

Этот эффект в отличие от разобранных выше исчезает с увеличением числа  $Re$ , поскольку при этом, как показано, величина  $j/\rho_0 V_0 C_0 \sim \text{const}$ , а величина  $\Delta S = S_1 - S_0$  уменьшается пропорционально толщине релаксационной зоны.

Поступила 4 III 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Cheng H. K.* The blunt — body problem in hypersonic flow at low Reynolds number. JAS paper, 1963, No. 63—92.
2. *Chung P. M.* Hypersonic viscous shock layer of nonequilibrium dissociating gas. NASA Rept TRR-108, 1961.
3. *Park*. The dissociating relaxation of viscous hypersonic shock layer. AIAA Journal, 1964, No. 7.
4. *Tong H., Suzuki B. H.* Stagnation point heat transfer to surfaces of arbitrary catalicity. AIAA Journal, 1964, No. 11.
5. *Tong H.* Nonequilibrium heat transfer at the stagnation point. AIAA Journal, 1965, No. 4.
6. *Chung P. M.* Weakly ionized nonequilibrium viscous shock layer and electrostatic probe characteristics. AIAA Journal, 1964, No. 5.
7. *Shih W. C. L., Krupp R. S.* Viscous nonequilibrium blunt body flow. AIAA Journal, 1967, No. 1.
8. *Adams J. C. Jr.* Thin viscous shock layer analysis of blunt body stagnation point air ionization. AIAA Journal, 1969, No. 2.
9. *Blottner F. G.* Viscous shock layer at the stagnation point with nonequilibrium air chemistry AIAA Journal, 1969, No. 12.
10. *Воронкин В. Г.* Неравновесное вязкое течение многокомпонентного газа в окрестности критической точки затупленного тела. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 2.

УДК 533.6.014

### ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ СМЕСИ ГАЗА И ЧАСТИЦ В ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОМ СОПЛЕ ЛАВАЛЯ

И. М. ВАСЕНИН, А. Д. РЫЧКОВ

(Томск)

Рассматривается прямая задача теории сопла Лавала для случая течения смеси газа и твердых частиц. Принятая двухскоростная модель движения такой среды [1] оправдывает себя при не слишком большой концентрации частиц.

В отличие от работы [2] в данной работе используется разностная схема второго порядка точности, устойчивость которой не зависит от численных значений коэффициентов сопротивления. Проведенные расчеты для ряда размеров частиц позволяют выяснить некоторые особенности такого течения.

1. Для решения поставленной задачи применяется метод установления, используемый авторами ранее [3] при решении прямой задачи теории сопла Лавала. Нестационарная система уравнений, описывающая движение смеси газа и частиц, записывается в виде законов сохранения

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \rho r + \frac{\partial}{\partial x} \rho r u + \frac{\partial}{\partial y} \rho r v = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \rho M + \frac{\partial}{\partial x} \rho M u + \frac{\partial}{\partial y} \rho M v + \frac{\partial}{\partial x} \rho p = \rho C_R \left( M_p - \frac{\rho_p}{\rho} M \right) \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \rho N + \frac{\partial}{\partial x} \rho N u + \frac{\partial}{\partial y} \rho N v + \frac{\partial}{\partial y} \rho p - p = \rho C_R \left( N_p - \frac{\rho_p}{\rho} N \right) \\
 (1.1) \quad & \frac{\partial}{\partial t} \rho e + \frac{\partial}{\partial x} \rho e u + \frac{\partial}{\partial y} \rho e v + p \left[ \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v \right] = \\
 & = \rho \rho_p \{ C_R [(u_p - u)^2 + (v_p - v)^2] - C_\alpha (T - T_p) \} \\
 & p = \varepsilon (k - 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} y \rho_p + \frac{\partial}{\partial x} y \rho_p u_p + \frac{\partial}{\partial y} y \rho_p v_p = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial t} y M_p + \frac{\partial}{\partial x} y M_p u_p + \frac{\partial}{\partial y} y M_p v_p = y C_R \left( \frac{\rho_p}{\rho} M - M_p \right) \\
 & \frac{\partial}{\partial t} y N_p + \frac{\partial}{\partial x} y N_p u_p + \frac{\partial}{\partial y} y N_p v_p = y C_R \left( \frac{\rho_p}{\rho} N - N_p \right) \\
 & \frac{\partial}{\partial t} y \theta_p + \frac{\partial}{\partial x} y \theta_p u_p + \frac{\partial}{\partial y} y \theta_p v_p = y \frac{C_\alpha}{c} \rho_p (T - T_p) \\
 & \theta_p = \rho_p T_p
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

где  $M = \rho u$ ,  $N = \rho v$ ,  $u$ ,  $v$  — проекции вектора скорости на оси координат  $X$ ,  $Y$  соответственно,  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $\varepsilon$  — внутренняя энергия газа на единицу объема,  $C_R$ ,  $C_\alpha$  — коэффициенты сопротивления,  $c$  — теплоемкость материала частиц. Индексом  $p$  обозначены параметры для частиц.

Приведенная система представляет собой две системы уравнений, описывающих движение газа (1.1) и частиц (1.2) соответственно, связанные между собой только через правые части. В дальнейшем будем называть системы уравнений (1.1) и (1.2) просто уравнениями для газа и уравнениями для частиц. Области их интегрирования  $F \{0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq \delta(x), t \geq 0\}$  и  $\Phi \{0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq \Gamma(x, t), t \geq 0\}$  (где  $L$  — длина сопла,  $y = \delta(x)$  — контур сопла,  $y = \Gamma(x, t)$  — предельные линии частиц) оказываются различными, поскольку предельная линия  $\Gamma(x, t)$ , определяемая как траектория частицы, отделяющая область течения чистого газа от области течения смеси, не совпадает в общем случае с контуром сопла [1].

Для газа на левой границе сопла ( $x=0$ ) должно быть задано три граничных условия [3], а для частиц — четыре, поскольку характеристиками системы (1.1), (1.2) являются линии частиц, выходящие с левой стороны. Правая граница ( $x=L$ ) выбирается таким образом, чтобы для всех  $t \geq 0$  на ней  $u(L, y, t) > a$  ( $a$  — местная скорость звука). Тогда она имеет пространственный тип и граничные условия на ней не задаются. На стенке сопла задаются условия непротекания. Конкретный вид граничных условий задавался следующим:

$$\begin{aligned}
 & x=0, \quad 0 \leq y \leq \delta(0) \\
 & M(0, y, t) = C_1, \quad N(0, y, t) = C_2 y / \delta(0), \quad H_0(0, y, t) = C_3 \\
 & 0 \leq x \leq L, \quad y = \delta(x) \\
 & N(x, \delta(x), t) = M(x, \delta(x), t) (d/dx) \delta(x) \\
 & 0 \leq x \leq L, \quad y = 0 \\
 & \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0, \quad N=0, \quad \frac{\partial M_p}{\partial y} = \frac{\partial \rho_p}{\partial y} = \frac{\partial \theta_p}{\partial y} = 0, \quad N_p=0 \\
 & u_p(0, y, t) = u(0, y, t), \quad v_p(0, y, t) = v(0, y, t) \\
 & T_p(0, y, t) = T(0, y, t), \quad \rho_p(0, y, t) = z / (1-z) \rho(0, y, t)
 \end{aligned}$$

Здесь  $H_0$  — энтальпия торможения;  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  — константы,  $z$  — весовая доля частиц.

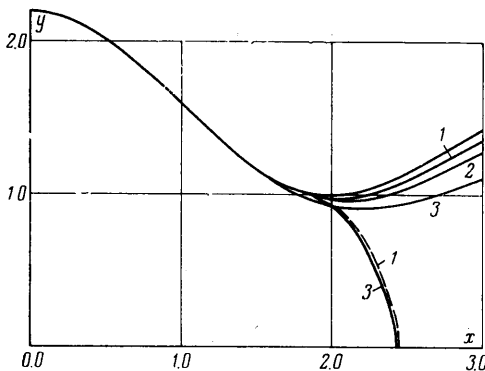
В качестве начальных условий для системы (1.1) выбирались результаты одномерных расчетов,  $\Gamma(x, 0) = \delta(x)$ .

Зависимость коэффициентов сопротивления  $C_R$ ,  $C_\alpha$  от параметров течения была выбрана следующей [4]:

$$\begin{aligned}
 & C_R = \frac{18\mu}{\delta_p d_p^2} [1 + 0.26 \cdot 10^{-3} \text{Re}^{4.38} + 0.197 \text{Re}^{0.63}] \\
 & C_\alpha = \frac{6\mu}{\delta_p d_p^2} \frac{c_p}{\text{Pr}} [2 + 0.459 \text{Pr}^{0.33} \text{Re}^{0.55}] \\
 & (\text{Re} = |U - U_p| d_p / \mu, \quad \mu = \mu_0 (T/T_0)^{0.71})
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

где  $\delta_p$  — плотность материала частицы,  $d_p$  — диаметр частицы,  $\mu$  — вязкость газа,  $c_p$  — теплоемкость газа при постоянном давлении,  $\text{Pr}$  — число Прандтля.

Для численного решения системы (1.1), (1.2) использовалась разностная схема совместного эйлево-лагранжева метода СЭЛ [3], имеющая второй порядок точности на гладких решениях. Предварительно области интегрирования  $F$  и  $\Phi$  переводили в прямоугольные с помощью следующей замены независимых переменных для газа и частиц соответственно:



Фиг. 1

$$(1.4) \quad \begin{aligned} x_1 &= x, & \xi &= y/\delta(x), \\ \tau &= t \\ x_1 &= x, & \psi &= y/\Gamma(x, t), \\ \tau &= t \end{aligned}$$

В работе [3] показано, что если якобианы  $J=D(x, y)/D(x_1, \xi)$  и  $J_1=-D(x, y)/D(x_1, \psi)$  не обращаются в нуль в областях интегрирования, то в переменных (1.4) система (1.1), (1.2) также может быть записана в виде законов сохранения. При этом для частиц появляется новая величина  $W(x, \tau) = (\partial/\partial\tau)\Gamma(x, \tau)$ , пред-

ставляющая собой скорость перемещения предельной линии частиц по оси  $Y$ . Ее значение определяется из кинематических условий на этой линии

$$(1.5) \quad W(x, \tau) = v(x, \Gamma(x, \tau), \tau) - u(x, \Gamma(x, \tau), \tau) (\partial/\partial x)\Gamma(x, \tau)$$

Исследования используемой разностной схемы показали, что значения тех параметров в правых частях системы (1.1), (1.2), которые входят в соответствующих уравнениях под знак  $\partial/\partial\tau$ , следует брать с  $(n+1)$ -го слоя по времени. В этом случае устойчивость схемы не зависит от значений коэффициентов  $C_R$  и  $C_a$  и определяется лишь числом Куранта [3].

Новое положение предельной линии на каждом шаге по времени определяется из уравнения (1.5), которое можно переписать так:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial\tau} \Gamma(x, \tau) + u(x, \Gamma(x, \tau), \tau) \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(x, \tau) = v(x, \Gamma(x, \tau), \tau) \end{aligned}$$

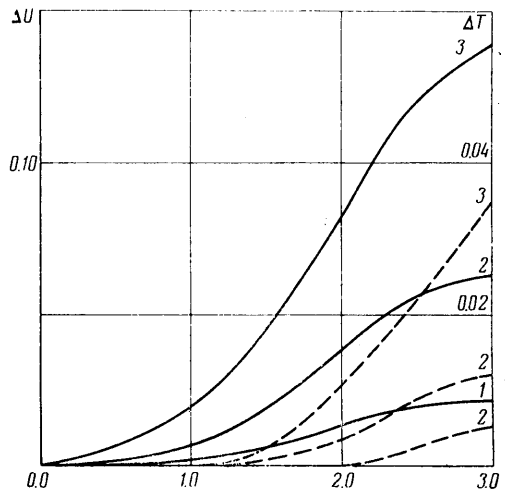
Для его решения используется неявная разностная схема бегущего счета ( $u > 0$ ) второго порядка точности по  $x$ .

При этом для всех  $x$ , где оказывалось  $\Gamma(x, \tau + \Delta\tau) > \delta(x)$ , полагалось  $\Gamma(x, \tau + \Delta\tau) = \delta(x)$ ,  $W(x, \tau + \Delta\tau) = 0$ , что соответствует налипанию частиц на стенку.

2. Проводились расчеты двухфазного течения в косинусоидально-коническом сопле Лавала с контуром

$$(2.1) \quad \delta(x) = \begin{cases} \frac{r_0 + r_*}{2} + \frac{r_0 - r_*}{2} \cos \pi \frac{x}{L_*}, & 0 \leq x \leq L_* \\ \delta(L_*) + (x - L_*) \left( \frac{d}{dx} \delta(x) \right) \Big|_{x=L_*}, & L_* \leq x \leq L \end{cases}$$

где  $L_*$  — расстояние до критического сечения,  $r_*$  — радиус критического сечения,  $r_0$  — радиус входного сечения сопла,  $L_1$  — точка сопряжения с конусом.



Фиг. 2

Значения параметров в (1.3), (2.1) были выбраны следующими:

$$\mu_0 = 0.824 \cdot 10^{-3} \text{ г/см·сек}, \quad \delta_p = 2.8 \text{ г/см}^3, \quad z = 0.236, \quad C/c_p = 0.75$$

$$\text{Pr} = 0.75, \quad r_* = 32.5 \text{ см}, \quad L_* = 65 \text{ см}, \quad L_1 = 81.25 \text{ см}$$

$$r_0 = 71.82 \text{ см}, \quad L = 107.5 \text{ см}, \quad k = 1.2, \quad d_p = 2.5, 5, 10 \text{ мк}$$

На фиг. 1 приведены контур сопла (размеры отнесены к  $r_*$ ) положения предельных линий и линий звука для различных размеров частиц. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям  $d = 2.5, 5$  и  $10 \text{ мк}$ . Длина контура в дозвуковой части, на которой частицы выпадают, достаточно велика. Так, для  $d_p = 5 \text{ мк}$  здесь выпадает до 1.5% весовой доли частиц. Звуковая линия с уменьшением размера частиц выносится дальше в сверхзвуковую часть сопла. Это обстоятельство объясняется тем, что при  $d_p \rightarrow 0$  (но  $z = \text{const}$ ) двухфазную среду можно рассматривать как газ с другим показателем адиабаты  $k_1 < k$ , причем скорость звука в таком газе оказывается большей ( $a_1 > a$ ).

На фиг. 2 приведены динамические  $\Delta u$  и тепловое  $\Delta T$  запаздывания частиц вдоль оси сопла ( $\Delta u = (u - u_p)/a_*$ ,  $\Delta T = (T_p - T)/T_0$ , где  $a_*$  — критическая скорость звука,  $T_0$  — температура торможения). Видно, что максимум потерь растет с ростом размеров частиц и смещается в сверхзвуковую часть сопла.

Распределение параметров потока по сечениям приведено на фиг. 3, где скорости отнесены к критической скорости звука, а плотность — к плотности торможения. Фиг. 3, а и б дают распределения параметров в сечениях  $x = 2.0$  и  $3.04$  соответственно для мелких частиц ( $d_p = 2.5 \text{ мк}$ ). Распределения параметров в тех же сечениях для частиц  $d_p = 10 \text{ мк}$  представлены на фиг. 3, в и г. Изменение плотности частиц «следит» за изменением плотности газа.

3. Разностная сетка имела размер  $60 \times 15$  в плоскостях  $x, \xi$  и  $x, \psi$ . Для установления течения требовалось около 1000 шагов по времени, что соответствовало  $\approx 40$  минутам машинного времени ЭВМ БЭСМ-6. Увеличение разностной сетки вдвое приводило к отличию в параметрах течения на 5–8 единиц четвертого знака после запятой.

Интегральные законы сохранения массы как газа, так и частиц выполнялись с точностью  $\approx 0.6\%$ .

Поступила 3 III 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Клизель Дж., Никерсон Г. Течение смеси газа и твердых частиц в осесимметричном сопле. Сб. «Детонация и двухфазное течение». М., «Мир», 1966.
2. Копченов В. И., Крайко А. Н., Ткаченко Р. А. Решение прямой задачи теории сопла Лавала для течения смеси газа с инородными частицами. Сб. «Специальные вопросы гидромеханики и газовой динамики двухфазных сред». Томск, 1971.
3. Васенин И. М., Рычков А. Д. Численное решение задачи о смешанном осесимметричном течении газа в некоторых криволинейных областях методом установления. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1.
4. Hoglund R. F. Recent advances in gas-particle nozzle flows. ARS Journal, 1962, vol. 32, No. 5.
5. Нох В. Ф. СЭЛ — совместный эйлево-лагранжев метод для расчета нестационарных двумерных задач. Сб. «Вычислительные методы в гидродинамике». М., «Мир», 1967.