УДК 66.067.5.001.5

К ВОПРОСУ О РАЗДЕЛЯЮЩЕМ ЭФФЕКТЕ ПРИ ЦЕНТРИФУГИРОВАНИИ

В. А. КАРПЫЧЕВ, Е. В. СЕМЕНОВ

(*Москва*)

Рассматривается задача о выделении частиц малой сферической формы из дисперсной системы, заключенной в полости между двумя находящимися в перманентном вращении бесконечными соосными конусами.

Существующие способы описания процесса осаждения и выделения частиц определенной плотности из дисперсной системы носят приближенный характер и нуждаются в уточнении. В ряде работ [1-3] предлагаются расчетные формулы для критического диаметра сферической частицы, при котором она может быть выделена из дисперсной системы. При этом в уравнениях движения частицы полностью отбрасывается ускорение и не учитывается сила Кориолиса, что снижает точность оценок.

Ниже применительно к случаю потока в полости между тарелками промышленного сепаратора изучается поведение частиц весьма малой сферической формы в потоке жидкости между двумя быстро вращающимися соосными конусами с углом конусности 2α. Задача решается в аэрозольном приближении, предполагается, что поток ламинарный, частицы не искажают поток, не сталкиваются и не взаимодействуют между собой, а также с телом посредством гравитационных или электростатических сил.

При исследовании осаждения частиц из дисперсной системы важно знать условия, при которых начинается процесс разделения смеси, для чего обычно вычисляют предельный размер частиц, которые за время пребывания в межтарелочной полости успеют преодолеть межтарелочное расстояние. Этот подход используется и в данной работе.

Постановка задачи, поле скоростей и давлений в полости между вращающимися конусами. Рассматривая в дальнейшем сферическую частицу, радиус которой ($R=a$) мал по сравнению с расстоянием между конусами h, будем считать, что сфера перемещается в потоке вязкой несжимаемой и невесомой жидкости, который индуцируется линейным источником, расположенным по оси конусов, вращающихся с постоянной большой угловой скоростью ω.

Предполагая течение жидкости осесимметричным, а зазор между конусами малым, выберем, следуя [4], в качестве координатных поверхностей семейство соосных взаимно ортогональных конусов, а также осевые плоскости и поместим начало координат O в вершину верхнего конуса, относя движение жидкости к осям координат, жестко связанным с конусами. Уравнения Навье – Стокса и неразрывности в подвижной системе примут вид

$$Lv_r-\frac{\sin\alpha}{H_\lambda}v_\lambda^2=\frac{\partial\Phi}{\partial r}+2\omega v_\lambda\sin\alpha+\tag{1}$$

$$+\nu\left(\Delta v_r-\frac{2\sin\alpha}{H_\lambda^2}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}-\frac{\sin^2\alpha}{H_\lambda^2}v_r+\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{H_\lambda^2}v_z\right)$$

$$Lv_\lambda+\frac{v_r\sin\alpha-v_z\cos\alpha}{H_\lambda}v_\lambda=\frac{1}{H_\lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}+2\omega(v_z\cos\alpha-v_r\sin\alpha)+\tag{2}$$

$$+\nu\left(\Delta v_\lambda+\frac{2\sin\alpha}{H_\lambda^2}\frac{\partial v_r}{\partial\lambda}-\frac{2\cos\alpha}{H_\lambda^2}\frac{\partial v_z}{\partial\lambda}-\frac{1}{H_\lambda^2}v_\lambda\right)$$

$$Lv_z+\frac{\cos\alpha}{H_\lambda}v_\lambda^2=\frac{\partial\Phi}{\partial z}-2\omega v_\lambda\cos\alpha+\tag{3}$$

$$+\nu\left(\Delta v_z+\frac{2\cos\alpha}{H_\lambda^2}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}+\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{H_\lambda^2}v_r-\frac{\cos^2\alpha}{H_\lambda^2}v_z\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(H_\lambda v_r)+\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}+\frac{\partial}{\partial z}(H_\lambda v_z)=0\tag{4}$$

$$L\equiv \frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{v_\lambda}{H_\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}+v_z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Delta\equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{H_\lambda^2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\sin\alpha}{H_\lambda}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\cos\alpha}{H_\lambda}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Phi=\frac{\omega^2H_\lambda^2}{2}-\frac{p}{\rho},\qquad H_\lambda=r\sin\alpha-z\cos\alpha$$

Здесь Δ – оператор Лапласа в биконической системе, H_λ – параметр Ляме, v_r, v_λ, v_z – составляющие скоростей в относительном движении, p – давление, ρ – плотность жидкости, ω – угловая скорость вращения конусов, 2α – угол раствора конуса, ν – кинематическая вязкость.

С учетом принятых выше допущений о малости зазора можно считать

$$v_z\approx 0,\qquad H_\lambda\approx r\sin\alpha$$

Рассматривая в дальнейшем установившийся осесимметричный поток $(\partial/\partial t=$ $=\partial/\partial\lambda=0)$, в силу уравнений неразрывности (4) запишем

(5) $$v_r=f(z)/r$$

Полагая еще $v_\lambda=\varphi(z)/r$ и сохраняя среди вязких слагаемых наибольшие по величине, вместо системы уравнений (1) – (3) получим

(6) $$v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{v_\lambda^2}{r}=\frac{\partial\Phi}{\partial r}+2\omega v_\lambda\sin\alpha+\nu\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}$$

(7) $$0=-2\omega v_r\sin\alpha+\nu\partial^2 v/\partial z^2$$

(8) $$0=\partial\Phi/\partial z-2\omega v_\lambda\cos\alpha$$

Ограничимся в дальнейшем случаем, когда угол конусности 2α весьма близок к π, тогда вместо уравнения (8) получим приближенно

(9) $$\frac{\partial\Phi}{\partial z}-2\omega v_\lambda\cos\alpha\approx\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0$$

Отсюда следует, что $\Phi=\Phi(r)$.

Для решения нелинейного уравнения (6) воспользуемся методом Слезкина – Тарга, заменяя компоненты ускорения частиц жидкости их средними значениями по толщине зазора h и вводя функцию

(10) $$A^\circ(r)=\left[\int_0^h\left(v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{v_\lambda^2}{r}\right)dz\right]\frac{1}{h}$$

Тогда с учетом формул (5) и (10) систему (6), (7) можно переписать в виде

(11) $$r[A^\circ(r)-\Phi'(r)]=2\omega\varphi(z)\sin\alpha+\nu f''(z)$$

(12) $$0=-2\omega f(z)\sin\alpha+\nu\varphi''(z)$$

Вместо уравнения (11) получим

(13) $$[A^\circ(r)-\Phi'(r)]\frac{r}{\nu}=2\omega\varphi(z)\frac{\sin\alpha}{\nu}+f''(z)=-\frac{\omega C\sin\alpha}{2\nu}$$

где C – постоянная.

Обозначая $\Omega=\omega\sin\alpha/\nu$, с учетом (12), (13) найдем

(14) $$f''(z)+2\Omega\varphi(z)=-\Omega C/2$$

(15) $$\varphi''(z)-2\Omega f(z)=0$$

Для функций $f(z)$ и $\varphi(z)$ должны выполняться граничные условия

(16) $$f(0)=f(h)=\varphi(0)=\varphi(h)=0$$

Кроме того, вследствие (15) имеют место условия

(17) $$\varphi''(0)=\varphi''(h)=0$$

Здесь штрихами обозначены производные по z.

Решая систему (14), (15), получим [5]

$$v_\lambda = \frac{C}{r\Delta}\left\{\Delta_2\varphi_2(\sqrt{\Omega}\,z) + \Delta_4\varphi_4(\sqrt{\Omega}\,z) + \Delta[\varphi_1(\sqrt{\Omega}\,z) - 1]\frac{1}{4}\right\} \tag{18}$$

$$v_r = C\{-4\Delta_2\varphi_4(\sqrt{\Omega}\,z) + \Delta_4\varphi_2(\sqrt{\Omega}\,z) - \Delta\varphi_3(\sqrt{\Omega}\,z)\}\frac{1}{2r\Delta} \tag{19}$$

$$(\varphi_1(z) = \operatorname{ch} z\cos z, \quad \varphi_2(z) = (\operatorname{ch} z\sin z + \operatorname{sh} z\cos z)/2$$
$$\varphi_3(z) = (\operatorname{sh} z\sin z)/2, \quad \varphi_4(z) = (\operatorname{ch} z\sin z - \operatorname{sh} z\cos z)/4$$
$$\Delta = \varphi_2^2(l) + 4\varphi_4^2(l), \quad \Delta_2 = \varphi_2(l)[1 - \varphi_1(l)]/4 - \varphi_3(l)\varphi_4(l)$$
$$\Delta_4 = \varphi_2(l)\varphi_3(l) + \varphi_4(l)[1 - \varphi_1(l)], \quad l = h\sqrt{\Omega})$$

Постоянную C находим из условия задания расхода Q

$$Q = 2\pi r\sin\alpha\int_0^h v_r\,dz \tag{20}$$

откуда

$$\frac{C}{\Delta} = \frac{Q}{\pi\sin\alpha}\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\{[\varphi(l) - 1]\Delta_2 + \varphi_3(l)\Delta_4 - \Delta\varphi_4(l)\}^{-1} \tag{21}$$

В силу (13) для $\Phi(r)$ имеем

$$\Phi(r) = \frac{1}{2r^2}F(h) - \frac{\Omega\nu}{2}C\ln r + D \tag{22}$$

$$\left(F(h) = \int_0^h [f^2(z) + \varphi^2(z)]dz/h\right) \tag{23}$$

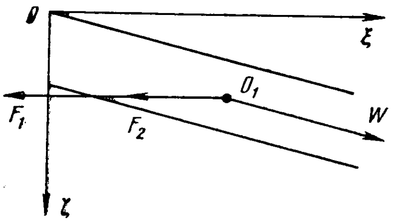
где D – постоянная.

Пусть при $r = r_0$, имеет место $p = P$, тогда для давления получим

$$p = P + \rho\left[\frac{\omega^2\sin^2\alpha}{2}(r^2 - r_0^2) + \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\right)\frac{F(h)}{2} + \frac{\Omega\nu}{2}C\ln\frac{r}{r_0}\right] \tag{24}$$

Таким образом в рамках принятых допущений рассчитан профиль скоростей и давление.

Предельный размер сферы. В плоскости rOz на сферу действуют центробежная сила $\mathbf{F}_1$, сила Кориолиса $\mathbf{F}_2$ и сила сопротивления Стокса W (фигура). В силу принятых выше допущений (ω велико, h/r мало) среди перечисленных сил наибольшей по величине является $\mathbf{F}_1$, тогда ясно, что если плотность сферы ρ_1 меньше плотности жидкости ρ, то легкая фракция собирается у нижнего конуса, в противном случае, когда $\rho_1 > \rho$, тяжелая фракция собирается у верхнего конуса. На этих эффектах основано действие центрифуг различного назначения.



Для определенности будем считать, что $\rho_1 < \rho$ и сфера в начальный момент времени находится с координатами $r = R_1$, $z = 0$. Если v_{1r}, $v_{1\lambda}$, v_{1z} – проекции относительной скорости центра сферы O_1, то уравнение движения центра в проекции на ось z в соответствии с (3) запишется в виде

$$m_1\left(\frac{dv_{1z}}{dt} + \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{r}v_{1\lambda}^2\right) = m_1(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)_z + (\mathbf{W})_z \tag{25}$$

$$(m_1 = {}^4/_3\pi(\rho - \rho_1)a^3, \quad (\mathbf{F}_1)_z \approx \omega^2 r\sin\alpha\cos\alpha$$
$$(\mathbf{F}_2)_z = -2\omega v_{1\lambda}\cos\alpha, \quad (\mathbf{W})_z = -6\pi\mu a v_{1z}, \quad \mu = \rho\nu)$$

Пренебрегая величиной ускорения dv_{1z}/dt, уравнение (25) перепишем в виде

(26) $$\frac{\omega^2 r\sin 2\alpha}{2}-\frac{v_{1\lambda}^2\operatorname{ctg}\alpha}{r}-2\omega v_{1\lambda}\cos\alpha-\frac{9\mu v_{1z}}{2(\rho-\rho_1)a^2}=0$$

Составляющую $v_{1\lambda}$ приближенно можно рассчитывать по формуле (18), заменяя для простоты v_λ ее осредненным значением по толщине зазора h

(27) $$v_{1\lambda}\approx v_\lambda\approx\frac{\varphi^\circ}{r}=\frac{1}{rh}\int_0^h\varphi(z)\,dz$$

В таком случае вследствие (26) получим

(28) $$v_{1z}=\frac{2(\rho-\rho_1)a^2}{9\mu}\left[\frac{\omega^2 r\sin 2\alpha}{2}-\frac{(\varphi^\circ)^2\operatorname{ctg}\alpha}{r^3}-\frac{2\omega\varphi^\circ\cos\alpha}{r}\right]$$

В силу того что $dz=v_{1z}dt$, а расход $Q=dV/dt$, $dV=2\pi rh\sin\alpha dr$, где dV – элементарный кольцевой цилиндр, можем записать

(29) $$dz=\frac{4(\rho-\rho_1)\pi ha^2\sin\alpha}{9\mu Q}\left[\frac{\omega^2 r\sin 2\alpha}{2}-\frac{(\varphi^\circ)^2\operatorname{ctg}\alpha}{r^3}-\frac{2\omega\varphi^\circ\cos\alpha}{r}\right]r\,dr$$

Считая, что в процессе осаждения сфера перемещается из точки ($r=R_1$, $z=0$) в точку ($r=R_2$, $z=h$), где R_1 и R_2 – геометрические размеры тарелок сепаратора, вследствие (28) получим

(30) $$a_*=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu Q}{\pi(\rho-\rho_1)\sin\alpha}}\left[\frac{\omega^2\sin 2\alpha}{6}(R_2^3-R_1^3)+\right.$$
$$\left.+(\varphi^\circ)^2\operatorname{ctg}\alpha\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)-2\omega\varphi^\circ\cos\alpha(R_2-R_1)\right]^{-1/2}$$

Если в (30) пренебречь членами, содержащими φ°, то получим формулу для определения размера дисперсной частицы, которая приведена в [1].

Вычисление величины φ°, входящей в (30), представляется весьма громоздким, поэтому для практических целей можно предложить упрощенный вариант этой формулы, для чего при расчете профиля скоростей потока в уравнении (11) пренебрежем кориолисовым ускорением. Тогда профиль скоростей будет рассчитываться по формулам

(31) $$v_r=\frac{3Q}{\pi h^3\sin\alpha}\frac{z(h-z)}{r}$$

(32) $$v_\lambda=-\frac{\omega Q}{2\pi\nu h^3}\frac{z(h^3-2hz^2+z^3)}{r}$$

и для $v_{1\lambda}^\circ$ получим

(33) $$v_{1\lambda}^\circ=\frac{\varphi^\circ}{r}=-\frac{Q\omega h}{2\pi\nu r}$$

Для критического радиуса сферы a_* с учетом (30) получим явное выражение

(34) $$a_{кр}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu Q}{\pi(\rho-\rho_1)\sin\alpha}}\left[\frac{\omega^2\sin 2\alpha}{6}(R_2^3-R_1^3)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{Q\omega h}{2\pi\nu}\right)^2\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\operatorname{ctg}\alpha+\frac{Q\omega^2 h}{2\pi\nu}(R_2-R_1)\cos\alpha\right]^{-1/2}$$

Непосредственные расчеты a_* для конкретных центрифуг по (34) показывают, что порядок слагаемых в квадратных скобках в этой формуле один и тот же, поэтому ими нельзя пренебречь.

Расчеты предельного размера жирового шарика, выделяющегося из молока, для промышленных сепараторов в соответствии с упрощенной формулой дают $a_* \sim 1$ *мкм*

$$a_* = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{6\mu Q}{\pi(\rho-\rho_1)\omega^2(R_2^3-R_1^3)\sin 2\alpha \sin\alpha}} \tag{35}$$

Для таких значений радиуса сферы $\mathrm{Re}<1$, поэтому сила сопротивления, действующая на сферу, может производиться по формуле Стокса.

С помощью (30) или (34) можно рассчитывать оптимальные параметры центрифуги.

В заключение авторы благодарят Ю. П. Гупало за критические замечания.

Поступила 26 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соколов В. И.* Современные промышленные центрифуги. М., «Машиностроение», 1967.
2. *Борц М. А., Гольдин Е. М., Каминский В. С.* Принципы расчета осадительных центрифуг для угольной промышленности. М., «Наука», 1966.
3. Гидродинамические и тепломассообменные процессы в химической аппаратуре. М., «Машиностроение», 1967.
4. *Гольдин Е. М.* Гидродинамический поток между тарелками сепаратора. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 7.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Физматгиз, 1961.

Технический редактор *Э. Ф. Бунова*

Сдано в набор 17/VII-1973 г.	Т-16202	Подписано к печати 26/IX-1973 г.	Тираж 1895 экз.
Зак. 2642	Формат бумаги 70×108¹/₁₆	Усл. печ. л. 16,8 Бум. л. 6	Уч.-изд. л. 17,9

2-я типография издательства «Наука», Москва, Шубинский пер., 10