

ЛИТЕРАТУРА

1. Бочвер Ф. М., Гармонов И. В., Лебедев А. В., Шестаков В. М. Основы гидрогеологических расчетов. М., «Недра», 1969.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., Гостехтеоретиздат, 1952.
3. Головцын В. Н. Электроразведка. Киев, Изд-во АН УССР, 1963.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнение математической физики. М., «Наука», 1966.
5. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, 2. М., «Наука», 1970.
7. Гороховский В. М., Чабан М. О. Определение коэффициентов фильтрации при откачках в установившемся режиме из n -слойного артезианского водоносного горизонта. Материалы первой научно-технической конференции молодых специалистов. Ростов-на-Дону, Offsetпечать Южгипроводхоза, 1970.
8. Гороховский В. М., Чабан М. О. Исключение ошибок измерений при откачках. Материалы первой научно-технической конференции молодых специалистов. Ростов-на-Дону, Offsetпечать Южгипроводхоза, 1970.
9. Грабштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм и произведений. М., Физматгиз, 1963.
10. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М., «Наука», 1965.
11. Усенко В. С. Вопросы теории фильтрационных расчетов дренажных и водозаборных скважин. М., «Наука», 1968.
12. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблица интегральных преобразований, т. 1. М., «Наука», 1969.

УДК 533.6

О МОДЕЛИ ВЯЗКОГО НЕРАВНОВЕСНОГО УДАРНОГО СЛОЯ
С ТОНКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

Г. Н. ЗАЛОГИН, В. В. ЛУНЕВ

(Москва)

В работе показано, что схема вязкого ударного слоя с граничными условиями на тонкой ударной волне в случае течения химически реагирующего газа неприемлема даже при больших числах Рейнольдса и может давать конечную погрешность в определении параметров ударного слоя.

При гиперзвуковом обтекании тупого тела вязким химически неравновесным газом толщины пограничного слоя и ударной волны могут иметь один порядок с невязким ударным слоем и образуют единый размазанный вязкий слой, течение в котором описывают обычно уравнениями Навье – Стокса с граничными условиями на бесконечности и на теле. Существует упрощенная двухслойная модель течения [1], в которой рассматривается вязкий ударный слой с обобщенными условиями Ренкина – Гюгонно на некоторой линии, являющейся как бы внутренней границей ударной волны. Для полной энтальпии и атомарной компоненты в бинарной смеси, если пренебречь химическими реакциями во внешней части размытой ударной волны, с учетом равенства $\rho v = \rho_0 V_0$ эти условия имеют вид

$$(1) \quad \rho_0 V_0 (H_s - H_0) = \left\{ \frac{\mu C_p}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} + \rho D (h_a + h_0 - h_m) \frac{\partial C}{\partial y} \right\}_s$$

$$(\rho v C)_s - \frac{\mu_s}{Sc} \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_s = \int_{-\infty}^s W dy \approx 0$$

Здесь y – координата, нормальная к телу, ρ – плотность, v – скорость, μ , D – коэффициенты вязкости и диффузии соответственно. Sc и Pr – числа Шмидта и Прандтля, W – объемная скорость образования атомарной компоненты, h_0 – энтальпия образования, h_a и h_m – энтальпия атомов и молекул соответственно, H_0 , V_0 , ρ_0 – энтальпия торможения, скорость и плотность набегающего потока. Обычно $h_0 \gg h_a - h_m$.

Однако известно очень много работ [2-10], в которых при численных расчетах применялась схема вязкого ударного слоя с граничными условиями на тонкой ударной волне

$$(2) \quad C=C_s=0, \quad H=H_s=H_0$$

в естественном, казалось бы, предположении, что эта модель применима при умеренных и больших числах Re , по крайней мере когда между ударной волной и пограничным слоем четко выявляется область невязкого течения.

Покажем, что такая модель не верна в принципе и может давать конечную погрешность в определении параметров невязкой части ударного слоя при любых числах Re . Для этого достаточно рассмотреть зону релаксации за прямым скачком уплотнения в бинарной смеси. По закону бинарного подобия толщина этой зоны имеет порядок $\delta \approx \alpha/\rho$, где α — постоянная, зависящая от сорта газа и скорости V_0 набегающего потока. Градиенты концентраций и температуры в этой зоне, в том числе и сразу за тонкой ударной волной, имеют порядок

$$(3) \quad \left| \frac{\partial C}{\partial y} \right| \sim \frac{C_e}{\delta} \sim \frac{C_e \rho}{\alpha}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} \sim \frac{T_p}{\alpha} \sim \frac{H_0 \rho}{C_p \alpha}$$

где C_e — равновесное значение концентрации на выходе из зоны релаксации.

Так как в рассматриваемой модели граничные условия на ударной волне фиксированы ($C_s=0$, $H_s=H_0$), то автоматическое применение уравнений переноса даст на ней поток тепла и диффузионный поток атомов

$$(4) \quad q = \frac{\mu C_p}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_s + \rho D \frac{\partial C}{\partial y} (h_a + h_0 - h_M) \sim \frac{\mu \rho}{\alpha} \left(\frac{H_0}{Pr} - \frac{C_e h_0}{Sc} \right)$$

$$j = \rho D \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_s \sim \frac{\mu C_e \rho}{Sc \alpha}$$

Таким образом, ударная волна как граница возмущенной зоны является источником (стоком) тепла и химической компоненты подобно тому, как в задачах теплопроводности к концу стержня необходимо подводить извне тепло для поддержания заданной граничной температуры. Этих потоков нет в более точной постановке. В рамках двухслойной модели, например, когда в качестве граничных условий используются законы сохранения (1), поток тепла и химической компоненты вверх по течению компенсируется обратным конвективным потоком.

Но в таком случае энтальпия торможения H_0' и равновесная концентрация C_e' на выходе из зоны релаксации в рамках схемы с условиями (2) должны отличаться от точных следующим образом:

$$(5) \quad \rho_0 V_0 (H_0' - H_0) = q, \quad \rho_0 V_0 (C_e' - C_e) \sim j$$

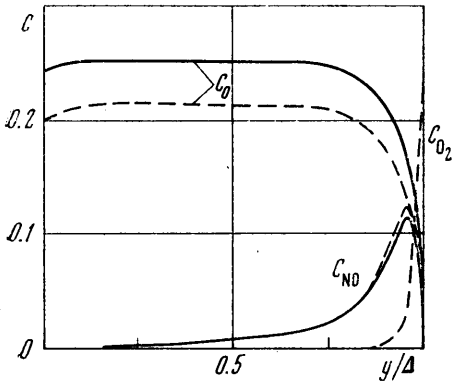
Первое равенство есть точное следствие закона сохранения тепла, второе — приближенное в силу сложного характера порождающей функции W .

Отсюда следует, что относительная погрешность рассматриваемой модели будет иметь порядок

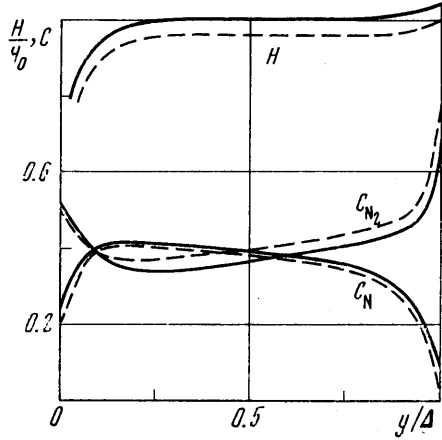
$$(6) \quad \varepsilon_c \sim \frac{j}{\rho_0 V_0 C_e} \sim \frac{\mu}{\alpha Sc V_0}, \quad \varepsilon_H \sim \frac{q}{\rho_0 V_0 H_0} \sim \frac{\mu}{V_0 \alpha} \left(\frac{1}{Pr} - \frac{C_e h_0}{Sc H_0} \right)$$

Эти погрешности исчезают с уменьшением вязкости, но не зависят от плотности потока. При полете в атмосфере на разных высотах числа Рейнольдса меняются в основном за счет плотности ρ_0 , так что ε остается постоянной при числах Re , больших такого, при котором в ударном слое значения концентраций близки к равновесным.

В подтверждение на фиг. 1, 2 показаны кривые массовых концентраций компонент и энтальпии торможения при обтекании затупленного тела воздухом ($V_0 = 7500$ м/сек) для обсуждаемой (пунктир) и двухслойной (сплошная) моделей течения для числа $Re_0 = 4.2 \cdot 10^4$, когда основная часть ударного слоя невязкая (статические температуры при этом почти не отличаются). Кислород в этом случае протермодиссоциировал полностью, а диссоциация азота еще продолжается.



Фиг. 1



Фиг. 2

В случае, если в ударном слое не достигается равновесие, погрешность такой модели оказывается весьма большой и возрастает с уменьшением числа Re , как Re^{-1} . Действительно, если Δ — толщина ударного слоя, то

$$\frac{\partial c}{\partial y} \sim \frac{c_{\max}}{\Delta},$$

$$\varepsilon_c \sim \frac{\mu_s}{Sc \rho_0 V_0 \Delta} \sim \frac{1}{Sc} \frac{1}{Re} \frac{R}{\Delta}$$

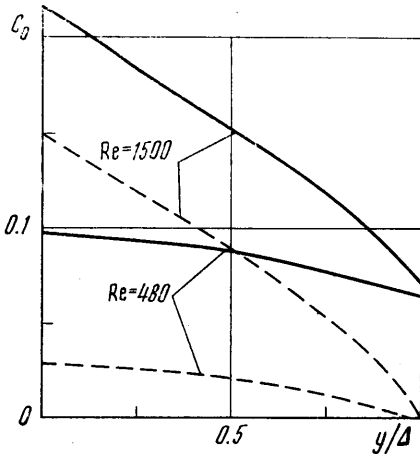
На фиг. 3 показано распределение концентраций атомарного кислорода для числа $Re_0 = 480$ и 1500 .

Наряду с рассмотренным эффектом следует отметить еще одну интересную особенность течения — элементарное разделение в ударном слое, связанное с многокомпонентным характером диффузии и неоднородностью течения. При использовании двухслойной модели течения не накладывается ограничений на значения концентраций и диффузионных потоков, кроме общепринятых $\sum C_i = 1$, $\sum j_i = 0$. Поэтому на границе, а также в зоне больших градиентов, возможно изменение элементарного состава за счет различия переносных свойств.

В численных расчетах граничное значение концентрации элемента кислорода получается равным 0.27 вместо 0.23 в набегающем потоке. В области малых градиентов нарушение элементарного состава может сохраняться. Для пояснения рассмотрим объем, представляющий собой усеченный конус с криволинейной образующей, которая совпадает по форме с линией тока. Со стороны набегающего потока и вязкой области объем ограничен площадками S_0 и S_1 . Площадки выбраны так, что диффузионные потоки через них пренебрежимо малы. Уравнение расхода химического элемента (например, кислорода) через поверхности, ограничивающие выделенный объем, имеет вид

$$C_0 \rho_0 V_0 S_0 = C_1 \rho_1 v_1 S_1 + j(S_1 - S_0)$$

Здесь j — средний диффузионный поток через боковую поверхность выделенного объема, индекс 1 относится к началу вязкой области, где диффузионные потоки пренебрежимо малы. В плоском случае рассматриваемый объем представляет собой цилиндр. При этом $S_1 = S_0$, $\rho_1 v_1 = \rho_0 V_0$, и нарушение элементарного состава в вязкой области невозможно. В осесимметричном случае $S_1 > S_0$ из-за искривления линий тока, из выделенного объема происходит отток элемента через боковую поверхность, и нарушение элементарного состава сохраняется и в вязкой части ударного слоя.



Фиг. 3

Этот эффект в отличие от разобранных выше исчезает с увеличением числа Re , поскольку при этом, как показано, величина $j/\rho_0 V_0 C_0 \sim \text{const}$, а величина $\Delta S = S_1 - S_0$ уменьшается пропорционально толщине релаксационной зоны.

Поступила 4 III 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cheng H. K.* The blunt — body problem in hypersonic flow at low Reynolds number. JAS paper, 1963, No. 63—92.
2. *Chung P. M.* Hypersonic viscous shock layer of nonequilibrium dissociating gas. NASA Rept TRR-108, 1961.
3. *Park*. The dissociating relaxation of viscous hypersonic shock layer. AIAA Journal, 1964, No. 7.
4. *Tong H., Suzuki B. H.* Stagnation point heat transfer to surfaces of arbitrary catalicity. AIAA Journal, 1964, No. 11.
5. *Tong H.* Nonequilibrium heat transfer at the stagnation point. AIAA Journal, 1965, No. 4.
6. *Chung P. M.* Weakly ionized nonequilibrium viscous shock layer and electrostatic probe characteristics. AIAA Journal, 1964, No. 5.
7. *Shih W. C. L., Krupp R. S.* Viscous nonequilibrium blunt body flow. AIAA Journal, 1967, No. 1.
8. *Adams J. C. Jr.* Thin viscous shock layer analysis of blunt body stagnation point air ionization. AIAA Journal, 1969, No. 2.
9. *Blottner F. G.* Viscous shock layer at the stagnation point with nonequilibrium air chemistry AIAA Journal, 1969, No. 12.
10. *Воронкин В. Г.* Неравновесное вязкое течение многокомпонентного газа в окрестности критической точки затупленного тела. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 2.

УДК 533.6.014

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ СМЕСИ ГАЗА И ЧАСТИЦ В ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОМ СОПЛЕ ЛАВАЛЯ

И. М. ВАСЕНИН, А. Д. РЫЧКОВ

(Томск)

Рассматривается прямая задача теории сопла Лавала для случая течения смеси газа и твердых частиц. Принятая двухскоростная модель движения такой среды [1] оправдывает себя при не слишком большой концентрации частиц.

В отличие от работы [2] в данной работе используется разностная схема второго порядка точности, устойчивость которой не зависит от численных значений коэффициентов сопротивления. Проведенные расчеты для ряда размеров частиц позволяют выяснить некоторые особенности такого течения.

1. Для решения поставленной задачи применяется метод установления, используемый авторами ранее [3] при решении прямой задачи теории сопла Лавала. Нестационарная система уравнений, описывающая движение смеси газа и частиц, записывается в виде законов сохранения

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \rho r + \frac{\partial}{\partial x} \rho r u + \frac{\partial}{\partial y} \rho r v = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \rho M + \frac{\partial}{\partial x} \rho M u + \frac{\partial}{\partial y} \rho M v + \frac{\partial}{\partial x} \rho p = \rho C_R \left(M_p - \frac{\rho_p}{\rho} M \right) \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \rho N + \frac{\partial}{\partial x} \rho N u + \frac{\partial}{\partial y} \rho N v + \frac{\partial}{\partial y} \rho p - p = \rho C_R \left(N_p - \frac{\rho_p}{\rho} N \right) \\
 (1.1) \quad & \frac{\partial}{\partial t} \rho e + \frac{\partial}{\partial x} \rho e u + \frac{\partial}{\partial y} \rho e v + p \left[\frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v \right] = \\
 & = \rho \rho_p \{ C_R [(u_p - u)^2 + (v_p - v)^2] - C_\alpha (T - T_p) \} \\
 & p = \varepsilon (k - 1)
 \end{aligned}$$