при $\eta \leqslant 1$ в рассматриваемых системах обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд $a_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, 2N;\ N = 1, 2, 3)$ критическому значению R_* числа Рэлея отвечает именно T-периодическое решение. Таким образом, для этих систем имеет место аналог принципа смены устойчивости. Для исходной системы (5) этот принцип не доказан. В случае $\eta > 1$ он нарушается.

Автор благодарит В. И. Юдовича за постоянное внимание к работе, И. П. Андрейчикова за помощь в программировании, а также рецензента за полезные замечания.

Поступила 27 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. *Donnelly R. J.* Experiments on the stability of viscous flow between rotating cylinders. III. Experiment of stability bu modulation. Proc. Roy. Soc., 1964, vol. 281, No. 1384.
2. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Н. М., Юрков Ю. С.* О конвективной устойчивости при наличии периодически меняющегося параметра. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
3. *Rosenblat S., Herbert D. M.* Low frequency modulation of thermal instability. J. Fluid Mech., 1970, vol. 43, No. 2.
4. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* О параметрическом возбуждении конвективной неустойчивости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
5. *Маркман Г. С., Юдович В. И.* Численное исследование возникновения конвекции в слое жидкости под действием периодических по времени внешних сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 3.
6. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М., «Наука», 1969.
7. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.
8. *Маркман Г. С.* О неустойчивости равновесия жидкости, находящейся под действием вибрационных сил и периодического по времени градиента температуры. Сб. «Математический анализ и его приложения», т. 2. Ростов-на-Дону, Изд. Ростовск. ун-та, 1970.
9. *Маркман Г. С.* О конвективной неустойчивости слоя жидкости в модулированном поле внешних сил. ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.

УДК 532.546

К ВОПРОСУ О МОДУЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЯХ

П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА

(*Москва*)

Рассматривается пример с использованием полинома в качестве модулирующей функции для определения неизвестного параметра в линейном дифференциальном уравнении. Показывается, что точность вычисления может значительно зависеть от выбора приближенного решения. Проводится сравнение точного значения параметра с приближенным значением, полученным методом модулирующих функций.

В дополнение к статье И. Б. Басовича [1] приводится простой пример, иллюстрирующий сложность вопроса о применении метода модулирующих функций.

Рассмотрим уравнение

$$\partial h / \partial t = \varkappa(\partial^2 h / \partial x^2) \tag{1}$$

и возьмем его частное решение

$$h(x, t) = e^{-\varkappa\alpha^2 t} \sin \alpha x \tag{2}$$

Положив $\alpha = \pi / a$, будем рассматривать x в интервале $(0, a)$, t — в интервале $(0, T)$. В качестве приближенного значения для $\sin \alpha x$ возьмем $\dfrac{4x(a-x)}{a^2}$

$$\tilde{h}(x, t) = f(t) 4x(a-x) / a^2 \tag{3}$$

где $f(t)$ пока не определено.

В качестве модулирующей функции примем

$$\varphi(x) = x^n (a-x)^n \tag{4}$$

Обозначим приближенное значение $\varkappa$ через X. Подставляя в (1) $\tilde{h}(x, t)$ вместо $h(x, t)$, умножая обе части (1) на $\varphi(x)$ и интегрируя по t в пределах от 0 до T, по x — от 0 до a, получим

$$X = \frac{a^2 B(n+2, n+2)\,[f(0) - f(T)]\left[\int\limits_0^T f(t)\,dt\right]^{-1}}{2B(n+1, n+1)} \tag{5}$$

Воспользовавшись свойствами эйлеровых функций

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \qquad \Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \tag{6}$$

получим

$$X = \frac{a^2(n+1)^2[f(0) - f(T)]\left[\int\limits_0^T f(t)\,dt\right]^{-1}}{2(2n+3)(2n+2)} \tag{7}$$

Если в качестве $f(t)$ взять точное значение — первый множитель выражения (2),— то для X получим

$$X = \varkappa\frac{\pi^2(n+1)^2}{2(2n+3)(2n+2)} \tag{8}$$

Здесь множитель при $\varkappa$ мало отличается от единицы и слабо изменяется с изменением n: от $3\pi^2/28 \approx 1.20$ при $n = 2$ до $\pi^2/8 \approx 1.08$ при $n = \infty$. Это происходит оттого, что и для $\sin\alpha x$ взято хорошее приближение и модулирующие функции (4) дают слабые изменения X в формуле (8) при изменении n.

Такое свойство функции (4) и несколько более общих

$$\varphi_{mn} = x^m(a - x)^n$$

были отмечены в [2], где рассматривался вопрос об определении нескольких параметров в уравнении более общего вида, чем (1). Однако это же свойство функций φ_{mn} приводит к тому, что система уравнений для параметров получается невыгодной для расчетов, так как коэффициенты одного уравнения мало отличаются от коэффициентов других. Как показано в статье [1], может получиться сильная зависимость X от выбора модулирующих функций.

Если теперь в качестве $f(t)$ взять, например, полином по степеням t, то формула (7) может дать большое отступление X от действительного значения $\varkappa$. Так, если положить

$$f(t) = 1 - \lambda t \quad (\lambda = \varkappa\pi^2 b^{-2})$$

(причем b может отличаться от a), то получим

$$X = \frac{\varkappa a^2}{b^2(1 - {}^1/_2\lambda T)}\,\frac{\pi^2(n+1)^2}{2(2n+3)(2n+2)}$$

и здесь X будет сильно зависеть от удачи в выборе λ и T.

Поступила 19 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Басович И. Б.* Об определении параметров пласта с применением метода модулирующих функций. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 5.
2. *Полубаринова-Кочина П. Я., Пряжинская В. Г., Эмих В. Н.* Математические методы в вопросах орошения. М., «Наука», 1969.