УДК 532.546

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ПЛАСТА С ПРИМЕНЕНИЕМ МОДУЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

И. Б. БАСОВИЧ

(*Москва*)

В работе рассматривается задача об определении параметров пласта методом модулирующих функций. Отмечаются недостатки метода, связанные с произволом в выборе модулирующих функций. Предлагается новый способ определения параметров и дается оценка для разности точных и приближенных значений параметров пласта.

Следуя идее работы [1], в работах [2, 3] был развит метод модулирующих функций для определения гидрогеологических параметров пласта.

Другие авторы применяли эту методику к определению параметров задачи о рассолении почвогрунтов [4]. Однако правомерность применения этого метода требует дополнительного анализа.

В работе [3] обсуждался вопрос об оптимальном выборе модулирующих функций. Здесь приводятся дополнительные соображения по этому поводу. Будем рассматривать уравнение фильтрации

$$\partial h / \partial t = \varkappa \Delta h^2 - \lambda (h - H) + \mu \tag{1}$$

$$\varkappa = k / 2\sigma, \quad \lambda = k_0 / M_0 \sigma, \quad \mu = \omega / \sigma, \quad \Delta = (\partial / \partial x^2 + \partial / \partial y^2)$$

где $h(xyt) = z$ — уравнение свободной поверхности, ω — величина инфильтрации, k и k_0 — коэффициенты фильтрации основного и слабопроницаемого слоя соответственно, M_0 — мощность водоупора, σ — водоотдача и H — напор в нижнем пласте. Однако все рассуждения применимы и к случаю линеаризованного уравнения, в котором Δh^2 заменяется на Δh, и к частным случаям уравнения (1).

Сущность метода модулирующих функций состоит в следующем. Пусть в параллелепипеде $\Pi = [0T] \times [0a] \times [0b]$ известно решение уравнения (1). Обе части (1) умножаются на функции вида

$$\Phi_i(xyt) = \psi_i(t) \varphi_i(x) \chi_i(y)$$

$$\psi_i(0) = \psi_i(T) = \varphi_i(0) = \varphi_i(a) = \varphi_i'(0) = \varphi_i'(a) =$$
$$= \chi_i(0) = \chi_i(b) = \chi_i'(0) = \chi_i'(b) = 0 \qquad (i=1,2,3)$$

и интегрируются по частям в параллелепипеде П. После интегрирования получаем систему линейных уравнений

$$M_i = \varkappa N_i - (P_i - HQ_i)\lambda + Q_i \mu$$
$$M_i = -(\partial \Phi_i / \partial t,\ h), \quad N_i = (\Delta \Phi_i, h^2) \qquad (i=1,2,3)$$
$$P_i = (\Phi_i, h), \quad Q_i = (\Phi_i, 1)$$

$$(f, \psi) = \int_0^T \int_0^a \int_0^b f(xyt) \psi(xyt)\, dx\, dy\, dt$$

Решение этой системы дает требуемые параметры $\varkappa$, λ, μ. Прежде всего установим, всегда ли по решению уравнения (1) можно однозначно определить коэффициенты $\varkappa$, λ, μ.

Если найдется функция $h(xyt)$, удовлетворяющая (1) при различных наборах $\varkappa$, λ, μ и $\varkappa'$, λ', μ', тогда, очевидно

$$\varkappa_0 \Delta h^2 - \lambda_0 (h - H) + \mu 0 = 0 \tag{2}$$

$$(\varkappa_0 = \varkappa - \varkappa', \quad \lambda_0 = \lambda - \lambda', \quad \mu_0 = \mu - \mu')$$

Пусть $\varkappa_0 \neq 0$. Подставляя Δh^2 из (2) в (1), найдем

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\varkappa}{\varkappa_0} [\lambda_0 (h - H) - \mu_0] - \lambda (h - H) + \mu$$

Отсюда

$$h = P(xy) \exp\left(\frac{\varkappa \lambda_0}{\varkappa_0} - \lambda\right) t + \frac{\varkappa_0 \mu - \varkappa \mu_0}{\varkappa_0 \lambda - \varkappa \lambda_0} + H$$

Подставив выражение для h в (2), найдем, что должны выполняться следующие равенства:

$$\Delta P^2 = 0, \quad \Delta P = \frac{\lambda_0}{2h_0\varkappa_0}P, \quad \frac{\varkappa_0\mu - \varkappa\mu_0}{\varkappa_0\lambda - \varkappa\lambda_0} = \frac{\mu_0}{\lambda_0}, \quad h_0 = \frac{\varkappa_0\mu - \varkappa\mu_0}{\varkappa_0\lambda - \varkappa\lambda_0} + H$$

(Считаем $\lambda_0 \neq 0$.)

Рассмотрев оставшиеся случаи

$$\varkappa_0 = 0, \quad \lambda_0 = 0, \quad \varkappa_0\lambda - \lambda\varkappa_0 = 0$$

нетрудно найти аналитическое выражение для всего класса функций, удовлетворяющих уравнению (1) при различных наборах параметров $\varkappa$, λ, μ. Обозначим множество таких функций через B. Вернемся к методу модулирующих функций.

Перегруппируем члены уравнения (1)

$$\frac{\partial h}{\partial t} = z\Delta h^2 + z_2 h + z_3 \tag{3}$$

$$z_1 = \varkappa, \qquad z_2 = -\lambda, \qquad z_3 = \lambda H + \mu$$

Пусть $h(xyt)$ — решение уравнения (1), не принадлежащее B. Тогда функции Δh^2, h и 1 — линейно-независимы, так как в противном случае нашлись бы ненулевые $\varkappa_0$, λ_0, μ_0 такие, что выполнялось соотношение (2), т. е. $h \in B$. Нетрудно показать, что в случае линейной независимости Δh^2, h и 1 всегда найдутся модулирующие функции Φ_i (xyt) $(i = 1, 2, 3)$ такие, что порожденная ими система линейных уравнений относительно z_i

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}, \Phi_i\right) = z_1(\Delta h^2, \Phi_i) + z_2(h, \Phi_i) + z_3(1, \Phi_i) \tag{4}$$

$(i = 1, 2, 3)$ имеет единственное решение.

При этом решение системы (4) не будет зависеть от выбора модулирующих функций $\Phi_i(xyt)$, так как функции $\partial h / \partial t$, Δh^2, h и 1 в силу уравнения (1) — линейно-зависимы. Пусть теперь известно приближенное решение уравнения (1), т. е. функция $h'(xyt)$, приближающая с некоторой точностью решение $h(xyt) \overline{\in} B$, так что

$$\|h(xyt) - h'(xyt)\| \leqslant \varepsilon, \qquad \|\partial h / \partial t - \partial h' / \partial t\| \leqslant \varepsilon$$

$$\|\Delta h^2 - \Delta h'^2\| \leqslant \varepsilon$$

$$\|f\| = (f, f)^{1/2}$$

Так как $h \overline{\in} B$, при достаточно малом ε функции $\Delta h'^2$, h', 1 — линейно-независимы, и система для z_i, порожденная модулирующими функциями Φ_i и функцией $h'(xyt)$, будет иметь единственное решение. Однако в этом случае функции $\partial h' / \partial t$, $\Delta h'^2$, h' и 1 при сколь угодно малом ε могут быть линейно-независимы. Но тогда решение системы (4) будет зависеть от выбора модулирующих функций $\Phi_i(xyt)$. Более того, можно показать, что при соответствующем выборе Φ_i можно получить произвольную тройку чисел z_1, z_2, z_3, являющуюся решением системы (4), причем это можно сделать для любого сколь угодно малого ε. Таким образом, никакая точность приближенного решения не может гарантировать близость приближенно вычисленных параметров к точным, если модулирующие функции выбираются произвольно.

Можно предложить другой способ определения параметров. Обозначив через f_0, f_1, f_2, f_3 соответственно функции $\partial h / \partial t$, Δh^2, h и 1, перепишем уравнение (3) в виде

$$f_0 - \sum_{i=1}^{3} f_i z_i = 0$$

Введя аналогичные обозначения для приближенного решения h', будем иметь

$$\|f_i - f_i'\| \leqslant \varepsilon \qquad (i=0, 1, 2, 3)$$

В качестве приближенных значений z_i' для параметра пласта возьмем точку z_{10}', z_{20}', z_{30}', минимизирующую квадратичную форму

$$F(z_i') = \left\| f_0' - \sum_{i=1}^{3} z_i' f_i' \right\|^2 = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} z_i' z_j' + \sum_{i=1}^{3} b_i z_i' + c$$

$$a_{ij} = (f_i', f_j'), \quad b_i = -2(f_0', f_i'), \quad c = (f_0', f_0')$$

Для определения z_{i0}' получим систему, которую в матричной форме можно записать так:

$$-b = 2Az' \tag{5}$$

$$b = \{b_i\}, \quad A = \{a_{ij}\}, \quad z' = \{z_i'\}$$

Если $h \in B$, то f_1, f_2 и f_3 — линейно-независимы и при достаточно малом ε f'_1, f_2' и f_3' также линейно-независимы. Тогда $\det A = \Gamma(f_i') > 0$, где $\Gamma(f_i')$ — определитель Грама функций $\{f_i'\}$. Следовательно, система (5) имеет единственное решение. Пусть теперь $z_i' = z_i$ — точное значение параметров пласта, т. е.

$$f_0 = \sum_{i=1}^{3} z_i f_i$$

Представим функции f_i' в виде

$$f_i' = f_i + \delta_i \quad (i=0,1,2,3)$$

$$\|\delta_i\| \leqslant \varepsilon_i$$

Тогда

$$F(z_i) = \left\| f_0 + \delta_0 - \sum_{i=1}^{3} z_i (f_i + \delta_i) \right\|^2 = \tag{6}$$

$$= \left\| \delta_0 - \sum_{i=1}^{3} z_i \delta_i \right\|^2 \leqslant \left(\|\delta_0\| + \sum_{i=1}^{3} |z_i| \|\delta_i\| \right)^2 \leqslant \varepsilon^2 R$$

$$R = \left(1 + \sum_{i=1}^{3} |z_i| \right)^2$$

Введем новые переменные $\xi_i' = z_i' - z_{i0}'$, где z_{i0}' — решение системы (5), которое принимаем в качестве искомых значений параметров пласта

$$F(\xi_i') = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} \xi_i' \xi_j' + \alpha$$

Так как a_{ij} — положительно определенная матрица, ортогональным преобразованием ее можно привести к виду

$$F(\eta_i') = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \eta_i'^2 + \beta$$

где $\lambda_i > 0$ – собственные числа матрицы a_{ij}, $\beta > 0$, так как форма F – положительно определенная. Тогда

$$F(\eta_i') = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \eta_i'^2 + \beta \geqslant \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \eta_i'^2 \geqslant \lambda_1 \|\eta'\|^2$$

где $\lambda_1 > 0$ — наименьшее собственное число матрицы a_{ij}. Но $\|\eta'\| = \|\xi'\|$, т. е.

$$F(\xi_i') \geqslant \lambda_1 \|\xi'\|^2 \tag{7}$$

Пусть теперь $\xi_i = z_i - z_{i0}'$. Из (6) и (7) получим

$$\lambda_1 \|\xi\|^2 \leqslant F(\xi_i) \leqslant \varepsilon^2 R$$

Отсюда следует оценка для приближенных значений параметров пласта z_{i0}'

$$\|z_i - z_{i0}'\|^2 \leqslant \varepsilon^2 R / \lambda_1 \tag{8}$$

где z_i — точные значения параметров.

Если из каких-либо соображений можно оценить величину R сверху (например, существуют естественные физические ограничения на параметры пласта), то можно пользоваться оценкой (8). В предложенном методе для вычисления параметров пласта приходится пользоваться первыми и вторыми производными от функции $h'(xyt)$. Как отмечается в работе [3], это снижает точность вычислений. Этот недостаток можно устранить, несколько видоизменив метод. В качестве значений параметров пласта выбирались числа z_{10}', z_{20}', z_{30}', минимизирующие квадратичную форму

$$F(z_i') = \left\| f_0' - \sum_{i=1}^{3} f_i' z_i' \right\|^2$$

$$(f_0' = \partial h'/\partial t, \quad f_1' = \Delta h'^2, \quad f_2' = h', \quad f_3' = 1)$$

Выразим $F(z_i')$ через коэффициенты Фурье функций f_i' $(i = 0, 1, 2, 3)$ относительно какой-нибудь полной ортонормированной системы $\Phi_k(xyt)$

$$c_{ki} = (\Phi_k, f_i'), \quad \|f_i'\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_{ki}^2, \qquad F(z_i') = \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_{k0} - \sum_{k=1}^{3} z_i' c_{ki} \right)^2$$

Обозначим через $F^{(N)}(z_i')$ усеченную сумму ряда

$$F^{(N)}(z_i') = \sum_{k=1}^{N} \left(c_{k0} - \sum_{i=1}^{3} z_i' c_{ki} \right)^2$$

Легко показать, что $z_{i0}'^{(N)}$, минимизирующие усеченную форму $F^{(N)}(z_i')$, сходятся к z_{i0}' при $N \to \infty$. Поэтому в качестве приближенных значений параметров пласта можно брать $z_{i0}'^{(N)}$ при достаточно большом N. Если теперь функции $\Phi_k(xyt)$ выбрать в виде

$$\Phi_k = \psi_k(t) \varphi_k(x) \chi_k(y),$$

где $\varphi_k(x)$, $\chi_k(y)$, $\psi_k(t)$ удовлетворяют условиям для модулирующих функций, то для коэффициентов Фурье получим

$$c_{k0} = (\Phi_k, f_0') = (\Phi_k, \partial h' / \partial t) = M_k$$

Аналогично

$$c_{k1} = N_k, \qquad c_{k2} = P_k, \qquad c_{k3} = Q_k$$

В выражениях M_k, N_k, P_k и Q_k уже не содержится производных функции $h'(xyt)$. Рассмотрим теперь задачу о собственных значениях оператора d^4y / dx^4 с краевыми условиями

$$y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0$$

Известно, что собственные функции имеют вид

$$\varphi_k(x) = (\operatorname{ch} \alpha_k - \cos \alpha_k)(\operatorname{sh} \alpha_k x - \sin \alpha_k x) - (\operatorname{sh} \alpha_k - \sin \alpha_k)(\operatorname{ch} \alpha_k x - \cos \alpha_k x)$$

где α_k — корни уравнения

$$\cos \alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k = 1 \qquad (\alpha_k \neq 0)$$

Система функций $\varphi_k(x) / \|\varphi\|$ — полная, ортонормированная на отрезке [0,1] и удовлетворяет поставленным краевым условиям. Тогда в качестве базисных функций можно взять

$$\Phi_{kij}=\frac{\varphi_k(x)\varphi_i(y)\varphi_j(t)}{\|\varphi_k\|\|\varphi_i\|\|\varphi_j\|}$$

(Для простоты считаем, что функция $h'(xyt)$ задана на единичном параллелепипеде.)

В заключение автор благодарит П. Я. Кочину за предложение темы статьи и интерес к работе и Г. И. Эскина за полезные советы.

Поступила 20 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Loeb J., Cahen G.* Extraction à partir des enregistrements de mesures des paramètres dynamiques d'un système. Automatisme, 1963, vol. 8, No. 12.
2. *Георгиевский В. Б.* Унифицированные алгоритмы расчета фильтрационных характеристик грунтов при натурных наблюдениях в неустановившемся режиме. Труды координационных совещаний по гидротехнике, вып. 25, ВНИИГ. Л., «Энергия», 1967.
3. *Георгиевский В. Б.* Унифицированные алгоритмы для определения фильтрационных параметров. Киев, «Наукова думка», 1971.
4. *Георгиевский В. Б., Мироничева Г. В., Шульгин Д. Р.* Метод определения параметров в задачах по расслоению почвогрунтов. Изв. АН УзССР, Сер. техн., 1968, № 5.

УДК 532.546

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА НА ПОВЕРХНОСТИ ДВУХСТУПЕНЧАТОГО КЛИНА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

В. А. БАШКИН, Н. П. КОЛИНА, А. Я. ЮШИН

(*Москва*)

При исследовании теплообмена на поверхности летательного аппарата часто приходится сталкиваться с телами, имеющими локальные участки поверхности большой кривизны. В окрестности этих участков толщина пограничного слоя δ становится соизмеримой с главными радиусами кривизны R_i $(i=1,2)$ поверхности, и, следовательно, уравнения пограничного слоя, полученные в предположении, что $\delta \ll R_i$, становятся недействительными. Вследствие этого для исследования особенностей течения и теплообмена в окрестности участков большой кривизны необходим другой подход к решению задачи.

В настоящее время имеются несколько методов решения задачи. В первом методе, развитом [1], в окрестности угловой точки выделяется область течения, в которой решение задачи находится путем численного интегрирования уравнений Навье — Стокса; вне этой области решение задачи определяется на основе уравнений Эйлера и Прандтля.

Второй метод, получивший значительно большее распространение из-за меньших трудностей численного интегрирования, это исследование особенностей течения методом внешних и внутренних разложений. Впервые этот подход к решению задачи был осуществлен в [2–4], а впоследствии использован также в ряде других работ.

Третий подход к решению задачи – использование теорий пограничного слоя высших приближений. В частности, в [5] гиперзвуковое течение газа в окрестности угловой точки, когда плоскости угла сопрягаются между собой по дуге окружности, исследовано на основе уравнений типа пограничного слоя, содержащих члены $O(\varepsilon^2)$, где $\varepsilon=\mathrm{Re}^{-1/2}$, Re – число Рейнольдса.

Кроме того, возможны и другие методы решения рассматриваемой задачи, но они не всегда оказываются корректными и достаточно общими.

Экспериментальные исследования закономерностей обтекания и теплообмена в окрестности угловой точки тела сравнительно немногочисленны. Авторам известна всего лишь работа [6], в которой приведены результаты измерений распределения тепловых потоков на осесимметричном теле в виде комбинации кругового конуса с цилиндром.