

УДК 532.529.2

## УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ СЛОЯ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ПО ВРЕМЕНИ ГРАДИЕНТА ТЕМПЕРАТУРЫ

Г. С. МАРКМАН

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается возникновение конвекции в слое жидкости, ограниченном твердыми плоскостями. Равновесный градиент температуры не зависит от высоты и периодически меняется со временем. В случае знакопостоянного градиента численными методами изучено влияние изменения частоты модуляции на устойчивость равновесия. Установлено, что модуляция приводит к повышению устойчивости. Максимальное повышение устойчивости достигается при ненулевой частоте, что согласуется с результатами экспериментов [1].

Зависимость критического числа Рэлея от амплитуды модуляции исследована в [2]. В [3] рассматривается устойчивость равновесия слоя со свободными границами. Учитывается зависимость градиента температуры от высоты. В предельном случае малых частот найдено критическое значение числа Рэлея. При этом наибольшее критическое число соответствует нулевой частоте.

Пусть вязкая несжимаемая жидкость заключена между двумя неподвижными горизонтальными твердыми стенками  $z = 0, h$ . Равновесный градиент температуры не зависит от высоты и модулируется около среднего значения  $c_0$  с частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $a_0$ .

$$(1) \quad \nabla \theta_0 = -c_0(1 + \eta \sin \omega_0 t) \mathbf{j}, \quad \eta = a_0 / c_0$$

где  $\mathbf{j}$  — единичный вектор, направленный вертикально вниз.

Однородность градиента температуры по высоте имеет место, когда в жидкости определенным образом распределены источники тепла. При периодическом нагреве снизу в отсутствие источников однородность имеет место лишь в области изменения параметров, удовлетворяющих следующему условию [4]:

$$(2) \quad \omega \sqrt{p} \ll 1$$

Здесь  $p$  — число Прандтля,  $\omega$  — безразмерная частота модуляции.

Уравнения малых возмущений равновесия в безразмерной форме имеет вид [2]

$$(3) \quad \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla P + \Delta \mathbf{v} + R\theta \mathbf{j}$$

$$\sqrt{p} \frac{\partial \theta}{\partial t} - (1 + \eta \sin \omega t) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}) = \Delta \theta, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

где  $R$  — число Рэлея.

Решение системы (3) ищем в виде

$$(4) \quad \mathbf{v} = (v_1(z, t), v_2(z, t), v(z, t)) \exp i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)$$

$$\theta = \theta(z, t) \exp i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)$$

Подставляя (4) в (3), исключая давление  $P$  и компоненты скорости  $v_1, v_2$ , получим

$$(5) \quad \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\partial}{\partial t} L v = L^2 v - \alpha^2 R \theta \quad L = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \alpha^2$$

$$\sqrt{p} \frac{\partial \theta}{\partial t} - (1 + \eta \sin \omega t) v = L \theta, \quad \alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$$

Соответствующие граничные условия имеют вид

$$(6) \quad v = \partial v / \partial z = \theta = 0 \quad (z=0, h)$$

Определение границы устойчивости сводится к нахождению наименьшего значения  $R_*$  числа Рэлея, которому отвечает периодическое по времени с периодом  $T = 2\pi/\omega$  решение системы (4).

Для вычисления  $R_*$  применяется, как и в [2], метод Л. В. Канторовича. Решение ищется в виде

$$(7) \quad v(z, t) = \sum_{k=1}^N a_k(t) \varphi_k(z), \quad \theta(z, t) = \sum_{k=1}^N a_{N+k}(t) \psi_k(z)$$

Здесь  $\varphi_k(z)$ ,  $\psi_k(z)$  — системы базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям (6)

$$(8) \quad \begin{aligned} \varphi_1(z) &= z^2(1-z)^2, & \psi_1(z) &= z - 2z^3 + z^4 \\ \varphi_2(z) &= z^3(1-z)^2, & \psi_2(z) &= 3z^5 - 10z^3 + 7z \\ \varphi_k(z) &= z^{k-2}\varphi_2(z), & \psi_k(z) &= z^{k-2}\psi_2(z) \quad (k=3, 4, \dots) \end{aligned}$$

Уравнения для определения  $a_k(t)$  получим, подставив (7) в уравнения (5), соответственно умножив на  $\varphi_k(z)$ ,  $\psi_k(z)$  и проинтегрировав по  $z$ .

В первом приближении ( $N=1$ ) амплитуды  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$  определяются из системы

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{p}} \dot{a}_1 &= -q_1 a_1 + R q_2 a_2, & \sqrt{p} \dot{a}_2 &= (1 + \eta \sin \omega t) q_3 a_1 - q_4 a_2 \\ q_1 &= \frac{\alpha^4 + 24\alpha^2 + 504}{\alpha^2 + 12} \sqrt{p}, & q_2 &= \frac{11\alpha^2}{2(\alpha^2 + 12)}, & q_3 &= \frac{11}{62}, & q_4 &= \frac{306 + 31\alpha^2}{31\sqrt{p}} \end{aligned}$$

Система (9) получена ранее в работе [2], в которой при помощи численного интегрирования методом Рунге — Кутты найдена зависимость  $R$  от амплитуды  $\eta$ .

Далее рассматривается зависимость  $R$  от частоты модуляции  $\omega$  для знакопостоянного градиента ( $\eta < 1$ ).

Исключая  $a_2$  из уравнений (9), получим задачу на собственные значения

$$(10) \quad \ddot{a}_1 + (q_1 + q_4) \dot{a}_1 + [q_1 q_4 - R q_2 q_3 (1 + \eta \sin \omega t)] a_1 = 0$$

Вычисления проводились с помощью цепных дробей [3].

Решение уравнения (10) ищем в виде ряда Фурье

$$a_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

Для коэффициентов  $c_n$  в силу (10) получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений и запишем ее в виде

$$(11) \quad \begin{aligned} b_n + 1/\rho_n &= \rho_{n+1}, & \rho_n &= c_n / c_{n+1} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ b_n &= \frac{2(q_1 + q_4)n\omega}{R q_2 q_3 \eta} - i \frac{2}{R q_2 q_3 \eta} (q_1 q_4 - R q_2 q_3 - n^2 \omega^2) \end{aligned}$$

Отсюда выводим

$$(12) \quad \rho_n = - \frac{1}{b_n + \frac{1}{b_{n+1}} + \dots} = b_{n-1} + \frac{1}{b_{n-2} + \frac{1}{b_{n-3}} + \dots}$$

Полагая  $n=1$ , получим уравнение для определения  $R(\alpha^2)$

$$(13) \quad i \frac{b_0}{2} = \text{Im} \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2} + \dots}$$

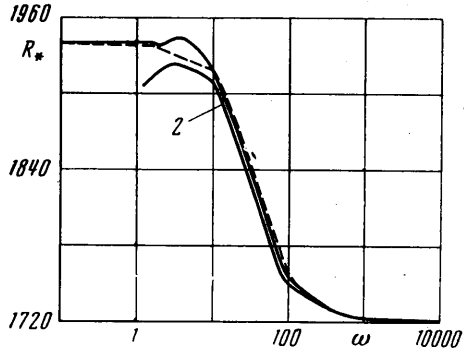
Критическое число Рэлея  $R_* = \min R(\alpha^2)$ .

С помощью метода *WBKJ* [6] можно определить предельное значение  $R_{0*}$  критического числа Рэлея  $R_*$  при  $\omega \rightarrow 0$ . Решение уравнения (10) представимо асимптотической формулой

$$a_1 \sim \frac{1}{F(t)} \exp \left\{ \frac{1}{\omega} \left( \int_0^t F(\tau) d\tau - \frac{q_1 + q_4}{2} t \right) \right\}$$

$$(14) \quad F(t) = 1/2 [(q_1 - q_4)^2 + 4Rq_2q_3(1 + \eta \sin t)]^{1/2}$$

$(\eta \leq 1)$



Фиг. 1

Условие периодичности решения дает уравнение для  $R_{0*}$

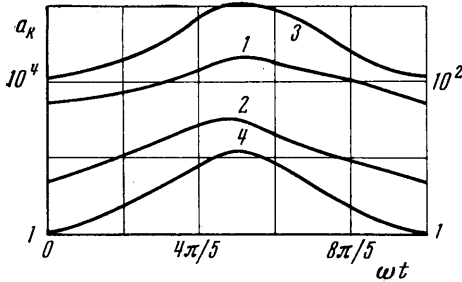
$$(15) \quad \int_0^{2\pi} F(\tau) d\tau = \pi(q_1 + q_4)$$

Например, в случае  $\eta = 0.9, p = 1$  вычисленное значение  $R_{0*} = 1930.6$ .

Зависимость  $R_*$  от частоты модуляции  $\omega$  при этих же значениях  $\eta, p$  представлена пунктиром на фиг. 1. При  $\omega \leq 1$  значения  $R_*$  практически совпадают с  $R_{0*}$ . Заметим, что критическому значению  $R_*$  соответствует, как и в стационарном случае,  $\alpha_* = 3.12$ .

Как известно [2], к уравнению (10) сводится также (в первом приближении метода Канторовича) задача о возникновении конвекции в жидкости, находящейся в модулированном поле силы тяжести и равномерно подогреваемой снизу. Для этой задачи физически оправдано рассмотрение высоких частот, применимое в случае периодического подогрева снизу при выполнении условия (2).

Выбирая для  $v, \theta$  по две базисные функции ( $N=2$ ), для определения амплитуд  $a_k(t)$  и  $R$  получим систему четырех уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами



Фиг. 2

$$(16) \quad \frac{da_k}{dt} = \sum_{m=1}^4 b_{km}(t, R) a_m$$

$(k=1,2,3,4)$

Коэффициенты  $b_{km}$  легко определяются, для краткости их не приводим.

Для определения  $R_*$  строится оператор монодромии [7] системы (18) и находится значение  $R$ , которому соответствует мультипликатор  $\lambda = 1$ . Фундаментальная система вычислялась на ЭВМ «ODRA-1204» методом Рунге — Кутты.

Результаты вычислений представлены на фиг. 1 сплошной линией. На кривой 2 представлены результаты вычислений с шестью базисными функциями ( $N=3$ ). Наличие максимума на кривой  $R_*(\omega)$  позволяет провести аналогию с экспериментальными результатами Донелли [1], который исследовал устойчивость модулированного течения между вращающимися цилиндрами и отметил существование максимально стабилизирующей ненулевой частоты.

Вычисления  $R_*$  при различных  $\eta < 1$  показали, что стабилизирующее влияние модуляции возрастает с ростом  $\eta$ , что согласуется с результатами [1, 2]. Качественно характер зависимости  $R_*(\omega)$  для  $\eta = 0.1, 0.3, 0.5, 0.9$  одинаков.

На фиг. 2 представлены амплитуды  $a_k(t)$ , вычисленные при значениях  $\eta = 0.9, \omega = 10, p = 1, (k = 1, 2$  — сплошные кривые 1, 2 (масштаб слева),  $k = 3, 4$  — штриховые кривые 3, 4 (масштаб справа).

В заключение отметим, что интерес к решениям той же периодичности, что и параметр задачи, не случаен. Теми же методами, что и в [8, 9], можно показать, что

при  $\eta \leq 1$  в рассматриваемых системах обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд  $a_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, 2N$ ;  $N = 1, 2, 3$ ) критическому значению  $R_*$  числа Рэлея отвечает именно  $T$ -периодическое решение. Таким образом, для этих систем имеет место аналог принципа смены устойчивости. Для исходной системы (5) этот принцип не доказан. В случае  $\eta > 1$  он нарушается.

Автор благодарит В. И. Юдовича за постоянное внимание к работе, И. П. Андрейчикова за помощь в программировании, а также рецензента за полезные замечания.

Поступила 27 XII 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Donnelly R. J.* Experiments on the stability of viscous flow between rotating cylinders. III. Experiment of stability by modulation. Proc. Roy. Soc., 1964, vol. 281, No. 1384.
2. *Гершуни Г. Э., Жуховицкий Н. М., Юрков Ю. С.* О конвективной устойчивости при наличии периодически меняющегося параметра. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
3. *Rosenblat S., Herbert D. M.* Low frequency modulation of thermal instability. J. Fluid Mech., 1970, vol. 43, No. 2.
4. *Гершуни Г. Э., Жуховицкий Е. М.* О параметрическом возбуждении конвективной неустойчивости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
5. *Маркман Г. С., Юдович В. И.* Численное исследование возникновения конвекции в слое жидкости под действием периодических по времени внешних сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 3.
6. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М., «Наука», 1969.
7. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.
8. *Маркман Г. С.* О неустойчивости равновесия жидкости, находящейся под действием вибрационных сил и периодического по времени градиента температуры. Сб. «Математический анализ и его приложения», т. 2. Ростов-на-Дону, Изд. Ростовск. ун-та, 1970.
9. *Маркман Г. С.* О конвективной неустойчивости слоя жидкости в модулированном поле внешних сил. ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.

УДК 532.546

### К ВОПРОСУ О МОДУЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЯХ

П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА

(Москва)

Рассматривается пример с использованием полинома в качестве модулирующей функции для определения неизвестного параметра в линейном дифференциальном уравнении. Показывается, что точность вычисления может значительно зависеть от выбора приближенного решения. Проводится сравнение точного значения параметра с приближенным значением, полученным методом модулирующих функций.

В дополнение к статье И. Б. Басовича [1] приводится простой пример, иллюстрирующий сложность вопроса о применении метода модулирующих функций.

Рассмотрим уравнение

$$(1) \quad \partial h / \partial t = \kappa (\partial^2 h / \partial x^2)$$

и возьмем его частное решение

$$(2) \quad h(x, t) = e^{-\kappa a^2 t} \sin ax$$

Положив  $a = \pi/a$ , будем рассматривать  $x$  в интервале  $(0, a)$ ,  $t$  — в интервале  $(0, T)$ . В качестве приближенного значения для  $\sin ax$  возьмем  $\frac{4x(a-x)}{a^2}$

$$(3) \quad \tilde{h}(x, t) = f(t) 4x(a-x) / a^2$$

где  $f(t)$  пока не определено.

В качестве модулирующей функции примем

$$(4) \quad \varphi(x) = x^n (a-x)^n$$