

УДК 532.526.2 : 536.423

ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТИ

А. А. ХАРИТОНОВ

(Днепропетровск)

Рассматривается ламинарный пограничный слой на испаряющейся поверхности жидкого водорода, обтекаемой молекулярным кислородом.

Давлению p в пограничном слое соответствует температура насыщения кислорода T_0 , которая ниже температуры набегающего потока T_∞ , но выше температуры поверхности жидкого водорода. При таких условиях внутри пограничного слоя происходит конденсация кислорода в объеме, которая приводит к образованию капель жидкого кислорода различного размера.

В работе предполагается, что при конденсации газа в объеме образуются капли одного размера. Капли выбираемого среднего размера рассматриваются как молекулы тяжелого газа. «Газ капель» является третьей компонентой, которая присутствует в пограничном слое.

1. Система уравнений ламинарного пограничного слоя в окрестности критической точки плоского затупленного тела для многокомпонентной смеси газов, в которой протекают химические реакции, имеет вид

уравнение неразрывности для смеси

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$

уравнение сохранения количества движения

$$(1.2) \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

уравнение энергии

$$(1.3) \quad c_p \left(\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \sum_{i=1}^3 c_{p_i} \rho c_i V_i \frac{\partial T}{\partial y} - \sum_{i=1}^3 h_i \dot{\omega}_i$$

уравнение неразрывности для каждой компоненты

$$(1.4) \quad \rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y} (\rho c_i V_i) + \dot{\omega}_i$$

уравнение состояния

$$(1.5) \quad p = \rho \frac{R}{M} T, \quad M = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{c_i}{M_i} \right)^{-1}$$

Кроме того, имеют место следующие соотношения:

$$\sum_{i=1}^3 c_i = 1, \quad \sum_{i=1}^3 \dot{\omega}_i = 0, \quad c_p = \sum_{i=1}^3 c_i c_{p_i}$$

Здесь x — координата, направленная вдоль поверхности тела, y — координата по нормали к поверхности, u и v — составляющие скорости в на-

правления этих координат, p — давление, V_i — скорость диффузии i -й компоненты, ρ , T , μ , c_p и λ — соответственно плотность, температура, вязкость, теплоемкость и теплопроводность смеси, c_i — весовая концентрация i -й компоненты, c_p^i — теплоемкость i -й компоненты, h_i — энтальпия i -й компоненты, R — универсальная газовая постоянная, M — молекулярный вес смеси, M_i — молекулярный вес i -й компоненты, ω_i — массовая скорость образования i -й компоненты.

Индексом 1 в уравнениях пограничного слоя (1.1) — (1.5) и далее будем обозначать параметры молекулярного водорода, индексом 2 — параметры капель жидкого кислорода, а индексом 3 — параметры кислорода.

При решении системы уравнений пограничного слоя принимается: 1) пленка жидкого водорода на теле неподвижна и имеет постоянную толщину; 2) температура поверхности жидкого водорода постоянна и равна температуре кипения при данном давлении p в пограничном слое; 3) весь диффундирующий к поверхности жидкого водорода молекулярный кислород конденсируется на ней; 4) поверхность жидкого водорода считается непроницаемой для молекул кислорода, так как кислород практически не растворяется в жидком водороде; 5) все капли жидкого кислорода, подошедшие к поверхности жидкого водорода, осаждаются на ней; 6) лучистый перенос энергии и термодиффузия не учитываются; 7) водород не вступает в химические реакции в пограничном слое.

Граничные условия на внешней границе пограничного слоя (при $y = \infty$)

$$(1.6) \quad u = u_\infty, \quad T = T_\infty, \quad c_{1\infty} = c_{2\infty} = 0$$

на поверхности жидкого водорода (при $y = 0$)

$$(1.7) \quad u = 0, \quad T = T_w, \quad c_{1w} = 1, \quad c_{2w} = 0$$

Чтобы замкнуть систему граничных условий на поверхности жидкого водорода, следует добавить уравнение баланса энергии

$$(1.8) \quad \lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w - \sum_{i=1}^3 \rho_w (c_i V_i h_i)_w - \rho_w (c_3 V_3)_w L_3 - (\rho v)_w h_w + (\rho v)_w h_{0w} = 0, \quad h = \sum_{i=1}^3 c_i h_i$$

Здесь h — энтальпия смеси, L_3 — скрытая теплота конденсации кислорода, h_0 — энтальпия жидкого водорода.

Скрытая теплота испарения жидкого водорода равна

$$L_1 = h_{1w} - h_{0w}$$

Тогда уравнение (1.8) принимает вид

$$\lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w - \sum_{i=1}^3 \rho_w (c_i V_i h_i)_w - \rho_w (c_3 V_3)_w L_3 - (\rho v)_w L_1 = 0$$

В граничных условиях индексом w отмечены значения параметров на поверхности жидкого водорода, а индексом ∞ — на внешней границе пограничного слоя.

Коэффициенты вязкости и теплопроводности смеси в уравнениях пограничного слоя вычисляются по формулам, приведенным в [1].

Диффузионные потоки рассчитываются по приближенной формуле Уилке

$$c_i V_i = -D_i \partial c_i / \partial y$$

Коэффициенты D_i определяются по осредненной формуле [2]

$$D_i = (1 - \bar{x}_i) \left(\sum_{j \neq i} \frac{\bar{x}_j}{D_{ij}} \right)^{-1}$$

Здесь D_{ij} — коэффициенты бинарной диффузии, \bar{x}_i — среднее арифметическое значение молярных концентраций i -й компоненты, вычисленное по значениям на внешней и внутренней границах пограничного слоя.

Свойства отдельных компонент рассчитываются на основании модели твердых сфер. Теплоемкости отдельных компонент принимаются постоянными

$$c_{p1} = 5, \quad c_{p2} = 4R, \quad c_{p3} = 7.015$$

где c_{p_i} в кал/моль·град.

Энтальпии отдельных компонент определяются выражениями

$$h_1 = c_{p1} T, \quad h_2 = c_{p2} T - L_3, \quad h_3 = c_{p3} T$$

2. После введения переменных Дородницына

$$x = x, \quad Y = \int_0^y \rho dy, \quad V = \rho v + u \frac{\partial Y}{\partial x}$$

и использования преобразований подобия

$$x = x, \quad \eta = Y, \quad \psi = x f(\eta)$$

где $f' = u/x$, а ψ — безразмерная функция тока, система уравнений (1.1) — (1.5) преобразуется к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $f(\eta)$, $c_1(\eta)$, $c_2(\eta)$ и $\theta(\eta)$

$$(2.1) \quad (\mu \rho f'')' + f f'' - f'^2 = -1/\rho$$

$$(2.2) \quad (\rho^2 D_1 c_1')' + f c_1' = 0$$

$$(2.3) \quad (\rho^2 D_2 c_2')' + f c_2' + \dot{\omega}_2 (L/\rho \rho_\infty u_\infty) = 0$$

$$(2.4) \quad (\lambda \rho \theta')' \frac{1}{\text{Pr}_\infty} + c_p f \theta' + \rho^2 \theta' \left[c_1' \left(D_1 \frac{c_{p1}}{c_{p_\infty}} - D_3 \frac{c_{p3}}{c_{p_\infty}} \right) + \right. \\ \left. + c_2' \left(D_2 \frac{c_{p2}}{c_{p_\infty}} - D_3 \frac{c_{p3}}{c_{p_\infty}} \right) \right] + \dot{\omega}_2 (h_3 - h_2) \frac{L}{c_{p_\infty} T_0 \rho \rho_\infty u_\infty} = 0$$

Здесь L — характерный размер обтекаемого тела, Pr_∞ — число Прандтля, $\theta = T/T_0$ — безразмерная температура.

Граничные условия примут вид

$$(2.5) \quad f_w = - \frac{c_{p_\infty} T_0}{L_1} \left\{ \frac{\rho_w \lambda_w}{\text{Pr}_\infty} \theta_w' + \theta_w \rho_w^2 c_{1w}' \left(D_{1w} \frac{c_{p1}}{c_{p_\infty}} - D_{3w} \frac{c_{p3}}{c_{p_\infty}} - \right. \right. \\ \left. \left. - D_{3w} \frac{L_3}{\theta_w c_{p_\infty} T_0} \right) + \theta_w \rho_w^2 c_{2w}' \left[D_{2w} \frac{c_{p2}}{c_{p_\infty}} - D_{3w} \frac{c_{p3}}{c_{p_\infty}} - (D_2 + D_3)_w \frac{L_3}{\theta_w c_{p_\infty} T_0} \right] \right\}$$

$$c_1=1, \quad c_2=0, \quad \theta=\theta_w, \quad f'=0 \quad (\eta=0)$$

$$c_1=0, \quad c_2=0, \quad \theta=\theta_\infty, \quad f'=1 \quad (\eta=\infty)$$

В уравнениях и граничных условиях штрихи обозначают дифференцирование по η .

Рассматривая процесс образования капель подобно химической реакции, определим скорость образования капель жидкого кислорода следующим образом.

Из предположения, что водород не реагирует в пограничном слое, следует, что $\dot{\omega}_1=0$. Тогда

$$\dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_3 = 0$$

В свою очередь

$$\dot{\omega}_3 = M_3(dN_3/dt)$$

Здесь dN_3/dt — скорость конденсации, N_3 — число молекул кислорода в единице объема.

Скорость конденсации определяется по формуле, предложенной Я. И. Френкелем [3]

$$-\frac{dN_3}{dt} = N_3 \frac{p}{kT} \frac{4r^{*3}}{3} \left(\frac{2\pi\sigma}{m}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{4\pi\sigma r^{*2}}{3kT}\right) \left(r^* = \frac{2\sigma V_0}{\kappa(1-T/T_0)}\right)$$

Здесь r^* — критический радиус капли, T_0 — температура насыщения кислорода, соответствующая давлению p в пограничном слое, T — фактическая температура, V_0 — объем молекулы кислорода в жидкой фазе, κ — скрытая теплота испарения на одну молекулу, σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкого кислорода, m — масса молекулы кислорода, k — постоянная Больцмана.

Окончательно массовая скорость образования капель жидкого кислорода определяется по формуле

$$\dot{\omega}_2 = B\rho\rho_\infty \frac{(1-c_1-c_2)}{\theta(1-\theta)^3} \exp\left(-\frac{a}{\theta(1-\theta)^2}\right)$$

$$\left(B = \frac{p}{kT_0} \frac{32\sigma^3 V_0^3}{3\kappa^3} \left(\frac{2\pi\sigma}{m}\right)^{1/2}, \quad a = \frac{16\pi\sigma^3 V_0^2}{3kT_0\kappa^2}\right)$$

Рассмотрим выражение

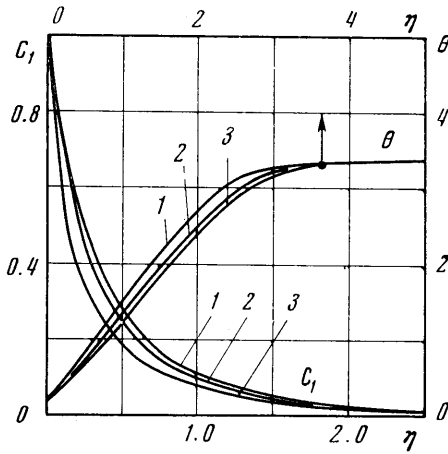
$$\frac{\dot{\omega}_2}{\rho\rho_\infty} \left(\frac{L}{u_\infty}\right) = \left(\frac{L}{u_\infty}\right) B \frac{(1-c_1-c_2)}{\theta(1-\theta)^3} \exp\left(-\frac{a}{\theta(1-\theta)^2}\right)$$

Коэффициент $(L/u_\infty)B$ назовем параметром скорости конденсации K_1

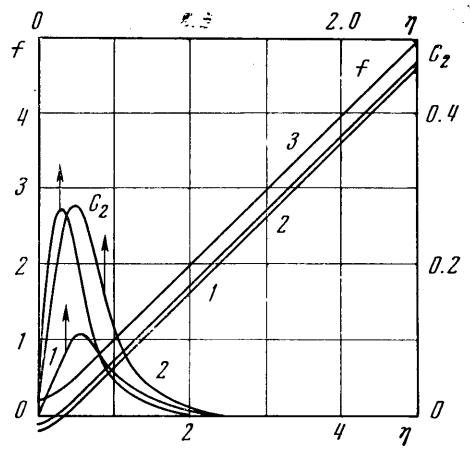
$$K_1 = \left(\frac{L}{u_\infty}\right) \frac{p}{kT_0} \frac{32\sigma^3 V_0^3}{3\kappa^3} \left(\frac{2\pi\sigma}{m}\right)^{1/2}$$

Величина B пропорциональна частоте столкновения отдельных молекул кислорода с поверхностью образовавшихся капель в единицу времени, т. е. обратно пропорциональна времени жизни молекулы при конденсации.

Параметр скорости конденсации K_1 можно рассматривать как отношение характерного времени нахождения частицы в потоке (L/u_∞) к характерному времени протекания процесса конденсации.



Фиг. 1



Фиг. 2

Случай $K_1=0$ соответствует пограничному слою, в котором конденсация в объеме не происходит. При $0 < K_1 < \infty$ имеет место неравновесная конденсация кислорода в объеме.

3. Система уравнений (2.1) — (2.4) с граничными условиями (2.5) решалась численно методом последовательных приближений.

Расчеты проводились при следующих значениях параметров:

$$p=1 \text{ атм}, \quad T_\infty=300^\circ \text{ К},$$

$$T_0=90^\circ \text{ К}, \quad T_w=20.4^\circ \text{ К},$$

$$V_0=4.66 \cdot 10^{-23} \text{ см}^3,$$

$$\kappa=1.14 \cdot 10^{-13} \text{ эрг},$$

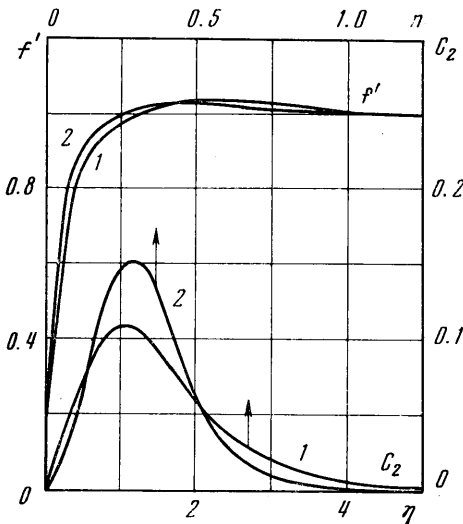
$$m=5.3 \cdot 10^{-23} \text{ г}, \quad \sigma=13.1 \text{ дин/см}.$$

Молекулярный вес каплей M_2 принимался равным 320 или 640, а диаметр столкновения $\sigma_2=5.4$ или 9.8 \AA соответственно.

В расчетах изменялись значения параметра скорости конденсации K_1 и молекулярный вес каплей M_2 .

На фиг. 1 приведены зависимости $c_1(\eta)$ и $\theta(\eta)$ при $K_1=0, 5, 7$ и $M_2=320$ (кривые 1, 2, 3 соответственно). На фиг. 2 представлены профили $f(\eta)$ при $K_1=0, 5, 7$ и $M_2=320$ (кривые 1, 2, 3 соответственно) и профили $c_2(\eta)$ при $K_1=1, 5, 7$ и $M_2=320$ (кривые 1, 2, 3 соответственно). Зависимости $f'(\eta)$, полученные в этих расчетах, приведены на фиг. 3 (кривая 1 — $K_1=0$, кривая 2 — $K_1=7$).

На фиг. 3 приведены профили концентрации каплей жидкого кислорода при $K_1=1$ (кривая 1 — $M_2=320$, кривая 2 — $M_2=640$). Остальные резуль-



Фиг. 3

таты расчетов при $K_1=1$ незначительно отличаются от результатов для случая $K_1=0$ и в работе не приводятся.

Скорость испарения водорода связана с функцией f_w зависимостью

$$f_w = - \frac{\rho_w v_w}{\rho_\infty u_\infty} \sqrt{\text{Re}} \quad \left(\text{Re} = \frac{\rho_\infty u_\infty L}{\mu_\infty} \right)$$

Значения интенсивности испарения f_w , полученные в расчетах, приводятся ниже

K_1	0	1	5	7
f_w	-0.1609	-0.1672	-0.1031	0.1774

Расчеты показывают, что величина параметра K_1 влияет не только на процесс конденсации кислорода в объеме, но и на скорость испарения жидкого водорода.

При $K_1 \geq 10$ итерационный процесс решения системы уравнений (2.1)–(2.4) расходился.

В другой серии расчетов при $K_1=0$ изменялись значения температуры на внешней границе пограничного слоя.

В этих расчетах было получено, что интенсивность испарения f_w зависит линейно от температуры набегающего потока T_∞ , а скорость $u/x = = f'(\eta)$ внутри пограничного слоя имеет значения большие, чем скорость вне пограничного слоя.

Автор благодарит Г. И. Петрова за внимание и руководство работой.

Поступила 4 III 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Булатская Т. Ф. Ламинарный пограничный слой в многокомпонентной смеси газов на боковой поверхности тела. Сб. работ ВЦ МГУ «Численные методы в газовой динамике», вып. 4. М., Изд-во МГУ, 1965.
2. Карасев А. Б. Решение уравнений пограничного слоя в критической точке для тройной смеси. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1961, № 6.
3. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкостей. М.–Л., Изд-во АН СССР, 1945.