УДК 532.517.4

# О КИНЕМАТИКЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Ю. Т. БОРЩЕВСКИЙ, Э. М. ЛИТВИНЕНКО, В. Г. НАХАЙЧУК

(*Киев*)

В статье сделана попытка описать в рамках уравнений Навье – Стокса поле мгновенных скоростей жидкости в пристеночной области турбулентного потока. Принимается, что скорости жидкости определяются полем вихрей, возникающих в областях выбросов под действием импульсов давления в пристеночной области.

1. Пусть вдоль оси $x_1$, совпадающей с горизонтальной поверхностью (ось $x_3$ направлена вертикально), движется равномерный несжимаемый турбулентный поток. Локальные выбросы масс жидкости из пристеночной области исследуемого течения, описанные в работах [1–3], согласно [4] будем рассматривать как движение жидкости, происходящее под действием «шлепков» по ограниченным площадкам $\sigma_n$ ($n=1, 2, \ldots, \infty$), над которыми образуются своеобразные «вихревые объемы» (фиг. 1). Площадки $\sigma_n$ будем считать поверхностями разрыва горизонтальных компонент скорости. Для описания кинематики жидкости используем известные уравнения пограничного слоя

$$\frac{\omega\nu}{v_*^2}\frac{\partial v_i'}{\partial\tau'}+v_k'\frac{\partial v_i'}{\partial x_k'}=-\frac{\partial p'}{\partial x_i'}+\nabla^2 v_i', \quad \partial v_k'/\partial x_k'=0 \qquad (i,k=1,2,3) \tag{1.1}$$

$$\left(v_k'=\frac{v_k}{v_*},\ x_k'=\frac{x_k v_*}{\nu},\ p'=\frac{p}{\rho v_*^2}\right)$$

где $v'_k$ — безразмерная компонента скорости, направленная вдоль $x_k$; $x'_k$ — безразмерная координата; $p'$ — безразмерное давление; $v_*$ — динамическая скорость; $\rho$ — массовая плотность; $\nu$ — кинематическая вязкость; $\omega$ — угловая частота; $\tau'=\tau\omega$ — безразмерное время.

Рассматривая движение жидкости по обе стороны площадки $\sigma_1$, возникшей в результате шлепка в момент $\tau'=\tau$ (знак штрих у безразмерных величин далее опускаем), запишем (1.1) для $x_3^*+0$ и $x_3^*-0$, затем из первого уравнения вычтем второе. Так как

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x_1}\right|_{x_3^*+0}=\left.\frac{\partial p}{\partial x_1}\right|_{x_3^*-0}$$

то при условии, что на площадке $\sigma_1$

$$\frac{\partial\Delta v_1}{\partial x_1}\sim\frac{\partial\Delta v_1}{\partial x_2}\sim 0 \tag{1.2}$$

имеем

$$\frac{\omega\nu}{v_*^2}\frac{\partial\Delta v_1}{\partial\tau}+v_3\frac{\partial\Delta v_1}{\partial x_3}=\frac{\partial^2\Delta v_1}{\partial x_3^2} \tag{1.3}$$

$$(\Delta v_1=v_1(\tau, x_1, x_2, x_3^*+0)-v_1(\tau, x_1, x_2, x_3^*-0))$$

где $\Delta v_1$ — тангенциальный разрыв на $\sigma_1$ продольной скорости жидкости.

В случае справедливости (1.2) в интервале $x_3^*<x_3<\infty$ уравнение (1.3) определяет напряженность только тех вихрей, которые распределены в объеме жидкости при $(x_1, x_2, \tau)\in\bar{\sigma}_1$ (здесь $\bar{\sigma}_1$ — площадка $\sigma_1$ с ее границей). При этом в (1.3) исключается влияние на движение всех других вихрей, распределенных над всеми соседними площадками $\sigma_n$ при $(x_1, x_2, \tau)\in C\bar{\sigma}_1$, где $C\bar{\sigma}_1$ — дополнение $\bar{\sigma}_1$ до всей области течения.

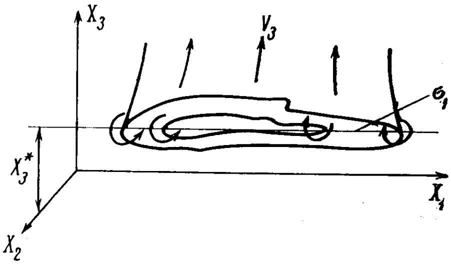
2. Полученный результат позволяет представить поле продольных скоростей при $(x_1, x_2, \tau)\in\bar{\sigma}_1$ в виде

$$v_1=\Delta v_1(x_1, x_2, x_3, \tau)+\Delta v_\omega(x_1, x_2, x_3, \tau), \tag{2.1}$$

где $\Delta v_1$ — вклад, вносимый непосредственно вихрями, которые распределены над $\bar{\sigma}_1$; $\Delta v_\omega$ — скорости, индуцируемые в рассматриваемой точке распределенными вихрями (или особенностями) в объемах всех остальных выбросов. До возникновения шлепков (т. е. выбросов) скорость жидкости в пристеночном слое изменялась бы по линейному закону, т. е.

$$v_1=kx_3,$$

где $k$ — некоторая константа. Поэтому введем предположение, что при шлепке на произвольной площадке $\sigma_1$ возникает разрыв продольной скорости $v_1$ интенсивностью



Фиг. 1

$$\Delta v_1(x_3^*)=kx_3^*-\Delta v_\omega(x_3^*),$$

т. е. будем считать, что плотность возникающих при шлепке вихрей зависит от вклада $\Delta v_\omega$, который вносят все выбросы, существующие при $(x_1, x_2, \tau)\in C\bar{\sigma}_1$ к данному моменту времени. Тогда выражение для $\Delta v_1(x_3)$ можно искать в виде

$$\Delta v_1(x_3)=\Delta v_1(x_3^*)\varphi_0(x_3), \tag{2.2}$$

где $\varphi_0(x_3)$ — некоторая функция, а формулу (2.1) представить в виде

$$v_1(x_3)=[kx_3^*-\Delta v_\omega(x_3^*)]\varphi_0(x_3)+\Delta v_\omega(x_3). \tag{2.3}$$

Если при удалении от площадки $\sigma_1$ значения $\Delta v_1$ уменьшаются из-за влияния вязкости, то граничные условия для (1.3) формулируются следующим образом:

$$\begin{aligned} &\Delta v_1(x_1, x_2, x_3, \tau)=\Delta v_1(x_1, x_2, x_3^*, \tau) \qquad (x_3=x_3^*)\\ &\Delta v_1(x_1, x_2, x_3, \tau)\to 0 \qquad (x_3\to\infty)\end{aligned} \tag{2.4}$$

Начальные условия оставим пока неопределенными.

3. Введем некоторую функцию $\varphi$, являющуюся аналогом потенциала скорости

$$\Delta v_1=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\qquad v_3=\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \tag{3.1}$$

Введем также индикатор $f^{(n)}$ для площадок $\sigma_n$, от которого потребуем, чтобы

$$f^{(n)}(x_1, x_2, \tau)=\begin{cases} f_*^{(n)} & \text{при } (x_1, x_2, \tau)\in\bar{\sigma}_n\\ 0 & \text{при } (x_1, x_2, \tau)\in C\bar{\sigma}_n\end{cases} \tag{3.2}$$

где $f_*^{(n)}$ — заданная плотность функции $\varphi$, сосредоточенной на данной площадке $\sigma_n$. Следовательно, при $(x_1, x_2, \tau)\in\bar\sigma_n$

$$\varphi^{(n)}=\varphi f_*^{(n)} \tag{3.3}$$

так что общий потенциал $\varphi_*$, которым определяется скорость $\Delta v_\omega^{(1)}(x_3)$ в области течения при $(x_1, x_2, \tau)\in\sigma_1$, равен

$$\varphi_*=\sum^{n-1}\varphi^{(n)}=\sum^{n-1}\varphi f_*^{(n)} \tag{3.4}$$

Поэтому при определении функции $\Delta v_\omega^1(x_3)$ с помощью (1.3) все величины, входящие в (1.3), следует понимать в смысле (3.4), т. е.

$$\sum^{n-1}\left(\frac{\omega\nu}{v_*^2}\frac{\partial\Delta v_1 f_*^{(n)}}{\partial\tau}+f_*^{(n)}v_3\frac{\partial\Delta v_1}{\partial x_3}\right)=\sum^{n-1}f_*^{(n)}\frac{\partial^2\Delta v_1}{\partial x_3^2} \tag{3.5}$$

где функция $f_*^{(n)}$ не зависит от $x_3$. После интегрирования (3.5) по $x_1$ с помощью (3.1)—(3.4) получим

$$\sum^{n-1}\left[\frac{\omega\nu}{v_*^2}\frac{\partial\varphi^{(n)}}{\partial\tau}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi^{(n)}}{\partial x_3}\right)^2\right]=\sum^{n-1}\frac{\partial^2\varphi^{(n)}}{\partial x_3^2} \tag{3.6}$$

Предположим, что

$$\varphi^{(n)}=F^{(n)}[\theta^{(n)}(x_1, x_2, x_3, \tau)], \tag{3.7}$$

где $\theta^{(n)}=\theta f_*^{(n)}$ — функция, сосредоточенная на каждой из площадок при $(x_1, x_2, \tau)\in\bar\sigma_n$ и являющаяся решением уравнения теплопроводности

$$\frac{\omega\nu}{v_*^2}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}=\nabla^2\theta$$

На основании (3.6) и (3.7) имеем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dF}{d\theta}\right)^2=\frac{d^2F}{d\theta^2}$$

откуда

$$\varphi_*=\sum^{n-1}\varphi^{(n)}=-2\ln\left[\prod^{(n-1)}(\theta^{(n)}-C_1^{(n)})\right]+C_2$$

Здесь $C_1$ и $C_2$ — постоянные интегрирования.

Таким образом, скорость жидкости $\Delta v_\omega$, индуцируемая в области течения при $(x_1, x_2, \tau)\in\bar\sigma_1$ всеми остальными выбросами (т. е. распределенными в них вихрями), будет равна

$$\Delta v_\omega=\frac{\partial}{\partial x_1}\sum^{n-1}\varphi^{(n)}$$

Заменяя суммирование интегрированием по $x_1$, получим

$$\Delta v_\omega=-2\ln(\theta-C_1)+C_2. \tag{3.8}$$

**4.** Определяя $\Delta v_1$ непосредственно для области течения при $(x_1, x_2, \tau)\in\bar\sigma_1$, перепишем (1.3) с учетом (2.2)

$$\frac{\omega\nu}{v_*^2}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau}+v_3\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_3}=\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_3^2} \tag{4.1}$$

Произведем в этом уравнении замену переменных

$$\varphi_0(x_3,\tau)=\varphi_1(\eta,\tau^*),\qquad \eta=\frac{x_3}{\beta(\tau)},\qquad d\tau=\frac{l^2(\tau)}{\beta^2(\tau)}d\tau^*$$

Здесь $l(\tau)$ и $\beta(\tau)$ — некоторые функции времени.

Так как

$$\frac{\partial}{\partial\tau}=\frac{\beta^2}{l^2}\frac{\partial}{\partial\tau^*}+\frac{\partial\eta}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial\eta},\qquad \frac{\partial}{\partial x_3}=\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\eta}$$

то после преобразований получим

$$\frac{\omega\nu}{v_*^2}\left(\frac{\beta^2}{l^2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau^*}-\frac{x_3}{\beta^2}\frac{\partial\beta}{\partial\tau}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}\right)+\frac{v_3}{\beta}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}=\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\eta^2} \tag{4.2}$$

Если

$$\varphi_1=\varphi_2(\xi),\qquad \xi=\eta\left(\int\delta d\tau^*\right)^{-1/2},\qquad \delta(\tau^*)=\frac{v_*^2}{\omega\nu}\frac{l^2}{\beta^4}$$

то при условии

$$\frac{\omega\nu}{v_*^2}\frac{x_3}{\beta}\frac{\partial\beta}{\partial\tau}=v_3 \tag{4.3}$$

уравнение (4.2) приводится к виду

$$-\frac{1}{2}\xi\frac{d\varphi_2}{d\xi}=\frac{d^2\varphi_2}{d\xi^2}$$

с граничными условиями, которые следуют из (2.4)

$$\varphi_2=1\qquad (\xi=\xi(x_3^*))\qquad \varphi_2\to 0\qquad (\xi\to\infty)$$

Решение уравнения (4.1) имеет вид

$$\varphi_0=\left[1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z\exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right)d\left(\frac{\xi}{2}\right)\right]\sqrt{\pi}\qquad \left(\xi=\frac{x_3}{\beta}\left(\int\delta d\tau^*\right)^{-1/2}\right) \tag{4.4}$$

5. Если, следуя [5], для пристеночной области **течения при** $(x_1, x_2, \tau)\in\sigma_1$ положить, что

$$\frac{\partial P}{\partial\tau}+\frac{\partial v_3P}{\partial x_3}=0,\qquad \frac{\partial P}{\partial x_3}\sim 0,\qquad v_3\approx-\frac{x_3}{P}\frac{\partial P}{\partial\tau}$$

то можно заключить, что допущение (4.3) связано с **условием**

$$\beta^{\omega\nu/v_*^2}p=\text{const} \tag{5.1}$$

Здесь величину $\beta^{\omega\nu/v_*^2}$ следует понимать либо как ширину площадки $\sigma_1$, где жидкость движется при данном давлении $p$, либо как длину пути перемешивания. Заметим, что функция $\varphi_0(x_3,\tau)$ автомодельна. Поэтому если «шлепки» могут возникать на произвольной высоте $x_3$, то в общем случае, чтобы удовлетворить условию прилипания жидкости, т. е. граничному условию

$$v_1=0\qquad (x_3=0)$$

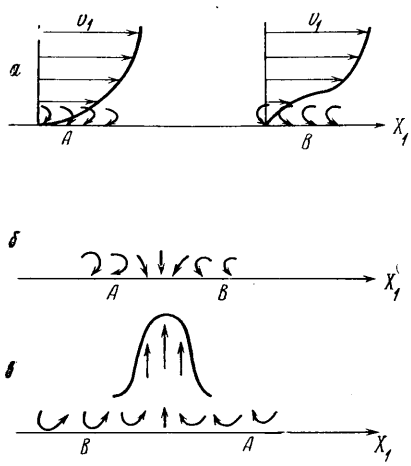
в формулу (2.3) вместо фиксированной координаты $x_3^*$ следует подставить $x_3$. Таким образом, при допущениях (1.2) и (5.1) с учетом (2.3), (3.8) и (4.4) для поля мгновенных скоростей можно получить

$$v_1(x_1,x_2,x_3,\tau)=\sqrt{\pi}kx_3(1-\operatorname{erf}\xi)+\left\{C_2-2\ln\left[\prod^{n-1}(\theta^{(n)}-C_1^{(n)})\right]\right\}\operatorname{erf}\xi \tag{5.2}$$

$$\operatorname{erf}\xi=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\xi^2/4}d\left(\frac{\xi}{2}\right),\quad \xi=\frac{\operatorname{const}x_3}{\beta(\tau)}\left(\int\frac{p}{\beta}d\tau\right)^{-1/2}$$

$$\theta^{(n)}=\frac{1}{2}\int_0^\tau\sqrt{\frac{\omega\nu}{\pi v_*^2(\tau-\psi)}}\int_{\sigma_n} f_*^{(n)}\exp\left[-\frac{\omega\nu(x_3-\varepsilon)^2}{4v_*^2(\tau-\psi)}\right]d\varepsilon\, d\psi$$

6. Механизм возникновения «шлепков» можно представить так, как это показано на фиг. 2, где *а* — сближение вихрей *A* и *B*, *б* — возникновение струйки (при нейтрализации вихрей), ударяющей в поверхность, *в* — возникновение выброса при обгоне вихрей *B* вихрями *A*. При движении потока могут существовать целые системы замкнутых вихревых нитей, образующих вихревые площадки *A* и *B*. Площадки *A* как бы перекатывают на себе поток по поверхности, нагоняя площадки *B*, которые способствуют замедлению течения [2]. В результате вихри *A* догоняют вихри *B*. При их нейтрализации образуется кумулятивная струйка, ударяющая в поверхность. Это явление можно рассматривать как шлепок, приводящий затем к образованию выброса и восстановлению вихрей *A* и *B*, в результате чего группа вихрей *A* после выброса будет двигаться впереди вихрей *B* (фиг. 2).



Фиг. 2

Рассмотрим движение жидкости в пристеночном вихревом слое такой толщины, что согласно принципу Сен-Венана (см. также (5.2) формулу) влиянием всех других вихрей на процесс переноса импульса в этом слое с достаточной точностью можно пренебречь (т. е. допустим, что движение жидкости описывается уравнением (1.1)), но при этом

$$\partial v_k'/\partial x_k=\gamma(x,\tau)\ll 1, \tag{6.1}$$

где $\gamma$ — расходимость вектора скорости жидкости, вводимая из-за неучета эффектов всех других вихрей.

Снова введем функцию $\varphi$ по формуле

$$v_k=\frac{\partial\varphi[\theta(x,\tau)]}{\partial x_k}=\frac{d\varphi}{d\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x_k} \tag{6.2}$$

где $\theta=\varepsilon f_*$ — тепловой потенциал с плотностью $f_*$, причем $\varepsilon$ есть фундаментальное решение уравнения теплопроводности с единичным точечным источником, т. е.

$$\theta(x,\tau)=\theta(x_1,x_2,x_3,\tau)=\int_0\int_\Omega\frac{f_*(\psi,\tau)}{[2\sqrt{\pi(\tau-t)}]^3}\exp\left[-\frac{(x-\psi)^2}{4(\tau-t)}\right]d\psi\, dt$$

где $\Omega$ — область определения финитной функции $f_*$. Очевидно, что всегда можно подобрать функцию $f_*$ такую, что

$$p=-f_* d\varphi/d\theta$$

Тогда если для уравнения теплопроводности

$$\partial\theta/\partial\tau-\nabla^2\theta-f_*(x, \tau)=0$$

функция $w$, характеризующая энергию поля $\theta$

$$w=\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_3}\right)^2\neq 0 \tag{6.3}$$

то уравнение (1.1) приводится к виду

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2=\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} \tag{6.4}$$

Решение (6.4) имеет вид

$$\varphi=-2\ln(\theta-C_1)+C_2 \tag{6.5}$$

Отсюда следует, что

$$p=-2\frac{f_*}{C_1-(\varepsilon f_*)},\qquad v_k=-\frac{2}{C_1-(\varepsilon f_*)}\frac{\partial}{\partial x_k}(\varepsilon f_*)$$

$$\left(\varepsilon=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right)\right)$$

Здесь $C_1$ и $C_2$ — постоянные. Таким образом в пристеночном слое турбулентного потока давление $p$ и поле скоростей $v_k$ определяются одним и тем же тепловым потенциалом $\theta$. Уравнение неразрывности (6.1) с помощью (6.2) и (6.3) записывается в виде

$$\frac{d\varphi}{d\theta}\nabla^2\theta+\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}w=\gamma=\gamma_1\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} \tag{6.6}$$

Решая (6.6) совместно с (6.4), найдем, что

$$4(w-\gamma_1)=\nabla^2(\theta-C_1)^2$$

т. е. условие (6.3) действительно имеет место, поэтому решения (3.8) и (6.5) корректны.

7. Если функции $\xi$ и $\theta^{(n)}$ для турбулентного течения случайны, то сопоставление (5.2) с экспериментом весьма затруднительно. Для количественной оценки полученного результата может оказаться полезным сглаживание соответствующих функций по пространству или статистическому ансамблю. В частности, оператор

$$\langle f_*(\tau)\rangle=\frac{1}{\sigma}\int_\sigma f_*^{(n)}(\tau)\,d\sigma \tag{7.1}$$

определяет среднее значение плотности $f_*^{(n)}$ функций $\Delta v_1$ и $\varphi$ на всей площади $\sigma$ исследуемого потока для данного момента времени $\tau$, т. е. оператор (7.1) «размазывает» значения функций $f_*^{(n)}$ и, следовательно, $\Delta v_1$ и $\varphi$ по $\sigma$. Применив оператор (7.1) к (1.3) и проделав аналогичные выкладки, для осредненного движения вместо (5.2) получим

$$v_1(x_3)=\sqrt{\pi}kx_3(1-\operatorname{erf}k_1x_3)+[C_2-2k_2\ln(\bar{\theta}+C_1)]\operatorname{erf}k_1x_3$$

$$k_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)p_*(\delta)\,d\delta, \qquad \delta=\frac{1}{\beta(\tau)}\left(\int\frac{p}{\beta}\,d\tau\right)^{-1/2}$$

Здесь $p_*$ — плотность вероятности, $\bar{\theta}$ — среднее на $\sigma$ значение функций $\theta^{(n)}$; $k_2$, $C_1$ и $C_2$ — постоянные. При $k$=0.64, $k_1$=0.055, $C_2$=5.2, $2k_2$=5.75 и

$$\frac{1}{C_1-\bar{\theta}}=x_3'+\frac{(x_3')^3}{3\cdot 2!}+\ldots=\frac{x_3v_*}{\nu}+\ldots$$

полуэмпирическая формула хорошо согласуется, например, с опытными данными Клебанова, Лауфера и др. в интервале $3<x_3v_*/\nu<400$.

Поступила 3 VI 1972

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Блэк Т. Дж.* Некоторые практические приложения новой теории турбулентности пристенного слоя. Сб. «Достижение в области теплообмена». М., «Мир», 1970.
2. *Corino E. R., Brodkey R. S.* A visual investigation of the wall region in turbulent flow. J. Fluid Mech., 1969, vol. 37, No. 1, pp. 1—30.
3. *Kline S. J., Reynolds W. C., Schraub F. A., Runstadler P. W.* The structure of turbulent boundary layers. J. Fluid Mech., 1967, vol. 30, pt 4, pp. 741—773.
4. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 2. М., «Наука», 1970.
5. *Беленький Б. З., Фрадкин Е. С.* Теория турбулентного перемешивания. Тр. Физ. ин-та им. Лебедева АН СССР, 1965, т. 29.