . Систему координат  $(x, y, z)$  выберем таким образом, чтобы векторы  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{E}$  лежали в плоскости  $yz$  (фиг. 1). Сила электрического взаимодействия частиц  $S_a$  и  $S_b$  имеет две составляющие:

$$\mathbf{F}_r = -(F_1 \cos^2 \psi - F_2 \sin^2 \psi) \mathbf{e}_r \quad \mathbf{F}_\psi = -F_3 \sin 2\psi \mathbf{e}_\psi,$$

где  $\mathbf{e}_\psi$  — единичный вектор, лежащий в плоскости  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{E}$  и перпендикулярный  $\mathbf{r}$ . Перейдя к сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$ , после несложных преобразований получим следующие уравнения движения частицы:

$$(5.1) \quad dx_1/d\tau = u_r - S(F_1 \cos^2 \psi - F_2 \sin^2 \psi)$$

$$(5.2) \quad \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{u_\theta}{x_1 + 1/k} - \frac{SF_3}{(x_1 + 1/k) \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}} (\alpha \cos \theta \cos \varphi + \beta \cos \theta \sin \varphi - \gamma \sin \theta)$$

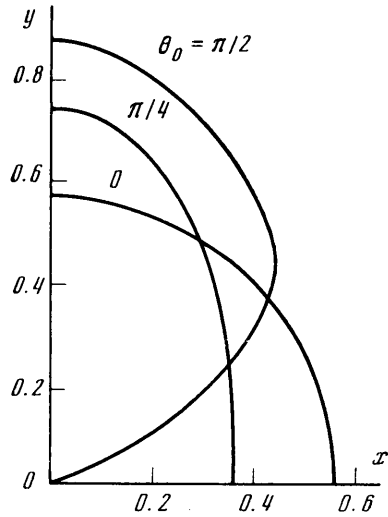
$$(5.3) \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{SF_3 \sin 2\psi (\beta \cos \varphi - \alpha \sin \varphi)}{(x_1 + 1/k) \sin \theta \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}}$$

$$\cos \psi = \cos \theta_0 \cos \theta - \sin \theta_0 \sin \theta \sin \varphi$$

$$\begin{aligned} \alpha &= xz \cos \theta_0 - xy \sin \theta_0, & \beta &= x^2 \sin \theta_0 + yz \cos \theta_0 + z^2 \sin \theta_0 \\ \gamma &= -x^2 \cos \theta_0 - y^2 \cos \theta_0 - yz \sin \theta_0 \\ x &= (x_1 + 1/k) \sin \theta \cos \varphi, & y &= (x_1 + 1/k) \sin \theta \sin \varphi \\ z &= (x_1 + 1/k) \cos \varphi \end{aligned}$$

Вид сечений, полученных численным интегрированием уравнений (5.1)–(5.3), для различных углов  $\theta_0$  представлен на фиг. 5. Площади сечений, соответствующих различным значениям  $\theta_0$ , отличаются незначительно (наибольшее отличие составляет 10%), из чего можно сделать вывод, что сечение захвата практически не зависит от ориентации электрического поля.

6. Кинетика коалесценции в бидисперсной эмульсии. Полученное решение можно применить в задаче о захвате, обусловленном разностью скоростей большой и маленькой частиц. В таком случае можно считать большую частицу неподвижной, а поток – набегающим на нее со скоростью  $U = 2\Delta\rho g(b^2 - a^2)/9\mu$  на бесконечности, где  $\Delta\rho$  – разность плотностей частицы и жидкости,  $g$  – ускорение силы тяжести. В таком случае приходим к уравнениям (4.4), (4.5), в которых следует положить  $S = 3\epsilon E^2 k^2 / 4\pi \Delta\rho g a (1 - k^2)$ . Используя полученные результаты, рассмотрим бидисперсную систему мелких и крупных капель во внешнем продольном однородном электрическом поле, в котором гравитационное осаждение капель сопровождается коалесценцией мелких капель с крупными. Пусть  $n_a, n_b$  – число мелких и крупных капель в единичном объеме эмульсии,  $V_a, V_b$  – их объемы,  $v_a, v_b$  – стоксовы скорости оседания этих капель. Будем предполагать, что в процессе коалесценции система остается бидисперсной и значения  $n_b$  и  $V_a$  сохраняются. Кроме того, будем считать что каждое столкновение капель приводит к их слиянию.



Фиг. 5

Увеличение объема крупных капель в результате захвата с учетом сделанных предположений описывается следующим уравнением:

$$(6.1) \quad \begin{aligned} dV_b/dt &= 4/3 \pi a^3 n_a (v_b - v_a) \sigma, \\ V_b(0) &= V_{b0} \end{aligned}$$

Воспользуемся еще условием сохранения объема дисперсной фазы

$$(6.2) \quad V_a(n_{a0} - n_a) = (V_b - V_{b0})n_b$$

где  $n_{a0}$  – число мелких капель в начальный момент времени.

Подставим в (6.1) выражение для  $\sigma$ , полученное аппроксимацией данных, представленных на фиг. 3,

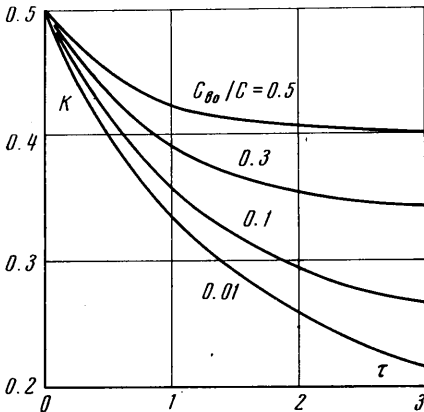
$$\sigma \approx 0.57 \pi b^2 S (1 - \exp(-5.75k))$$

Разделив левую и правую части на  $V_a$ , воспользовавшись соотношением  $V_a/V_b = k^3$

и уравнением (6.2), получим уравнение, описывающее изменение  $k$

$$(6.3) \quad \frac{dk}{d\tau} = -k^2 [1 - \exp(-5.75k)] \left[ 1 - \frac{c_{b0}}{c} \left( \frac{k_0}{k} \right)^3 \right]$$

$$(\tau = 0.024 c \epsilon E^2 t / \pi \mu)$$



Фиг. 6

где  $c_{b0}$ ,  $c$  — объемные концентрации крупных капель в начальный момент и всей дисперсной фазы соответственно.

Зависимости  $k(\tau)$  для случая  $k_0=0.5$  и различных значений  $c_{b0}/c$ , определенные из (6.3), представлены на фиг. 6. Зависимости  $k(\tau)$  для значений  $k_0 < 0.5$  можно получить сдвигив начало отсчета по  $\tau$ . С увеличением  $\tau$  значения  $k$  уменьшаются и при  $\tau \rightarrow \infty$  стремятся к  $k_0(c_{b0}/c)^{1/2}$ . Характерное время выхода  $k$  на стационарное значение  $k_\infty$  увеличивается с уменьшением относительной концентрации больших капель.

Поступила 21 VII 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
2. Goldman A. J., Cox R. G., Brenner H. Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall, pt 2. Couette flow. Chem. Engng Sci., 1967, vol. 22, p. 653.
3. O'Neill M. E. A sphere in contact with plane wall in a slow linear shear field. Chem. Engng Sci., 1970, vol. 23, p. 1293.
4. Lin C. J., Lee K. J., Sather N. R. Slow motion of two spheres in a shear field. J. Fluid Mech., 1970, vol. 43, p. 35.
5. Goren S. L. The normal force exerted by creeping flow on a small sphere touching a plane. J. Fluid Mech., 1970, vol. 44, p. 619.
6. Jeffrey G. B. On the steady rotation of a solid of revolution in a viscous fluid. Proc. London Math. Soc. (Ser 2), 1915, vol. 14, p. 327.
7. Stimson M., Jeffrey G. B. The motion of two spheres in a viscous fluid. Proc. Roy. Soc., 1926, A vol. 114, p. 110.
8. Happel J., Brenner H. Low Reynolds number hydrodynamics. Englewood — Cliffs, N. Y., Prentice — Hall, 1965.
9. O'Neill M. E., Majumdar S. R. Asymmetrical slow viscous fluid motions caused by the translation or rotation of two spheres, pt 1. The determination of exact solutions for any values of ratio of radii and separation parametres, pt 2. Asymptotic forms of the solutions when the minimum clearance between the spheres approaches zero. ZAMP, 1970, vol. 21, p. 164.
10. Cooley M. D. A., O'Neill M. E. On the slow motion generated in a viscous fluid by the approach of a sphere to a plane wall or stationary sphere. Mathematika, 1969, vol. 16, p. 37.
11. Maude A. D. End effects in a falling — sphere viscosimetre. J. Appl. Phys., 1961, vol. 12, p. 293.
12. O'Neill M. E. A slow motion of a viscous liquid caused by a slowly moving solid sphere. Mathematika, 1964, vol. 11, p. 67.
13. Dean W. R., O'Neill M. E. A slow motion of viscous liquid caused by the rotation of a solid sphere. Mathematika, 1963, vol. 10, p. 13.
14. Goldman A. J., Cox R. G., Brenner H. Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall, pt 1. Motion through a quiescent liquid. Chem. Engng Sci., 1967, vol. 22, p. 637.
15. Davis M. H. Two charged spherical conductors in a uniform electric field: forces and field strength. Quart J. Mech. Appl. Math., 1964, vol. 17, p. 499.