

ЛИТЕРАТУРА

1. Саггаров М. А. Некоторые модели фильтрации в пористых средах. Докл. АН СССР, 1972, т. 203, № 1.
2. Адам Н. К. Физика и химия поверхностей. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
3. Дерягин Б. В., Карасев В. В., Загаева Н. Н., Лазарев В. П. Механизм граничной смазки и свойства граничного смазочного слоя. Ж. техн. физ., 1957, т. 27, вып. 5.
4. Hayward A. T. J., Isdale J. D. The rheology of liquids very near to solid boundaries. Brit. J. Appl. Phys., 1969, Ser. 2, vol. 2, No. 2.
5. Kovacs G. Y. Theoretical investigation into micro-seepage. ACTA Techn. Acad. Sci. Hungaricae, 1958, vol. 21, No. 1—2.
6. Аверьянов С. Ф. Зависимость водопроницаемости почво-грунтов от содержания в них воздуха. Докл. АН СССР, 1949, т. 69, № 2.
7. Klausner Y., Kraft S. R. Non-poiseuille flow with axial forces. Israil J. Technol., 1965, vol. 3, No. 2, p. 152.
8. Шейдеггер А. Э. Физика течения жидкостей через пористые среды. М., Гостоптехиздат, 1960.
9. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917—1967). М., «Наука», 1969.
10. Бондаренко Н. Ф. Исследование фильтрационных аномалий жидкостей. Сб. тр. по агр. физ., вып. 14, Л., «Колос», 1967.
11. Рейнер М. Деформация и течение. М., Гостоптехиздат, 1963.
12. Горшков А. И. О предельном напряжении сдвига у жидкой воды. Ж. техн. физ., 1972, т. 42, вып. 1, стр. 224.
13. Childs E. C., Trimas E. Darcy's law at small potential gradients. J. Soil. Sci., 1971, vol. 22, No. 3.
14. Роде А. А. Основы учения о почвенной влаге. Водные свойства почв и передвижение почвенной влаги, т. 1. Л., Гидрометеиздат, 1965.

УДК 532.546

**ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ФОРМИРОВАНИЯ НАПОРОВ ПОДЗЕМНЫХ ВОД
В ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ ПОД ВЛИЯНИЕМ ТОЧЕЧНОГО
И ЛИНЕЙНОГО СТОКОВ**

В. С. УСЕНКО, М. О. ЧАБАН

(Минск)

Для решения задачи об учете влияния границы раздела на распределение напора, формируемого точечным источником, применяется так называемый «метод зеркальных отображений» [1, 2]. Здесь эта задача решается методом краевых задач.

Пусть двухслойный напорный пласт представлен разрезом, приведенным на фиг. 1. Распределение напора в однородном слое при стационарном движении описывается уравнением Лапласа. Так как источник точечный, а пласты однородны и изотропны, то напоры в первом и втором слоях с учетом осевой симметрии движения подчиняются уравнениям [2]

$$(1) \quad \frac{\partial^2 H_i}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_i}{\partial r} + \frac{\partial H_i}{\partial r^2} = 0 \quad (i=1, 2)$$

Дополним уравнения граничными условиями. Поверхность $z=0$ является поверхностью тока

$$(2) \quad \left. \frac{\partial H_1}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$$

на границе слоев

$$(3) \quad H_1|_{z=z_1} = H_2|_{z=z_1}, \quad k_1 \left. \frac{\partial H_1}{\partial z} \right|_{z=z_1} = k_2 \left. \frac{\partial H_2}{\partial z} \right|_{z=z_1}$$

Во всей области, кроме особой точки, в которой находится сток интенсивностью q , напор должен быть ограниченным

$$|H_i| < M < \infty \quad (i=1, 2)$$

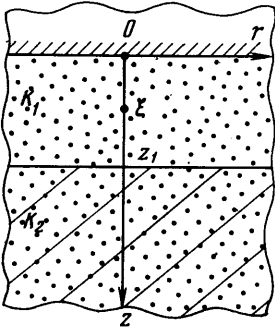
На бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} H_i = 0 \quad (i=1, 2), \quad \lim_{z \rightarrow \infty} H_2 = 0$$

В итоге получим две краевые задачи для функций $H_1(r, z)$ и $H_2(r, z)$, которые будем решать совместно [3].

Будем решать задачу методом Фурье [4], выделяя особенность в точке, где расположен сток. Рассмотрим два частных случая.

Пусть сток расположен в первом слое, на глубине ξ от его кровли, тогда



Фиг. 1

$$(4) \quad H_1(r, z) = \frac{q}{4\pi k_1} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - \xi)^2}} + \int_0^\infty A_1(\lambda) I_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda + \int_0^\infty B_1(\lambda r) I_0(\lambda r) e^{\lambda z} d\lambda$$

$$H_2(r, z) = \int_0^\infty A_2(\lambda) I_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda$$

Для определения функций $A_1(\lambda)$, $B_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda)$ используем условия (2) и (3). Используя представление Вебера [5]

$$(5) \quad \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - \xi)^2}} = \int_0^\infty I_0(\lambda r) e^{\mp \lambda(z - \xi)} d\lambda$$

получим систему трех уравнений для функций $A_1(\lambda)$, $B_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda)$. Эта система неоднородная, ее определитель не равен нулю, следовательно, она имеет единственное решение, подставив которое в выражения (4) и применив представление [6]

$$(6) \quad \frac{1}{1 - k_{12} e^{-2\lambda z_1}} = \sum_{n=0}^\infty (k_{12} e^{-2\lambda z_1})^n$$

получим

$$(7) \quad H_1(r, z) = \frac{q}{4\pi k_1} \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{k_{12}^{|n|}}{\sqrt{r^2 + (z \pm \xi + 2nz_1)^2}}$$

$$k_{12} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$$

$$H_2(r, z) = \frac{q(k_{12} + 1)}{4\pi k_1} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z \pm \xi + 2nz_1)^2}}$$

Функции (7) описывают распределение напора в любой точке рассматриваемой двухслойной среды.

Пусть теперь сток расположен во втором слое. В этом случае особенность выделяем в функции H_2 и решение ищем в виде

$$(8) \quad H_1(r, z) = \int_0^\infty A_1(\lambda) I_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda + \int_0^\infty B_1(\lambda) I_0(\lambda r) e^{\lambda z} d\lambda$$

$$H_2(r, z) = \frac{q}{4\pi k_2} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - \xi)^2}} + \int_0^\infty A_2(\lambda) I_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda$$

Граничные условия (2) и (3) дают систему трех уравнений для функций $A_1(\lambda)$, $B_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda)$.

Как и раньше, система имеет единственное решение, после подстановки которого в (8), с применением (6) получим

$$\begin{aligned}
 H_1(r, z) &= \frac{q(1-k_{12})}{4\pi k_2} \sum_{n=0}^{\infty} k_{12}^n \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+\xi+2nz_1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-\xi-2nz_1)^2}} \right] \\
 H_2(r, z) &= \frac{q}{4\pi k_2} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-\xi)^2}} - \frac{k_{12}}{\sqrt{r^2 + (z+\xi-2z_1)^2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-k_{12}^2)k_{12}^n}{\sqrt{r^2 + (z+\xi+2nz_1)^2}} \right]
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Можно убедиться, что если источник расположен на границе слоев $\xi=z_1$, то формулы (7) и (9) дают одинаковый результат.

Если требуется определить напор, создаваемый линейным стоком, дебит которого Q , а длина — σ — a на фиг. 2, то выделяют на линейном стоке по глубине ξ участок элементарной длины $d\xi$, расход которого $q=Qd\xi/(b-a)^{-1}$. Считая этот сток точечным, из (7) получим выражения для dH_1 и dH_2 .

Проинтегрировав по длине фильтра, получим формулы для напора от линейного стока

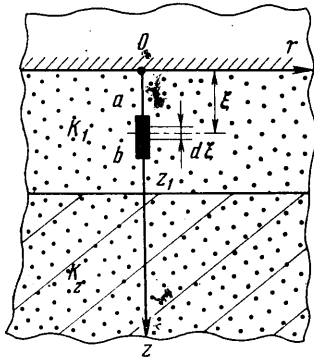
$$\begin{aligned}
 H_1(r, z) &= \frac{Q}{4\pi k_1(b-a)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_{12}^{|n|} \times \\
 &\times \ln \left| \frac{z+b+2nz_1+\sqrt{r^2+(z+b+2nz_1)^2}}{z-b+2nz_1+\sqrt{r^2+(z-b+2nz_1)^2}} \frac{z-a+2nz_1+\sqrt{r^2+(z-a+2nz_1)^2}}{z+a+2nz_1+\sqrt{r^2+(z+a+2nz_1)^2}} \right| \\
 H_2(r, z) &= \frac{Q(k_{12}+1)}{4\pi k_1(b-a)} \sum_{n=0}^{\infty} k_{12}^n \ln \left| \frac{z+b+2nz_1+\sqrt{r^2+(z+b+2nz_1)^2}}{z-b+2nz_1+\sqrt{r^2+(z-b+2nz_1)^2}} \times \right. \\
 &\times \left. \frac{z-a+2nz_1+\sqrt{r^2+(z-a+2nz_1)^2}}{z+a+2nz_1+\sqrt{r^2+(z+a+2nz_1)^2}} \right|
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Проводя аналогичные рассуждения для (9), найдем напор от линейного стока, расположенного во второй среде

$$\begin{aligned}
 H_1(r, z) &= \frac{Q(1-k_{12})}{4\pi k_2(b-a)} \sum_{n=0}^{\infty} k_{12}^n \ln \left| \frac{z+b+2nz_1+\sqrt{r^2+(z+b+2nz_1)^2}}{z+a+2nz_1+\sqrt{r^2+(z+a+2nz_1)^2}} \times \right. \\
 &\times \left. \frac{z-a-2nz_1+\sqrt{r^2+(z-a-2nz_1)^2}}{z-b-2nz_1+\sqrt{r^2+(z-b-2nz_1)^2}} \right| \\
 H_2(r, z) &= \frac{Q}{4\pi k_2(b-a)} \left[\ln \left| \frac{z-a+\sqrt{r^2+(z-a)^2}}{z-b+\sqrt{r^2+(z-b)^2}} \right| - \right. \\
 &- k_{12} \ln \left| \frac{z+b-2z_1+\sqrt{r^2+(z+b-2z_1)^2}}{z+a-2z_1+\sqrt{r^2+(z+a-2z_1)^2}} \right| + \\
 &\left. + \sum_{n=0}^{\infty} k_{12}^n (1-k_{12}^2) \ln \left| \frac{z+b+2nz_1+\sqrt{r^2+(z+b+2nz_1)^2}}{z+a+2nz_1+\sqrt{r^2+(z+a+2nz_1)^2}} \right| \right]
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Полученные ряды (7) и (9) сходятся, так как мажорируются сходящимся рядом $\sum_{n=0}^{\infty} k_{12}^n$, где $|k_{12}| < 1$. Ряды (10) и (11) также сходятся, потому что получены из рядов (7) и (9) интегрированием [6].

При $k_{12}=1$ второй слой представлен водоупором. В этом случае ряды (7) и (9) расходятся, однако ряды для разностей напоров в двух скважинах, находящихся на конечном расстоянии друг от друга, сходятся. На ЭВМ «Наири» в институте Южгипроводхоз по формулам (7) и (9) были подсчитаны разности напоров для конкретных примеров. Такие подсчеты говорят о том, что для определения разностей напоров в двух точках пласта достаточно брать менее 5-10 первых членов ряда. Однако оценка погрешности, которую дает отброшенная часть ряда, затруднена. Поэтому для практического использования полученных результатов их необходимо упростить. Некоторые практические приложения полученных формул для решения обратных задач гидрогеологии имеются в работах [7, 8].



Фиг. 2

Рассмотрим еще один метод разложения решений (7) и (9) в ряд, отличный от биномиального ряда (6).

В интеграле

$$T = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda u} I_0(\lambda r)}{1 - k_{12} e^{-2\lambda z_1}} d\lambda$$

разложим знаменатель в ряд Маклорена по λ [6]. Подставив это разложение в интеграл T и поменяв порядок интегрирования и суммирования, с учетом представления [9] найдем

$$(12) \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda u} I_0(\lambda r)}{1 - k_{12} e^{-2\lambda z_1}} d\lambda = \frac{1}{1 - k_{12}} \frac{1}{\sqrt{r^2 + u^2}} + k_{12} \sum_{n=1}^{\infty} (-2z_1)^n (1 - k_{12})^{-n-1} (r^2 + u^2)^{-(n-1)/2} P_n \left(\frac{u}{\sqrt{r^2 + u^2}} \right) \times \sum_{i=0}^{n-1} [(n-i) a_{i-1}^{n-1} + (i+1) a_i^{n-1}] k_{12}^i$$

Здесь $P_n(x)$ — полиномы Лежандра [10]. Принимая, что

$$u_1 = z + \xi, \quad u_2 = z - \xi, \quad u_3 = z - \xi + 2z_1, \quad u_4 = b - \xi - 2z_1$$

получим искомое разложение решения (7), когда сток находится в верхнем пласте

$$(13) \quad H_1(r, z) = \frac{Q}{4\pi k_1} \sum_{m=1}^4 \left\{ \frac{1}{1 - k_{12}} \frac{1}{\sqrt{r^2 + u_m^2}} + k_{12} \sum_{n=1}^{\infty} (-2z_1)^n (1 - k_{12})^{-n-1} (r^2 + u_m^2)^{-(n-1)/2} \times \sum_{i=0}^{n-1} [(n-i) a_{i-1}^{n-1} + (i+1) a_i^{n-1}] k_{12}^i \right\}$$

$$H_2(r, z) = \frac{Q(k_{12}+1)}{4\pi k_1} \sum_{m=1}^2 \left\{ \frac{1}{1-k_{12}} \frac{1}{\sqrt{r^2+u_m^2}} + \right. \\ \left. + k_{12} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2z_1)^n}{(1-k_{12})^{n+1} (r^2+u_m^2)^{(n+1)/2}} P_n \left(\frac{u_m}{\sqrt{r^2+u_m^2}} \right) \times \right. \\ \left. \times \sum_{i=0}^{n-1} [(n-i)a_{i-1}^{n-1} + (i+1)a_i^{n-1}] k_{12}^i \right\}$$

Аналогичное разложение может быть получено и для решения (9) (источник расположен во второй среде)

$$(14) \quad H_1(r, z) = \frac{Q(1-k_{12})}{4\pi k_2} \sum_{m=1}^2 \left\{ \frac{1}{1-k_{12}} \frac{1}{\sqrt{r^2+u_m^2}} + \right. \\ \left. + k_{12} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2z_1)^n (1-k_{12})^{-n-1} (r^2+u_m^2)^{-(n-1)/2}}{P_n \left(\frac{u_m}{\sqrt{r^2+u_m^2}} \right)} \times \right. \\ \left. \times \sum_{i=0}^{n-1} [(n-i)a_{i-1}^{n-1} + (i+1)a_i^{n-1}] k_{12}^i \right\} \\ H_2(r, z) = \frac{Q}{4\pi k_2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2+(z-\xi)^2}} + \sum_{m=1,3} \left\{ \frac{1}{1-k_{12}} \frac{1}{\sqrt{r^2+u_m^2}} + \right. \right. \\ \left. \left. + k_{12} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2z_1)^n (1-k_{12})^{-n-1} (r^2+u_m^2)^{-(n-1)/2}}{P_n \left(\frac{u_m}{\sqrt{r^2+u_m^2}} \right)} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sum_{i=0}^{n-1} [(n-i)a_{i-1}^{n-1} + (i+1)a_i^{n-1}] k_{12}^i \right\} \right\}$$

Ряд (12), а следовательно, и ряды в решениях (13) и (14) сходятся при $k_{12} < 1$. Отметим, что при малых значениях z_1 или при больших r ряд сходится быстро и для вычислений достаточно взять первые 1-2 члена. Например, пусть

$$z = \xi = 0, \quad Q = 4\pi \text{ м}^3/\text{сут.} \quad z_1 = 4 \text{ м}, \quad k_1 = 0.5 \text{ м/сут.}, \quad k_2 = 2.0 \text{ м/сут.}$$

Тогда $H_2 = 2(0.2 - 0.03 + 0.004 - \dots) = 0.34 \text{ м}$ с точностью 0.008 м. В расчете использовался только один член ряда - 0.03.

Для получения формул, удобных в инженерных расчетах, применим метод, изложенный в работе [14]. Упрощение проведем для следующих двух случаев.

Пусть значение r невелико

$$\left| \frac{r}{u_i} \right| < 1 \quad (u_1 = z - \xi + 2nz_1, \quad u_2 = z + \xi + 2nz_1, \quad u_3 = z - \xi - 2nz_1, \\ u_4 = z + \xi - 2nz_1)$$

Разложим в биномиальный ряд [6] выражение $(r^2+u^2)^{-1/2}$. По признаку Даламбера [6] при $|r/u| < 1$ ряд сходится, а при $|r/u| > 1$ расходится. В определении $H_1(r, z)$ допускаем ошибку

$$\delta H_1 < \frac{Q}{4\pi k_1} \frac{1}{2r} \sum_{n=1}^{\infty} k_{12}^{2n} \sum_{i=1}^4 \left(\frac{r}{u_i} \right)^3 < \frac{Q}{4\pi k_1} \frac{2}{r} \sum_{n=1}^{\infty} k_{12}^{2n} = \frac{Q}{4\pi k_1 r} \frac{1-k_{12}+k_{12}^2}{1-k_{12}}$$

а в определении H_2 ошибка не превышает

$$\delta H_2 \leq \frac{Q(k_{12}+1)}{4\pi k_1} \frac{1}{2r} \sum_{n=0}^{\infty} k_{12}^{2n} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{r}{u_i} \right)^3 < \frac{Q(k_{12}+1)}{4\pi k_1 r} \frac{1}{1-k_{12}}$$

Обозначим

$$\frac{z-\xi}{2z_1} = v_1, \quad \frac{z+\xi}{2z_1} = v_2, \quad -\frac{z-\xi}{2z_1} = v_3, \quad -\frac{z+\xi}{2z_1} = v_4$$

и рассмотрим сумму

$$(15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_{12}^n}{v+n} = \sum_{m=v+1}^{\infty} \frac{k_{12}^{m-v}}{m} < \frac{1}{k_{12}^v} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{12}^m}{m} = k_{12}^{-v} \ln \frac{1}{1-k_{12}}$$

Здесь использовано разложение $\ln(1-x)$ в степенной ряд [6] с учетом того, что $|k_{12}| < 1$.

Подставив сумму (15) в (7), получим формулы, удобные для инженерных расчетов

$$(16) \quad H_1(r, z) = \frac{Q}{4\pi k_1} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-\xi)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+\xi)^2}} - \frac{\ln(1-k_{12})}{2z_1} \times \right. \\ \left. \times (k_{12}^{-(z+\xi)/2z_1} - k_{12}^{(z-\xi)/2z_1}) \right] \\ H_2(r, z) = \frac{Q(k_{12}+1)}{4\pi k_1} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-\xi)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+\xi)^2}} - \frac{\ln(1-k_{12})}{2z_1} k_{12}^{-(z+\xi)/2z_1} \right]$$

Для определения суммы (15) можно применить следующий приближенный метод:

$$(17) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_{12}^n}{v+n} \approx \int_1^{\infty} \frac{k_{12}^x}{v+x} dx = k_{12}^{-v} \int_{v+1}^{\infty} \frac{k_{12}^z}{z} dz = -k_{12}^{-v} \text{Ei}[(v+1) \ln |k_{12}|]$$

Здесь $z=v+x$, а $E_i(x)$ — интегральная экспонента [12].

Используя полученные выражения, можно упростить и решение (9) (сток расположен во втором слое)

$$(18) \quad H_1(r, z) = \frac{Q(1-k_{12})}{4\pi k_2} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-\xi)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+\xi)^2}} - \right. \\ \left. - \frac{\ln(1-k_{12})}{2z_1} (k_{12}^{-(z+\xi)/2z_1} k_{12}^{(z-\xi)/2z_1}) \right] \\ H_2(r, z) = \frac{Q}{4\pi k_2} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-\xi)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+\xi-2z_1)^2}} + \right. \\ \left. + \frac{1-k_{12}}{\sqrt{r^2 + (z+\xi)^2}} + \frac{(1-k_{12}^2) \ln(1-k_{12})}{2z_1} k_{12}^{-(z+\xi)/2z_1} \right]$$

Далее рассмотрим второй случай, когда расстояние точки наблюдения от центральной скважины (r) достаточно велико. Начиная с некоторого номера $n=m$, отношение $|u_i/r| > 1$. Этот номер определяется выражением

$$m = E((r+z+\xi)/2z_1) + 1,$$

где $E(x)$ — целая часть x [6].

В соответствии с этим разобьем каждую сумму в решении (7) на две суммы

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^m a_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$$

Для первой из этих сумм найдем среднее значение дроби ($n=1, 2, \dots, m$) и обозначим его через $f(u_i)$

$$(19) \quad f(u_i) = \frac{1}{m-1} \int_1^m \frac{dx}{\sqrt{r^2 + (z \pm \xi \pm 2xz_1)^2}} =$$

$$= \pm \frac{1}{(m-1)2z_1} \ln \left| \frac{z \pm \xi \pm 2mz_1 + \sqrt{r^2 + (z \pm \xi \pm 2mz_1)^2}}{z \pm \xi \pm 2z_1 + \sqrt{r^2 + (z \pm \xi \pm 2z_1)^2}} \right|$$

знак перед всем выражением тот же, что и перед $2mz_1$. Из свойства геометрической прогрессии

$$\sum_{n=1}^m k_{12}^n = k_{12} \frac{k_{12}^m - 1}{k_{12} - 1} \quad \text{при} \quad |k_{12}| < 1$$

Тогда

$$(20) \quad \sum_{n=1}^m \frac{k_{12}^n}{\sqrt{r^2 + (z \pm \xi \pm 2nz_1)^2}} = f(U_i) k_{12} \frac{k_{12}^m - 1}{k_{12} - 1}$$

Другую сумму приближенно заменим интегралом (17), проведя упрощения, как для случая малых r

$$(21) \quad \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{k_{12}^n}{\sqrt{r^2 + (z \pm \xi \pm 2nz_1)^2}} \approx \frac{1}{2z_1} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{k_{12}^n}{v+n} = -k_{12}^{-v} \text{Ei}[(v+m+1) \ln |k_{12}|]$$

Таким образом, при больших значениях r решение (7) можно привести к упрощенному виду

$$(22) \quad H_1(r, z) = \frac{Q}{4\pi k_1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + \xi)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - \xi)^2}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^4 \frac{k_{12}(k_{12}^m - 1)}{k_{12} - 1} f(U_i) - \frac{k_{12}^{-v_i}}{2z_1} \text{Ei}[(v_i + m + 1) \ln |k_{12}|] \right\}$$

$$H_2(r, z) = \frac{Q(k_{12} + 1)}{4\pi k_1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + \xi)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - \xi)^2}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^2 \frac{k_{12}(k_{12}^m - 1)}{k_{12} - 1} f(u_i) - \frac{k_{12}^{-v_i}}{2z_1} \text{Ei}[(v_i + m + 1) \ln |k_{12}|] \right\}$$

Обратим внимание на то, что k_{12} может принимать отрицательные значения, однако расчетные зависимости при этом не изменяются.

Аналогичный результат получим, проводя выкладки для больших значений r в формулах (9) для стока, расположенного в подстилающем слое

$$(23) \quad H_1(r, z) = \frac{Q(1 - k_{12})}{4\pi k_2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + \xi)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - \xi)^2}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^2 \frac{k_{12}(k_{12}^m - 1)}{k_{12} - 1} f(U_i) - \frac{k_{12}^{-v_i}}{2z_1} \text{Ei}[(v_i + m + 1) \ln |k_{12}|] \right\}$$

$$H_2(r, z) = \frac{Q}{4\pi k_2} \left\{ \frac{1-k_{12}}{\sqrt{r^2+(z+\xi)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2+(z-\xi)^2}} + \frac{k_{12}}{\sqrt{r^2+(z+\xi-2z_1)^2}} - \right. \\ \left. -k_{12}(k_{12}+1)(k_{12}^m-1)f(u_2) - \frac{1-k_{12}^2}{2z_1} k_{12}^{-v_2} \text{Ei}[(v_2+m+1)\ln|k_{12}|] \right\}$$

Полученные зависимости (16), (18), (22), (23) можно использовать для расчета инфильтрации из круговых в плане бассейнов в двухслойных средах и вывода формул для расчета работы линейных каптажей в двухслойных средах в безграничных по простиранию пластах, а также расчета инфильтрации из скважин в двухслойную бесконечную по площади толщу (нижний пласт имеет безграничную мощность).

Чтобы получить расчетные зависимости для линейного вертикального стока (источника), необходимо вдоль этого источника равномерно распределить точечные источники и проинтегрировать выражение для функции напора вдоль линейного источника длиной $\epsilon-a$.

Для линейного стока, расположенного в первом пласте, после интегрирования выражений (16) для малых r получим

$$(24) \quad H_1(r, z) = \frac{Q}{4\pi k_1(b-a)} \left[\ln \left| \frac{z+b+\sqrt{r^2+(z+b)^2}}{z-b+\sqrt{r^2+(z-b)^2}} \frac{z-a+\sqrt{r^2+(z-a)^2}}{z+a+\sqrt{r^2+(z+a)^2}} \right| - \right. \\ \left. - \frac{\ln(1-k_{12})}{\ln|k_{12}|} \left(k_{12}^{(b+z)/2z_1} - k_{12}^{-(b+z)/2z_1} + k_{12}^{-(a+z)/2z_1} - k_{12}^{(a+z)/2z_1} \right) \right]$$

$$H_2(r, z) = \frac{Q(k_{12}+1)}{4\pi k_1(b-a)} \left[\ln \left| \frac{z+b+\sqrt{r^2+(z+b)^2}}{z-b+\sqrt{r^2+(z-b)^2}} \frac{z-a+\sqrt{r^2+(z-a)^2}}{z+a+\sqrt{r^2+(z+a)^2}} \right| - \right. \\ \left. - \frac{\ln(1-k_{12})}{\ln|k_{12}|} \left(k_{12}^{-(z-b)/2z_1} - k_{12}^{-(z-a)/2z_1} - k_{12}^{-(z+b)/2z_1} + k_{12}^{-(z+a)/2z_1} \right) \right]$$

Если сток расположен в подстилающем пласте, то функцию напора для малых r определяем аналогично (24)

$$(25) \quad H_1(r, z) = \frac{Q(1-k_{12})}{4\pi k_1(b-a)} \left[\ln \left| \frac{z+b+\sqrt{r^2+(z+b)^2}}{z-b+\sqrt{r^2+(z-b)^2}} \frac{z-a+\sqrt{r^2+(z-a)^2}}{z+a+\sqrt{r^2+(z+a)^2}} \right| - \right. \\ \left. - \frac{\ln(1-k_{12})}{\ln|k_{12}|} \left(k_{12}^{-(z+a)/2z_1} - k_{12}^{-(z+b)/2z_1} + k_{12}^{(z-b)/2z_1} - k_{12}^{(z-a)/2z_1} \right) \right]$$

$$H_2(r, z) = \frac{Q}{4\pi k_1(b-a)} \left[\ln \left| \frac{z-a+\sqrt{r^2+(z-a)^2}}{z-b+\sqrt{r^2+(z-b)^2}} \right| - \right. \\ \left. - k_{12} \ln \left| \frac{z+b-2z_1+\sqrt{r^2+(z+b-2z_1)^2}}{z+a-2z_1+\sqrt{r^2+(z+a-2z_1)^2}} \right| + \right. \\ \left. + (1-k_{12}) \ln \left| \frac{z+b+\sqrt{r^2+(z+b)^2}}{z+a+\sqrt{r^2+(z+a)^2}} \right| - \frac{(1-k_{12})^2 \ln(1-k_{12})}{\ln|k_{12}|} \times \right. \\ \left. \times \left(k_{12}^{-(z+a)/2z_1} - k_{12}^{-(z+b)/2z_1} \right) \right]$$

При больших r целесообразно линейный сток (источник) заменить сосредоточенным в центре линейного источника равнодебитным точечным источником и для нахождения напора в пластах пользоваться формулами (22) и (23).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бочвер Ф. М., Гармонов И. В., Лебедев А. В., Шестаков В. М. Основы гидрогеологических расчетов. М., «Недра», 1969.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., Гостехтеоретиздат, 1952.
3. Головцын В. Н. Электроразведка. Киев, Изд-во АН УССР, 1963.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнение математической физики. М., «Наука», 1966.
5. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, 2. М., «Наука», 1970.
7. Гороховский В. М., Чабан М. О. Определение коэффициентов фильтрации при откачках в установившемся режиме из n -слойного артезианского водоносного горизонта. Материалы первой научно-технической конференции молодых специалистов. Ростов-на-Дону, Offsetпечать Южгипроводхоза, 1970.
8. Гороховский В. М., Чабан М. О. Исключение ошибок измерений при откачках. Материалы первой научно-технической конференции молодых специалистов. Ростов-на-Дону, Offsetпечать Южгипроводхоза, 1970.
9. Грабштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм и произведений. М., Физматгиз, 1963.
10. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М., «Наука», 1965.
11. Усенко В. С. Вопросы теории фильтрационных расчетов дренажных и водозаборных скважин. М., «Наука», 1968.
12. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблица интегральных преобразований, т. 1. М., «Наука», 1969.

УДК 533.6

О МОДЕЛИ ВЯЗКОГО НЕРАВНОВЕСНОГО УДАРНОГО СЛОЯ
С ТОНКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

Г. Н. ЗАЛОГИН, В. В. ЛУНЕВ

(Москва)

В работе показано, что схема вязкого ударного слоя с граничными условиями на тонкой ударной волне в случае течения химически реагирующего газа неприемлема даже при больших числах Рейнольдса и может давать конечную погрешность в определении параметров ударного слоя.

При гиперзвуковом обтекании тупого тела вязким химически неравновесным газом толщины пограничного слоя и ударной волны могут иметь один порядок с невязким ударным слоем и образуют единый размазанный вязкий слой, течение в котором описывают обычно уравнениями Навье – Стокса с граничными условиями на бесконечности и на теле. Существует упрощенная двухслойная модель течения [1], в которой рассматривается вязкий ударный слой с обобщенными условиями Ренкина – Гюгонно на некоторой линии, являющейся как бы внутренней границей ударной волны. Для полной энтальпии и атомарной компоненты в бинарной смеси, если пренебречь химическими реакциями во внешней части размытой ударной волны, с учетом равенства $\rho v = \rho_0 V_0$ эти условия имеют вид

$$(1) \quad \rho_0 V_0 (H_s - H_0) = \left\{ \frac{\mu C_p}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} + \rho D (h_a + h_0 - h_m) \frac{\partial C}{\partial y} \right\}_s$$

$$(\rho v C)_s - \frac{\mu_s}{Sc} \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_s = \int_{-\infty}^s W dy \approx 0$$

Здесь y – координата, нормальная к телу, ρ – плотность, v – скорость, μ , D – коэффициенты вязкости и диффузии соответственно. Sc и Pr – числа Шмидта и Прандтля, W – объемная скорость образования атомарной компоненты, h_0 – энтальпия образования, h_a и h_m – энтальпия атомов и молекул соответственно, H_0 , V_0 , ρ_0 – энтальпия торможения, скорость и плотность набегающего потока. Обычно $h_0 \gg h_a - h_m$.