

УДК 532.5-2

## ДИНАМИКА ПЛОСКОЙ ПОЛОСТИ В ЖИДКОСТИ МАЛОЙ ВЯЗКОСТИ

А. Г. ПЕТРОВ

(Москва)

Впервые задача о движении полости в плоскопараллельном потоке идеальной жидкости с учетом поверхностного натяжения была рассмотрена в работе [1], в которой получено точное уравнение, определяющее равновесную форму полости. В [2] был проведен анализ этого уравнения, а в частном случае указано существование аналитического решения. В работах [3, 4] приводятся результаты численных решений.

В настоящей работе полость задается бесконечным набором обобщенных координат и в явном виде приводятся уравнения Лагранжа, определяющие динамику полости. Задача, рассмотренная в [1-4], сведена к задаче отыскания минимума функции бесконечного числа переменных. Найден явный вид этой функции. В отличие от [1-4] на основе уравнений Лагранжа изучается и нестационарное движение полости. Динамические уравнения обобщаются на случай полости, движущейся в тяжелой вязкой жидкости с поверхностным натяжением при больших числах Рейнольдса. При этом стационарное движение полости определяется из бесконечной системы алгебраических уравнений, выписанной в явном виде. Для эллиптической полости получено точное решение динамических уравнений в случае идеальной жидкости. При помощи аппроксимации полости эллипсом найдена приближенная аналитическая зависимость числа Вебера от деформации и приведено сравнение с численными расчетами [3, 4]. Аналогично задаче об эллипсоидальной полости для осесимметричного течения [5, 6] рассмотрена задача о движении эллиптической полости. В отличие от [6] равновесная форма плоской полости в тяжелой вязкой жидкости становится неустойчивой, если отношение осей полости больше 2.06.

### 1. Обобщенные координаты, потенциал течения и кинетическая энергия.

На комплексной плоскости  $Z$  рассматривается потенциальное течение, вызываемое движением полости, площадь которой  $\pi a^2$  не меняется со временем. Предполагается, что полость ограничена замкнутым односвязным достаточно гладким контуром. Движение жидкости удобно исследовать на комплексной плоскости  $z = Z/a = x + iy$ , на которой полость подобна данной, а ее площадь равна  $\pi$ . Область потенциального течения идеальной жидкости (внешность полости) в момент времени  $t'$  конформно отображается на внешность единичного круга вспомогательной комплексной плоскости  $\zeta$  с помощью аналитической функции  $z = \omega(t, \zeta)$  со следующими условиями нормировки:

$$\omega(t, \infty) = \infty, \quad \text{Arg } \omega'(t, \infty) = 0, \quad t = vt'/a, \quad \omega' = d\omega/d\zeta$$

Здесь  $x, y, t$  — безразмерные декартовы координаты и время,  $v$  — характерная скорость,  $a$  — радиус круга, площадь которого равна площади полости.

Функция  $\omega(t, \zeta)$  определяется единственным образом и в области  $|\zeta| > 1$  представима в виде ряда Лорана, коэффициенты которого для симметричной полости являются действительными числами, зависящими от времени

$$(1.1) \quad \omega(t, \zeta) = \omega_x + i\omega_y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) \zeta^{1-k}$$

Независимые коэффициенты ряда  $a_k$  в дальнейшем будем считать обобщенными координатами. Нормаль к границе полости  $n$  и нормальная скорость смещения границы  $w_n$  соответственно равны

$$n = n_x + in_y = \sigma \omega' / |\omega'|, \quad w_n = \omega_x \dot{n}_x + \omega_y \dot{n}_y = \operatorname{Re} (\bar{\omega} \dot{\omega}' \sigma) / |\omega'|, \quad \omega' = \partial \omega / \partial t$$

Здесь  $\sigma$  — комплексная координата границы области в плоскости  $\xi$  ( $|\sigma| = 1$ ), черта сверху означает знак сопряжения.

Пусть  $F(t, z)$  — комплексный потенциал течения вокруг полости, тогда нормальная скорость течения жидкости на границе полости

$$v_n = \operatorname{Re} \left( \frac{dF}{dz} n \right) = \frac{1}{|\omega'|} \operatorname{Re} \left( \sigma \frac{df}{d\xi} \right), \quad f(t, \xi) = F(t, \omega(t, \xi))$$

С помощью последних двух формул нетрудно написать граничное условие для потенциала  $v_n = w_n$  или

$$\operatorname{Re} (\sigma df/d\xi) = \operatorname{Re} (\bar{\omega} \dot{\omega}' \sigma) \quad (\xi = \sigma)$$

Если циркуляция скорости по границе полости равна нулю, то по действительной части, заданной на границе области, аналитическая функция  $\xi df/d\xi$  определяется единственным образом.

Таким образом, эту функцию можно представить в виде ряда Лорана с коэффициентами, зависящими от  $a_n$

$$(1.2) \quad \xi \frac{df}{d\xi} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{\xi^k}, \quad A_k = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (a_{n+k} \dot{a}_n + a_{n-k} \dot{a}_n)$$

$$b_n = (n-1) a_n, \quad a_k \dot{a}_n = da_k/dt,$$

Во второй формуле (1.2) следует считать, что  $a_k = 0$  ( $k < 0$ ). Можно показать, что изменение площади полости с точностью до множителя  $\pi$  равно  $A_0$ . Поскольку предполагалось, что площадь полости остается неизменной, то в формуле (1.2)  $A_0$  следует считать равным нулю, а условие постоянства площади полости накладывает следующую связь на коэффициенты  $a_n$ :

$$(1.3) \quad a_0^2 = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_n^2$$

Если отказаться от этого предположения, то кинетическая энергия течения несжимаемой жидкости вокруг полости окажется бесконечной.

Для полости произвольной площади  $\pi a^2$  можно вычислить кинетическую энергию жидкости  $T$  [7]

$$(1.4) \quad T = - \frac{i}{4} \rho a^2 v^2 \oint \bar{f} \frac{df}{d\xi} d\sigma =$$

$$= - \frac{\pi}{2} \rho a^2 v^2 \operatorname{Res} f \left( \frac{1}{\xi} \right) \frac{df}{d\xi} = \frac{\pi}{2} \rho a^2 v^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} A_k^2$$

Таким образом, жидкость с полостью в рассматриваемом случае является динамической системой, которая с помощью (1.1), (1.2) и (1.3) полностью определяется обобщенными координатами и скоростями  $a_k, \dot{a}_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ). Динамика полости определяется из уравнений Лагранжа и начальных условий для координат и скоростей.

2. Связь уравнений Лагранжа с граничным условием для давления. Если в разложении (1.1) ограничиться конечным числом членов

$$(2.1) \quad \omega(t, \zeta) = \sum_{k=0}^N a_k(t) \zeta^{1-k}$$

то динамическая система будет иметь  $N$  степеней свободы, а координаты  $a_k(t)$  определяются из решения системы дифференциальных уравнений

$$(2.2) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T_N}{\partial a_m} - \frac{\partial T_N}{\partial a_m} = 0 \quad (m=1, 2, \dots, N)$$

Здесь  $T_N$  — кинетическая энергия, которая соответствует разложению (2.1) и определяется по формулам (1.2)–(1.4) при условии, что все  $a_n=0$  при  $n>N$ .

Переходя к пределу при  $N \rightarrow \infty$ , можно получить решение задачи о движении полости.

Можно предложить другой способ решения этой задачи, основанный на интеграле Коши — Лагранжа

$$(2.3) \quad p - p_\infty = -\operatorname{Re} \left( \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\omega^*}{\omega'} \frac{df}{d\zeta} \right) - \frac{1}{2} \left| \frac{df}{d\zeta} \right|^2 \frac{1}{|\omega'|^2}$$

Здесь первое слагаемое есть действительная часть от частной производной по времени от потенциала скоростей  $F(t, z)$ ,  $p$  — давление в точке  $z$ ,  $p_\infty$  — давление на бесконечности. Давление на границе полости должно быть постоянным, а следовательно, коэффициенты ряда (2.1) могут быть определены из следующей системы уравнений:

$$(2.4) \quad \int_0^\pi p_N \cos m\alpha \, d\alpha = 0, \quad m=1, 2, \dots, N, \quad \alpha = \operatorname{Arg} \sigma$$

Здесь  $p_N$  — давление на границе полости  $\zeta = \sigma$ , соответствующее (2.1).

Для точного решения задачи необходимо опять перейти к пределу  $N \rightarrow \infty$ .

На вопрос о взаимосвязи обоих методов решения задачи отвечает следующая теорема.

*Теорема.* Если функция (2.1) осуществляет конформное отображение внешности единичного круга на внешность «полости», а производная  $\omega'$  на границе непрерывна и не обращается в нуль, то системы уравнений (2.2) и (2.4) эквивалентны.

Доказательство будет проведено, исходя из системы уравнений Лагранжа [7, 8].

$$(2.5) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T_N}{\partial a_m} - \frac{\partial T_N}{\partial a_m} = \int p_N w_n^{(m)} \, ds, \quad ds = |\omega'| \frac{d\sigma}{i\sigma} \quad (m=1, 2, \dots, N)$$

Здесь  $w_n^{(m)} a_m$  — нормальная скорость смещения границы при изменении одной координаты  $a_m$ , правые части (2.5) — обобщенные силы, действующие на жидкость со стороны полости.

При помощи равенства для нормальной скорости  $v_n$  можно получить

$$(2.6) \quad |\omega'| w_n^{(m)} = \operatorname{Re} \sigma \omega'(\sigma) (\sigma^m + m a_m / a_0 \sigma)$$

Уравнения Лагранжа (2.5) можно рассматривать как тождественное равенство [8], если левые части вычислять так же, как в (2.2), а правые — при помощи (2.1), (1.2), (2.3) и (2.6). Подстановкой  $\sigma = e^{i\alpha}$  при помощи (2.6) тождество (2.5) приводится к следующему виду:

$$(2.7) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T_N}{\partial a_m} - \frac{\partial T_N}{\partial a_m} = -2 \sum_{k=1}^N c_{mk} \int_0^\pi p_N \cos k\alpha \, d\alpha$$

$$c_{mk} = b_{m-k} + b_{m+k} + b_m b_k / a_0 \quad (m=1, 2, \dots, N)$$

Из (2.7) следует, что для доказательства теоремы достаточно показать, что  $c_{mk}$  — невырожденная матрица.

Пусть определитель равен нулю. Тогда строки матрицы  $c_{mk}$  линейно-зависимы. Из тождества

$$\operatorname{Re}[\sigma\omega'(\sigma)\overline{\omega'(\sigma)}] = - \sum_{k=1}^N \left( \sum_{m=1}^N a_m \cdot c_{mk} \right) \cos ka$$

следует, что найдется функция

$$\omega^* = \sum_{k=1}^N a_k \zeta^{1-k}$$

с действительными коэффициентами  $a_k^*$ , не равная тождественно нулю, для которой на границе единичного круга будет выполняться равенство

$$(2.8) \quad \sigma\omega^*(1/\sigma)/\omega'(1/\sigma) = -\omega^*(\sigma)\sigma^{-1}/\omega'(\sigma)$$

Из условий теоремы следует, что правая часть этого равенства есть предельное значение на границе функции, аналитической вне круга  $|\zeta| > 1$ , включая бесконечно удаленную точку, и непрерывной на границе круга. Аналогично левая часть есть предельное значение функции, аналитической внутри круга  $|\zeta| < 1$  и непрерывной на границе. Таким образом, последнее равенство определяет функцию

$$g(\zeta) = \zeta\omega^*(1/\zeta)/\omega'(1/\zeta)$$

аналитическую на всей комплексной плоскости и по теореме Лиувилля равную константе. Из (2.8) следует, что  $g(\sigma) = -g(\bar{\sigma})$ , откуда вытекает, что  $g(\zeta) \equiv 0$ ,  $\omega^*(\zeta) \equiv 0$ . Что и требовалось доказать.

Из доказанного следует, что бесконечная система уравнений Лагранжа с функцией Лагранжа, равной кинетической энергии жидкости  $T$ , эквивалентна условию постоянства давления на границе полости.

**3. Функция Лагранжа и диссипация энергии.** Для полости, движущейся в тяжелой «капиллярной» жидкости, в функцию Лагранжа  $L$  войдет потенциальная энергия оболочки  $\kappa l'$  ( $\kappa$  — коэффициент натяжения оболочки,  $l'$  — длина оболочки) и потенциальная энергия силы тяжести  $U$

$$(3.1) \quad l' = a \oint |dz| = a \int_0^{2\pi} |\omega'| d\alpha = a\pi l$$

Если ускорение силы тяжести направлено противоположно действительной оси комплексной плоскости  $z$ , то для потенциальной энергии  $U$  можно получить

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \pi u &= \frac{U}{\rho g a^2} = - \iint x dx dy = - \frac{1}{4i} \oint \overline{\omega^2} \omega' d\sigma = \\ &= - \frac{\pi}{2} \operatorname{Res} \left[ \omega^2 \left( \frac{1}{\zeta} \right) \omega'(\zeta) \right] = \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^{\infty} b_m \sum_{k=0}^{m+1} a_k a_{m+1-k} \end{aligned}$$

Таким образом, из формул (1.5), (3.1) и (3.2) находится функция Лагранжа

$$(3.3) \quad \begin{aligned} L &= \pi \rho a^2 v^2 \left( \tau - \frac{l}{W} - \frac{u}{F} \right), \quad W = \frac{\rho a v^2}{\kappa}, \quad F = \frac{v^2}{ag} \\ \tau &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} A_k^2, \quad A_k = \sum_{m=1}^{\infty} c_{mk} a_m \\ \pi l &= 2 \int_0^{\pi} \left[ \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos n\alpha \right)^2 + \left( \sum_{n=2}^{\infty} b_n \sin n\alpha \right)^2 \right]^{1/2} d\alpha \end{aligned}$$

$$u = -a_1 + a_0 \sum_{m=2}^{\infty} b_m b_{m+1} + \frac{1}{2} \sum_{m=3}^{\infty} b_m \sum_{k=2}^{m-1} a_k a_{m+1-k}$$

Здесь  $W$  и  $F$  — безразмерные числа Вебера и Фруда.

Координата  $a_1$ , определяющая поступательное движение полости, входит только в потенциальную энергию. При движении полости в невесомой жидкости  $a_1$  является циклической координатой. В этом случае известным образом определяется функция Рауса, при этом роль потенциальной энергии будет выполнять потенциал Рауса  $\Pi$  [9]

$$\Pi = \frac{l}{W} + \frac{p_1^2}{2M}, \quad M = 2a_0^2 - 2a_0 a_2 - 1, \quad p_1 = \text{const}$$

Здесь  $p_1$  и  $M$  — соответственно импульс и присоединенная масса поступательного движения полости.

Положение минимума этой функции определяет устойчивую фигуру равновесия полости в стационарном потоке. Таким образом, задача, рассмотренная в работах [1-4], сводится к задаче отыскания минимума функции многих переменных  $\Pi(a_i)$ . Если диссипацию энергии  $E$  определить по потенциальному полю скоростей, как это делается в работах [5, 6, 10], то

$$E = 2\pi\mu v^2 e, \quad \pi e = -\frac{1}{2} \int \frac{\partial}{\partial n} \left| \frac{dF}{dz} \right|^2 ds$$

Введем функцию  $f_1(\xi) = dF/dz = f'/\omega'$ , тогда интеграл преобразуется следующим образом:

$$\pi e = -\frac{1}{2} \int \left[ \varphi(\sigma) + \varphi\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right] \frac{d\sigma}{i\sigma} = -2\pi \text{Res} \frac{\varphi(\xi)}{\xi} \quad (\xi=0)$$

Последняя формула справедлива, если  $\varphi$  представляется сходящимся рядом Лорана в кольце  $(1+\epsilon, 1-\epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$ . Отсюда нетрудно получить окончательное выражение для диссипации энергии

$$(3.4) \quad e = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) c_n^2, \quad \sum_{n=1}^k c_n b_{k-n} = A_k$$

Коэффициенты  $c_n$ , входящие в выражение для диссипации энергии, определяются из решения системы уравнений с треугольной матрицей. Поэтому их можно определить из рекуррентных соотношений.

С помощью найденных функции Лагранжа (3.3) и диссипации энергии (3.4) получаем уравнения, определяющие динамику полости в тяжелой жидкости малой вязкости с учетом поверхностного натяжения

$$(3.5) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \tau}{\partial a_m} - \frac{\partial \tau}{\partial a_m} = -\frac{1}{W} \frac{\partial l}{\partial a_m} - \frac{1}{F} \frac{\partial u}{\partial a_m} - \frac{1}{R} \frac{\partial e}{\partial a_m}$$

$(m=1, 2, \dots, R=av/\nu)$

где  $R$  — число Рейнольдса.

В первую очередь представляют интерес уравнения, определяющие равновесную форму полости. В этом случае все обобщенные скорости, кроме первой, равны нулю. Без ограничения общности можно считать, что  $a_1 = 1$ . С помощью (1.3), (3.3) и (3.4) уравнения (3.5) принимают вид

$$(3.6) \quad \frac{1}{F} = \frac{2e_0}{R}, \quad e_0 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)c_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_{k-n} = b_{1-k} + b_{1+k}$$

$$\frac{\partial}{\partial a_m} \left( \frac{M}{2} - \frac{l}{W} - \frac{u}{F} \right) - \frac{1}{2Fe_0} \frac{\partial e}{\partial a_m} = 0 \quad (m=2, 3, \dots)$$

Здесь  $e_0$  — значение  $e$  (3.4) в точке  $a_1^* = 1, a_2^* = a_3^* = \dots = 0$ . При заданных числах Вебера и Фруда из последней системы алгебраических уравнений определяются координаты  $a_2, a_3, \dots$ , после чего по верхним формулам (3.6) находится  $e_0$  и число Рейнольдса. Скорость подъема полости  $v$  определяется из формулы

$$(3.7) \quad v = (ga^2/v)F/R = ga^2/(2ve_0)$$

4. **Эллиптические полости.** Для приближенного изучения динамики полости ограничимся первыми тремя членами в ряде Лорана (1.1)

$$\omega = a_0 \zeta + a_1 + a_2 / \zeta$$

Эта функция отображает внешность единичного круга на внешность эллипса с полуосями  $1/2(a_0 + a_2)$  и  $1/2(a_0 - a_2)$ . Коэффициенты  $a_0$  и  $a_2$  с помощью (1.3) можно выразить через степень деформации  $\chi$  (отношение полуосей)

$$(4.1) \quad a_0 = 1/2(\sqrt{\chi} + 1/\sqrt{\chi}), \quad a_2 = -1/2(\sqrt{\chi} - 1/\sqrt{\chi})$$

$$(\chi = (a_0 - a_2)/(a_0 + a_2))$$

Таким образом, эллиптические полости имеют две степени свободы  $a_1$  и  $\chi$ . С помощью (4.1) формулы (1.3) и (3.3) принимают вид:

$$(4.2) \quad A_1 = -\sqrt{\chi} a_1^*, \quad A_2 = 1/2 \chi^* / \chi, \quad u = -a_1$$

$$\tau = 1/2 \chi a_1^{*2} + 1/16 \chi^{*2} \chi^{-2}$$

$$\pi l = \begin{cases} 4\sqrt{\chi} E(k) & k^2 = 1 - \chi^{-2} \quad (\chi \geq 1) \\ 4\sqrt{1/\chi} E(k) & k^2 = 1 - \chi^2 \quad (\chi < 1) \end{cases}$$

Здесь  $E(k)$  — полный эллиптический интеграл второго рода.

Диссипация энергии  $e$  определяется следующим образом. Из системы уравнений (3.4) определяются коэффициенты  $c_n$

$$c_{2n-1} = \frac{2\chi a_1^* X^{n-1}}{1+\chi}, \quad c_{2n} = \frac{\chi X^n}{\chi(1+\chi)}, \quad X = \frac{1-\chi}{1+\chi}$$

$$(n=1, 2, \dots)$$

после чего ряд для диссипации вычисляется точно

$$(4.3) \quad e = 4\chi(1+\chi)^2 a_1^{*2} + (1+\chi^{-2})\chi^{*2}$$

Для описания движения эллиптической полости в невязкой невесомой жидкости без учета поверхностного натяжения достаточно записать два первых интеграла

$$8\chi a_1^{*2} + \chi^{*2} \chi^{-2} = 8\chi_0 + \chi_0^{*2} \chi_0^{-2}, \quad \chi a_1^* = \chi_0$$

Здесь предполагались следующие начальные условия:

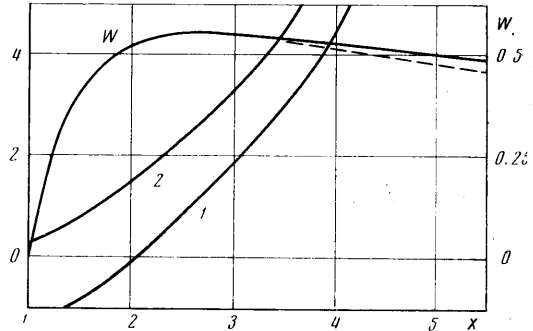
$$a_1^*(0) = 1, \chi(0) = \chi_0, \chi^*(0) = \chi_0^*$$

Полученную систему уравнений удобно интегрировать, если ввести новую переменную  $\chi = b^2$ . Эта переменная является осью эллипса, перпендикулярной поступательной скорости. Если подставить  $a_1^*$  из второго уравнения в первое и разрешить его относительно  $b^2$ , то можно получить следующее уравнение:

$$\begin{aligned} b^2 &= \alpha^2 b^2 - \beta^2, \\ \alpha^2 &= 2b_0^2 + b_0^* b_0^{-2}, \\ \beta^2 &= 2b^4 \chi_0 = b_0^2, \chi_0^* = 2b_0 b_0^* \end{aligned}$$

решение которого имеет вид

$$\begin{aligned} b &= (\beta/\alpha) \operatorname{ch}(\gamma \pm \alpha t), \\ \gamma &= \operatorname{Arch}(b_0 \alpha / \beta) \end{aligned}$$



Фиг. 1

Знак минус соответствует начальному условию  $b_0^* < 0$ . Из решения видно, что при таком начальном условии ось  $b$  достигает своего минимального значения ( $b_{\min} = \beta/\alpha$ ), после чего неограниченно возрастает со временем.

Перейдем к отысканию равновесной формы эллиптической полости в тяжелой и вязкой жидкости. Система уравнений (3.6) в этом случае заменяется одним уравнением для отыскания степени деформации

$$\frac{\partial}{\partial \chi} \left( \frac{M}{2} - \frac{l}{W} \right) = 0, \quad M = 2a_0^2 - 2a_0 a_2 - 1 = \chi$$

Отсюда при помощи (4.1) нетрудно получить зависимость числа Вебера от  $\chi$

$$(4.4) \quad W(\chi) = 2 \frac{dl}{d\chi} = \frac{4[(\chi^2 + 1)E(k) - 2K(k)]}{\pi \sqrt{\chi(\chi^2 - 1)}}$$

Здесь  $K$  — полный эллиптический интеграл первого рода. На фиг. 1 сплошной линией изображен график этой функции. Пунктир соответствует точному численному решению [3].

Когда кривизна полости в критических точках обращается в нуль, то существует аналитическое решение [2, 3]. В этом случае по данным [3]  $\chi = 1/2$ ,  $W = 16\sqrt{\chi}/81 = 0.467$

Формула (4.4) для числа Вебера дает  $W = 0.490$ . При уменьшении степени деформации ошибка существенно уменьшается.

Качественно кривая графика похожа на ту же зависимость для осесимметричного эллипсоида, найденную в работах [5, 6], при  $\chi = 2.82$  число Вебера достигает максимума  $W = 0.560$ .

Скорость подъема эллипса находится из формул (3.7) и (4.3)

$$v = ga^2 / (2ve_0), \quad e_0 = 4\chi(1 + \chi)^2$$

Последняя формула совместно с (3.3) и (4.4) дает возможность определить зависимость скорости стационарного подъема полости от ее размера в параметрическом виде

$$(4.5) \quad v_+(\chi) = (W^2/2e_0)^{1/5}, \quad a_+(\chi) = (4e_0^2 W)^{1/5}$$

Здесь  $v_+$ ,  $a_+$  — соответственно безразмерные скорость и радиус круга эквивалентной площади.

$$v_+ = \frac{v}{v_0}, \quad a_+ = \frac{a}{l_0}, \quad v_0^5 = \frac{\kappa^2 g}{\rho^2 \nu}, \quad l_0^5 = \frac{\kappa \nu^2}{\rho g^2}$$

На фиг. 2 представлены графики зависимостей  $v_+$  и  $\chi$  от  $a_+$ . Так же как и в случае осесимметричной полости [5, 6], скорость достигает максимального значения.

Рассмотрим малые колебания эллипса вблизи положения равновесия. Для этого можно ввести параметры  $\xi$  и  $\eta$ , характеризующие отклонения деформации и скорости эллипса от равновесных значений

$$\chi = \chi_0(1 + \xi), \quad a_+ = 1 + \eta, \quad |\xi| \ll 1, \quad |\eta| \ll 1$$

Линеаризованные уравнения (3.5) принимают следующий вид:

$$(4.6) \quad \dot{\xi} + \dot{\eta} = - (8/R) (1 + \chi_0) [(1 + 3\chi_0)\xi + (1 + \chi_0)\eta]$$

$$\ddot{\xi} + 4\chi_0 \varphi \dot{\xi} - 8\chi_0 \eta = - (16/R) (1 + \chi_0^2) \xi$$

$$\varphi = \frac{\chi_0}{2} \frac{d}{d\chi_0} \ln W(\chi_0)$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет три корня, один действительный и два комплексно-сопряженных. При  $R \gg 1$  с точностью до основных членов эти корни равны

$$\lambda_k = i\omega_k - \mu_k/R, \quad \omega_{1,2} = \pm \sqrt{8\chi_0(1+\varphi)}, \quad \omega_3 = 0$$

$$(1+\varphi)\mu_1 = 8[(1+\chi_0^2)\varphi + 1 - \chi_0], \quad \mu_2 = \mu_1$$

$$(1+\varphi)\mu_3 = 8(1+\chi_0)[(1+\chi_0)\varphi + 1 + 3\chi_0] \quad (k=1, 2, 3)$$

Как видно из графика функции  $W(\chi)$  на фиг. 2, производная этой функции при достаточно больших  $\chi$  становится отрицательной вместе с функцией  $\varphi(\chi)$  (4.6). Поэтому  $\mu_1$  при этих значениях  $\chi$  также отрицательно.

Последнее означает, что колебания после некоторого критического значения степени деформации не затухают, а равновесная форма становится неустойчивой. Численный расчет показывает, что это значение равно  $\chi_* = 2.06$ . Соответствующие критические значения числа Вебера, размера и скорости полости определяются из формул (4.4) и (4.5)

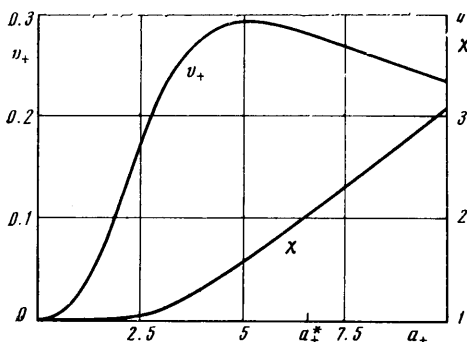
$$W_* = 0.530, \quad a_+^* = a_*/l_0 = 6.61,$$

$$v_*/v_0 = 0.283$$

Таким образом, решение уравнений (4.6) представляется в виде линейной комбинации следующих функций:

$$\exp(-M_k t) \cos(\alpha_k + \Omega_k t) \quad (k=1, 2, 3)$$

$$\Omega_k = \Omega_0 \omega_k W^{1/2}, \quad M_k = \left(\frac{\nu}{a^2}\right) \mu_k, \quad \Omega_0 = \left(\frac{\kappa}{\rho a^3}\right)^{1/2}$$



Фиг. 2



Здесь  $\Omega_0$  по порядку величины совпадает с частотой капиллярных колебаний неподвижной полости с упругой оболочкой.

При  $\chi > \chi_*$  или  $a > a_*$  равновесная форма плотности неустойчива, что, по-видимому, способствует дроблению полости. Так, для газовых пузырьков в воде при обычных условиях  $l_0 \approx 0.015$ , а критический размер  $a_* \approx 0.1$  см.

На фиг. 1 цифрами 1 и 2 соответственно обозначены графики функций  $\mu_1$  и  $\mu_3$ . Слева по вертикали откладываются значения, соответствующие  $-0.1\mu_1$  и  $0.01\mu_3$ .

Автор благодарит Г. Ю. Степанова за полезные замечания.

Поступила 20 I 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Слезкин Н. А. Обтекание наполненной газом оболочки плоским потоком идеальной жидкости. Уч. зап. МГУ, 1951, т. 3, вып. 152.
2. McLeod E. B. The explicit solution of a free boundary problem involving surface tension. J. Ration. Mech. and Analysis, 1955, vol. 4, No. 4.
3. Киселев О. М. К задаче о газовом пузыре в плоском потоке идеальной жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
4. Петрова С. И. Форма равновесия полости, ограниченной упругой пленкой в однородном потоке жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1.
5. Moore D. W. The velocity of rise of distorted gas bubbles in a liquid of small viscosity. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, No. 4.
6. Головин А. М., Воинов О. В., Петров А. Г. Движение эллипсоидального пузыря в жидкости малой вязкости. ПМТФ, 1970, № 3.
7. Милл-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М., «Мир», 1964.
8. Биркгоф Г. Гидродинамика. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
9. Гангмагер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М., Физматгиз, 1960.
10. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.