ЛИТЕРАТУРА

1. *Таганов Г. И.* Энтропийные эффекты в гиперзвуковых течениях газа. Аннот. докл. 2-го Всес. съезда по механ., 1964.
2. *Тетерин М. П.* Исследование течения газа в области падения скачка уплотнения на цилиндр, обтекаемый потоком большой скорости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 2.
3. *Тетерин М. П.* Исследование течения газа и теплопередачи в области падения скачка уплотнения на цилиндр, обтекаемый потоком большой сверхзвуковой скорости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 3.
4. *Edney B.* Anomalous heat transfer and pressure distributions on blunt bodies at hypersonic speeds in the presence of an impinging shock. K. T. H.— Avhandling, 1968, No. 239.
5. *Кацкова О. Н., Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д., Шулишнина Н. П.* Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик. М., ВЦ АН СССР, 1961.
6. *Wang C. J., Peterson J. B.* Spreading of supersonic jets from axially symmetric nozzles. Jet Propulsion, 1958, vol. 28, No. 5.

УДК 538.4

НЕКОТОРЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИКИ

В. И. ГРАБОВСКИЙ

(*Москва*)

При помощи инспекционного анализа системы уравнений электрогидродинамики найдены некоторые автомодельные решения для нестационарного одномерного течения.

В реальных электрогидродинамических устройствах наблюдаются нестационарные процессы, например, при перестройке течения от одного стационарного режима к другому.

Для понимания сущности таких процессов, так же как и в обычной гидродинамике, большую роль приобретает исследование автомодельных решений. Все существенно различные такие решения могут быть получены исследованием групповых свойств системы уравнений электрогидродинамики при помощи вычисления ее основной группы [1]. Разыскивая группы преобразований определенного типа, можно получить некоторые автомодельные решения без вычисления основной группы [2]. В данной работе определяются автомодельные решения, соответствующие группе преобразований растяжения.

1. Система уравнений в случае одномерного нестационарного течения несжимаемой униполярно заряженной жидкости в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial x}-Sq\frac{\partial \varphi}{\partial x},\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=-q\qquad \frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}j=0,\qquad j=q\left(u-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\tag{1.1}$$

Здесь t – безразмерное время, x – продольная координата, u – продольная компонента скорости, p – гидродинамическое давление, q – плотность заряженных частиц, φ – электрический потенциал, j – продольная компонента плотности электрического тока, отнесенные соответственно к характерным комплексам (обозначения общепринятые) x_*/v_*, x_*, v_*, ρv_*^2, $\varepsilon v_*/(4\pi b x_*)$, $v_* x_*/b$, $\varepsilon v_*^2/(4\pi b x_*)$, $S=\varepsilon/(4\pi\rho b^2)$.

Для системы (1.1) легко найти группу преобразований растяжения, относительно которой система будет инвариантна

$$x=\alpha x^\circ,\quad t=\tau t^\circ,\quad \varphi=\alpha^2\tau^{-1}\varphi^\circ,\quad q=\tau^{-1}q^\circ$$

$$u=\alpha\tau^{-1}u^\circ,\quad p=\alpha^2\tau^{-2}p^\circ,\quad \rho=\rho^\circ\tag{1.2}$$

(α, τ=const, а градус обозначает любые функции, удовлетворяющие (1.1)).

Двухпараметрическая группа (1.2) при любом значении n, определяемом связью $\tau=\alpha^n$, содержит однопараметрическую подгруппу следующего вида:

$$x=\alpha x^\circ,\quad t=\alpha^n t^\circ,\quad \varphi=\alpha^{2-n}\varphi^\circ,\quad q=\alpha^{-n}q^\circ$$
$$u=\alpha^{1-n}u^\circ,\quad p=\alpha^{2(1-n)}p^\circ,\quad \rho=\rho^\circ \tag{1.3}$$

Действуя аналогично [2], на основе подгруппы (1.3) можно представить автомодельные решения в виде

$$\varphi=t^{(2-n)/n}\Phi(\chi),\quad q=t^{-1}Q(\chi),\quad u=t^{(1-n)/n}V(\chi)$$
$$p=t^{2(1-n)/n}P(\chi),\quad \rho=\rho(\chi)=\mathrm{const},\quad \chi=t/x^n \tag{1.4}$$

Подставляя соотношения (1.4) в уравнения (1.1), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения неизвестных Φ, Q, V и P. При этом уравнения для нахождения Φ и Q, соответствующих электрическим параметрам, отделяются от уравнений для «гидродинамических» функций. Первое уравнение (1.1) служит для определения P и просто интегрируется, если остальные функции найдены, а уравнение неразрывности дает решение $V=\mathrm{const}$.

Система уравнений для нахождения Φ и Q имеет вид

$$-Q=\chi^{(2+n)/n}[\chi n^2\Phi''+n(n+1)\Phi'] \tag{1.5}$$

$$Q^2=Q-\chi Q'+n\chi^{(1+n)/n}Q'(V+n\chi^{(1+n)/n}\Phi') \tag{1.6}$$

(штрих обозначает операцию дифференцирования по переменной χ).

Исключая Φ из уравнений (1.6), (1.5), получим для определения Q уравнение, которое интегрируется в квадратурах

$$Q''=(Q')^2\left(\frac{2-1/n}{Q-1}+\frac{1+1/n}{Q}\right)-\frac{1+1/n}{\chi}Q' \tag{1.7}$$

2. Рассмотрим два частных случая, соответствующих различным законам изменения скорости по времени.

Случай $n=0.5$ соответствует линейно возрастающей по времени скорости $u=Vt$. Интегрируя уравнения (1.7), (1.6) и учитывая соотношения (1.4), определяем одно автомодельное решение системы уравнений (1.1)

$$\varphi=-{}^4/_3c^{-2}(cx+c_1t^2)^{3/2}+t[(V+2c_1/c)x+c_0t^2]$$
$$q=(cx+c_1t^2)^{-1/2},\quad j=2/c[1-c_1t(cx+c_1t^2)^{-1/2}] \tag{2.1}$$

где V, c, c_0, c_1 – константы интегрирования.

Полученное решение дает распределение электрических параметров в любой момент времени $t\geqslant 0$ в пространстве $x\geqslant 0$.

Рассмотрим электрогидродинамическое течение между двумя электродами: заземленным электродом $x=0$ $(c_0=4c_1^{3/2}/(3c^2))$ и электродом $x=1$, который находится под потенциалом, возрастающим от некоторой отрицательной величины по закону, соответствующему (2.1). Тогда решение (2.1) описывает следующий процесс. В начальный момент времени $t=0$ между электродами имеется стационарное распределение электрических величин и движение среды отсутствует. При $t>0$ жидкость в рабочем промежутке начинает двигаться по закону $u=Vt$. С течением времени межэлектродное пространство освобождается от электрических зарядов, а плотность тока, убывая, стремится к некоторой константе, в общем случае отличной от нуля, благодаря бесконечно возрастающей величине скорости потока. При $t\to\infty$ реализуется квазистационарное течение следующего вида:

$$u=Vt,\quad q\to 0,\quad \varphi\to xt(V+2c_1/c),\quad j\to 2c^{-1}(1-\sqrt{c_1}) \tag{2.2}$$

На фигуре (сплошные линии) нанесены качественные распределения q, φ и j по продольной координате при различных фиксированных значениях t. Стрелки указывают направление возрастания параметра t.

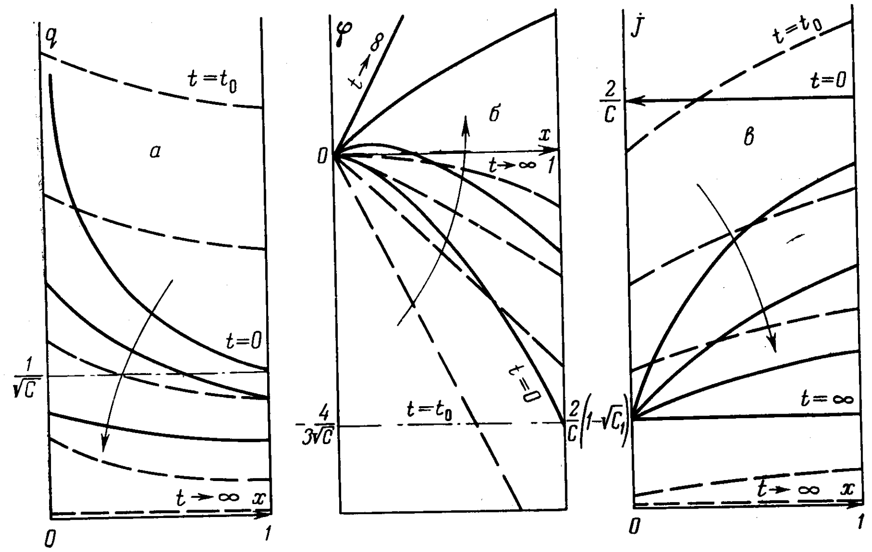
Случай $n=-1$ соответствует течению жидкости с убывающей со временем скоростью

$$u=V/t^2 \tag{2.3}$$

В этом случае автомодельное решение имеет вид

$$\begin{aligned}
&\varphi=-\frac{x^2}{2t}-\frac{4}{3c^2t^3}(cxt+c_1)^{3/2}+\left(V-\frac{2c_1}{c}\right)\frac{x}{t^2}+\frac{c_0}{t^3},\\
&q=\left(\frac{1}{\sqrt{cxt+c_1}}+1\right)\frac{1}{t}\\
&j=\frac{1}{ct^3}\left[cxt+2\sqrt{cxt+c_1}+\frac{2c_1+cxt}{\sqrt{cxt+c_1}}+2(1+c_1)\right]
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Следует отметить, что функции (2.4) при любых фиксированных t не удовлетворяют стационарным уравнениям, т. е. при законе убывания скорости (2.3) не существует никакого стационарного течения, кроме тривиального при $t\to\infty$.



На фигуре (пунктирные линии) представлены качественные распределения параметров между заземленным электродом $x=0$ и электродом $x=1$, имеющим возрастающий со временем отрицательный потенциал, при значениях параметра t, изменяющегося в диапазоне $[t_0, \infty)$, где $t_0 \ll 1$.

В заключение автор благодарит А. Б. Ватажина за внимание к работе.

Поступила 6 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
2. *Биркгоф Г.* Гидродинамика. М., Изд-во иностр. лит., 1963.