

УДК 533.6.011.72

ТЕОРИЯ АНОМАЛЬНЫХ РЕЖИМОВ РЕГУЛЯРНОГО ОТРАЖЕНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН

Г. М. АРУТЮНЯН

(Москва)

Из численных расчетов отражения ударной волны для двухатомного газа было известно [1, 2], что регулярное отражение в ряде случаев может сопровождаться более высокими давлениями, чем давление нормального отражения («аномальные режимы» регулярного отражения).

В данной статье изложена теория, объясняющая это явление.

Показано, что для значений показателя адиабаты, больших некоторого критического, при любой интенсивности ударной волны существует конечный диапазон углов падения, для которых имеют место аномальные режимы отражения. Если же значение показателя адиабаты меньше этого критического значения, аномальные отражения имеют место лишь для ударных волн, интенсивность которых меньше некоторой характерной, зависящей от показателя адиабаты.

Получены формулы, связывающие явным образом угол и давление отражения ударной волны с исходными параметрами задачи.

1. Предварительные замечания. Рассмотрим (фиг. 1) регулярное отражение ударной волны от поверхности твердого тела. Общая теория этого явления весьма громоздка и не позволяет анализировать процесс отражения в целом и отдельные его параметры. Для такого анализа требуются численные расчеты, которые до настоящего времени проводились только для двухатомного газа [1-4].

До недавнего времени, например, говоря о зависимости критического угла от интенсивности падающей ударной волны, считалось, что переход к газам с отличным от 1.4 значением показателя адиабаты может привести лишь к незначительному отклонению от соответствующей зависимости для двухатомного газа.

Из графиков фиг. 2 (построенных на основании данных работы [5]) следует, что при этом имеет место существенное отличие соответствующих зависимостей в области сильных ударных волн. На фиг. 2 ω_k — значение критического угла падения ударной волны, а $\eta = p_2/p_1$ — ее интенсивность. Кривым 1-9 соответствуют $\gamma = 1.00001, 1.05, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.666667, 2, 3$.

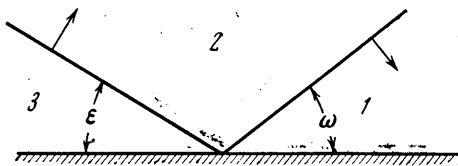
Из [1, 4] известно, что ордината точки минимума кривых $\omega_k(\eta)$ определяется выражением

$$(1.1) \quad \omega_0 = \text{arc ctg} [(\gamma+1)/(3-\gamma)]^{1/2}$$

равным в случае двухатомного газа 39.23° .

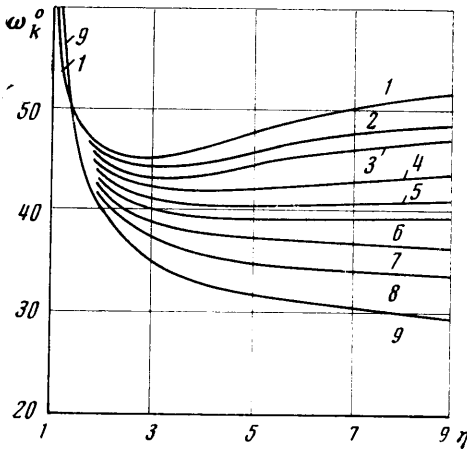
Смысл (1.1) состоит в том, что если угол падения ударной волны равен ω_0 , угол ее отражения будет при этом равен углу падения, а давление отражения — давлению нормального отражения. Таким образом, касательная к кривой $\omega_k(\eta)$ в точке ее минимума будет делить плоскость $\omega\eta$ на две области — ниже касательной и между этой касательной и кривой $\omega_k(\eta)$. Из фиг. 2 следует, что для сильных ударных волн с уменьшением γ последняя область существенно расширяется.

Таким образом, если точка ω, η принадлежит первой из этих областей, давление отражения будет меньше давления нормального отражения. Если же она принадлежит второй области, то естественно предположить, что давление отражения будет превышать давление нормального отражения и эту область следует рассматривать как область аномального отражения. Покажем, что это предположение является неверным.



Фиг. 1

Рассмотрим для этого представленную на фиг. 3 известную [1, 4] зависимость угла отражения ε от угла падения ω для ударных волн различной интенсивности при $\gamma=1.4$. Координаты точки O , через которую проходят все кривые (фиг. 3), равны ω_0 . Иначе говоря, лишь в начале координат и в точке O давление отражения равно давлению нормального отражения. Между этими точками оно меньше давления нормального отражения.



Фиг. 2

Крайние правые точки этих кривых (k) соответствуют критическому углу падения ударной волны ($\omega=\omega_k$). Известно, кроме того, что практически реализуются лишь те ветви этих кривых, которые расположены ниже точки k . И если бы точка k всегда находилась выше точки O , а такое впечатление и складывается в рассматриваемом случае, можно было бы утверждать, что упомянутая вторая область (фиг. 2) всегда является областью повышенного давления (такой вывод фактически делается, например, в [6]).

Однако более внимательный анализ кривых (фиг. 3) показывает, что, начиная с некоторого достаточного значения η , точка k , расположена ниже точки O . (Это имеет место, например, при $\eta=100$.) Значит, при этом давление регулярного отражения будет ниже давления нормального отражения во всем диапазоне углов регулярного отражения $0 < \omega \leq \omega_k$.

Таким образом, уже в случае двухатомного газа приходится констатировать, что вся вторая область не является областью аномального отражения.

2. Анализ результатов численных расчетов. Расчет параметров отраженных ударных волн был проведен (автором совместно с Л. В. Карчевским) на ЭВМ для сред с различным значением γ . Находились значения угла отражения ε и интенсивности отраженной ударной волны $\xi = p_3 / p_2$ при различных значениях интенсивности падающей ударной волны η и угла падения ω .

В основу расчетов были положены известные соотношения теории регулярного отражения ударных волн [4], а также соотношения, легко получаемые из них.

Угол отражения ударной волны ε находился из решения уравнения

$$(2.1) \quad A\tau_2^2 + B\tau_2 + C = 0, \quad \tau_2 = \text{ctg } \varepsilon$$

$$A = \frac{(\tau_1^2 + 1)(h^2\eta + 1)(h^2 - 1 + 2\eta)}{(h^2 - 1)(\eta - 1)^2} - 1$$

$$B = \frac{[(h^2 - 1)^2(\eta - 1)^2 - (\tau_1^2 + 1)(h^2\eta + 1)^2]\tau_1}{(h^2 - 1)(\eta - 1)^2}$$

$$(2.2) \quad C = \frac{h^2[(\tau_1^2 + 1)(h^2\eta + 1) - (h^2 - 1)(\eta - 1)]}{(h^2 - 1)(\eta - 1)}$$

$$(2.3) \quad h^2 = (\gamma + 1) / (\gamma - 1), \quad \tau_1 = \text{ctg } \omega$$

Каждой тройке значений η , ω , γ соответствуют два значения τ_2 . Но реальный смысл имеют лишь меньшие значения ε , т. е. больший из корней (2.1).

Критическим углам падения соответствует случай

$$(2.4) \quad B^2 - 4AC = 0$$

Давление регулярного отражения вычислялось на основании соотношений

$$(2.5) \quad \xi = \frac{h^2 + (h^2 - 1)r}{(h^2 - 1)r - 1}, \quad r = \frac{\tau_2(\tau_1^2 + 1)s - \tau_1 - \tau_2}{\tau_1(\tau_2^2 + 1)}, \quad s = \frac{h^2\eta + 1}{(h^2 - 1)(\eta - 1)}$$

На фиг. 4, а, б представлена зависимость ε от ω при различных значениях η для сред с $\gamma = 1.1$ и 1.67 , соответствующим, например, достаточно диссоциированному и ионизированному воздуху за ударной волной и одноатомному газу (подробнее об этом см. [3]). Кривым 1-5 соответствуют значения $\eta = 1, 1.58, 2.04, 10$ и 100 на фиг. 4, а и $\eta = 1, 1.56, 4.77, 20$ и $3.3 \cdot 10^3$ на фиг. 4, б.

Сплошным линиям соответствуют имеющие реальный смысл ветви исследуемых кривых. Видно, что при $\gamma = 1.1$ с увеличением интенсивности падающей ударной волны точка k переходит из положения выше точки O в положение ниже нее. Если же $\gamma = 1.67$, точка k всегда находится выше точки O . Таким образом, при одних значениях γ имеет место переход точки k через точку O , а при других — нет.

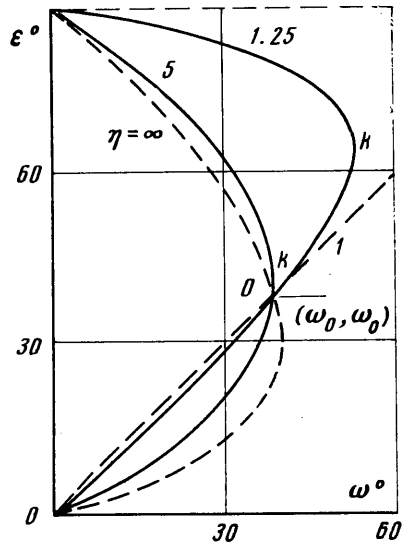
Если такой переход имеет место, он происходит при некотором значении $\eta = \eta_0(\gamma)$. При этом значении η величина ω_k , очевидно, минимальна, а соответствующая кривая $\omega_k(\eta)$ на фиг. 2 будет иметь точку минимума при $1 \leq \eta < \infty$.

Ордината этой точки будет равна ω_0 , а абсцисса — η_0 . Тогда, при $\omega_0 < \omega \leq \omega_k$, если $\eta < \eta_0$, давление регулярного отражения будет превышать давление нормального отражения, если же $\eta > \eta_0$, то — нет. Таким образом, если кривая $\omega_k(\eta)$ имеет точку минимума, лишь левая часть второй области будет областью аномального отражения.

Если же точка k не переходит через точку O , соответствующая кривая на фиг. 2 не будет иметь точки минимума при $1 \leq \eta < \infty$. Тогда для любого η давление регулярного отражения при $\omega_0 < \omega \leq \omega_k$ будет превышать давление нормального отражения, и вся вторая область будет областью аномального отражения. В частности, так как $\omega_0 = 0$ при $\gamma = 3$, то при этом вся область регулярного отражения, т. е. часть плоскости $\eta\omega$, лежащая ниже кривой $\omega_k(\eta)$, будет областью аномального отражения.

Резюмируя, можно утверждать, что, если кривая $\omega_k(\eta)$ имеет точку минимума, для сильных ударных волн аномальные режимы отражения невозможны. Если же эта кривая изменяется монотонно, аномальные режимы отражения возможны для ударных волн любой интенсивности.

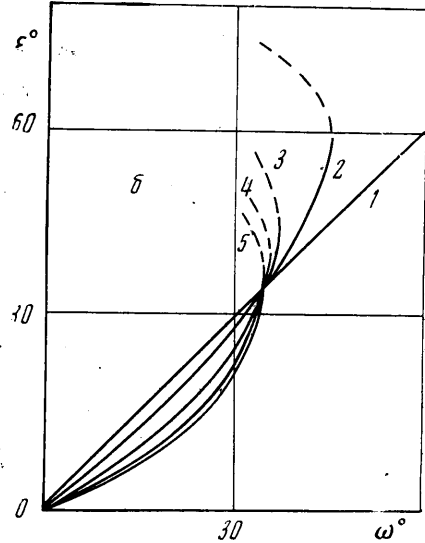
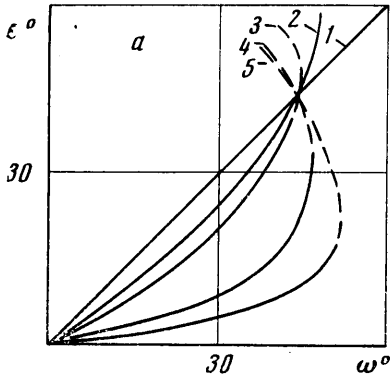
Этот вывод подтверждается данными фиг. 5, где приведена зависимость $p_{3n} = p_3 / p_n$ от $\Omega = \omega / \omega_k$ при различных значениях η для сред с теми же, что и на фиг. 4, значениями γ . Кривым 1-4 соответствуют $\eta = 100, 10, 2.04$ и 1.47 на фиг. 5, а и $\eta = 3.3 \cdot 10^3, 20, 4.75$ и 1.56 на фиг. 5, б. Здесь p_3 — давление регулярного отражения, а p_n — соответствующее давление нормального отражения.



Фиг. 3

В монографии [7] утверждается, что для сильных ударных волн всегда невозможны аномальные режимы отражения. Из сказанного выше следует, что такое утверждение в общем случае является неверным.

3. Формулы для угла и давления регулярного отражения.



Фиг. 4

Из (2.1) и (2.2) после ряда преобразований приходим к следующему выражению для τ_2 , справедливому при $1 \leq \eta < \infty$:

$$(3.1) \quad \tau_2 = \frac{B_0 + B_1\eta + B_2\eta^2 + (A_0 + A_1\eta + A_2\eta^2 + A_3\eta^3 + A_4\eta^4)^{1/2}}{C_0 + C_1\eta + C_2\eta^2} \equiv \Phi(\eta, \tau_1, h)$$

$$(3.2) \quad \begin{aligned} A_0 &= \tau_1^2(\tau_1^2 + h^4)^2, & A_1 &= 4(\tau_1^4 + h^6 + h^8 + 2h^6\tau_1^2 + 2h^4\tau_1^2 + h^2\tau_1^2 + \\ & + h^6\tau_1^4 + 2h^2\tau_1^4 + h^2\tau_1^6), & A_2 &= 2(2\tau_1^2 - \tau_1^4 + 4h^4 + 2h^6 - 2h^8 + 2h^8\tau_1^2 + \\ & + 2h^6\tau_1^2 + 3h^4\tau_1^2 + 2h^2\tau_1^2 + h^8\tau_1^4 + 8h^4\tau_1^4 + 2h^2\tau_1^4 + 3h^4\tau_1^6) \end{aligned}$$

$$(3.3) \quad \begin{aligned} A_3 &= 4(h^2 - 2h^6 - \tau_1^2 - h^8\tau_1^2 - h^6\tau_1^2 + 2h^6\tau_1^4 - h^4\tau_1^4 - h^2\tau_1^4 + h^6\tau_1^6 - h^4) \\ A_4 &= \tau_1^2 - 4h^2 - 4h^4 - 4h^6\tau_1^2 - 8h^4\tau_1^2 - 4h^2\tau_1^2 - 2h^4\tau_1^4 + h^8\tau_1^6 - 4h^6\tau_1^4 \\ B_0 &= \tau_1(\tau_1^2 + 2h^2 - h^4), & B_1 &= 2\tau_1(h^4 - h^2 + h^2\tau_1^2 + 1) \\ B_2 &= \tau_1(2h^2 + h^4\tau_1^2 - 1), & C_0 &= 2\tau_1^2(h^2 - 1) \\ C_1 &= 2(h^2 + h^4 + 2\tau_1^2 - h^2\tau_1^2 + h^4\tau_1^2), & C_2 &= 2(h^2 + 2h^2\tau_1^2 + 1) \end{aligned}$$

Исходя из (3.2) и (3.3), можно показать, что

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 &= \tau_1^2(1 + 2h^2 + h^4 + \tau_1^2 + 2h^2\tau_1^2 + h^4\tau_1^2)^2 \\ 2(B_0 + B_1 + B_2) &= \tau_1(C_0 + C_1 + C_2) = 2\tau_1(1 + 2h^2 + h^4 + \tau_1^2 + 2h^2\tau_1^2 + h^4\tau_1^2) \end{aligned}$$

Тогда из (3.1) имеем $\tau_2 = \tau_1$ при $\eta = 1$, т. е. для слабых ударных волн угол отражения равен углу падения. В других предельных случаях из (3.1)–(3.3) следует:

$$(3.4) \quad \tau_2 \rightarrow \frac{B_2 + \sqrt{A_4}}{C_2} \quad (\eta \rightarrow \infty), \quad \frac{\tau_2}{\tau_1} \rightarrow \frac{h^2\eta + 1}{2\eta + h^2 - 1} \quad (\tau_1 \rightarrow \infty)$$

Как и следовало ожидать, при нормальном падении угол отражения ударной волны равен нулю.

Из (2.5) после ряда преобразований окончательно получаем выражение для ξ как функции исходных параметров η , τ_1 , h

$$\xi = \frac{\tau_2 \{ (h^2 - 1) (1 - \eta) \tau_1 \tau_2 - (h^2 + 1) [h^2 + \tau_1^2 + (1 + h^2 \tau_1^2) \eta] \}}{h^2 \{ (\eta - 1) \tau_1 \tau_2^2 - [h^2 + \tau_1^2 + (1 + h^2 \tau_1^2) \eta] \tau_2 + h^2 \tau_1 (\eta - 1) \}} - \frac{1}{h^2} \equiv \Psi(\eta, \tau_1, h) \quad (3.5)$$

где τ_2 должно определяться (3.1).

При $\eta = 1$, учитывая, что $\tau_2 = \tau_1$, из выражения (3.5) имеем $\xi = 1$.

Из (3.5) следует также, что

$$\xi \rightarrow \frac{h^2 \tau_1 \tau_2^2 + (1 + h^2 \tau_1^2) \tau_2 + \tau_1}{(1 + h^2 \tau_1^2) \tau_2 - \tau_1 \tau_2^2 - h^2 \tau_1} \quad (\eta \rightarrow \infty) \quad (3.6)$$

где τ_2 должно при этом определяться первым соотношением (3.4).

Если учесть второе соотношение (3.4), то из (3.5) легко показать, что

$$\xi \rightarrow [(h^2 + 2)\eta - 1] / (h^2 + \eta) \quad (\tau_1 \rightarrow \infty) \quad (3.7)$$

т. е., как и следовало ожидать, приходим к формуле для давления нормального отражения.

Необходимо заметить, что, положив в (3.6) $\tau_1 \rightarrow \infty$, а в (3.7) $\eta \rightarrow \infty$, в обоих случаях придем к одинаковому результату ($\xi \rightarrow h^2 + 2$).

4. Условие определения η . Из сказанного в п. 2 следует, что в зависимости от значения γ все среды делятся на группу, для которой аномальные режимы отражения не всегда возможны (соответствующие кривые $\omega_k(\eta)$ имеют минимум), и группу, для которой такие режимы отражения возможны всегда (соответствующие кривые $\omega_k(\eta)$ изменяются монотонно). Следовательно, существует некоторая «критическая» среда, граничная между этими группами. Соответствующее этой среде значение γ_k находится из условия

$$\eta_0(\gamma) = \infty \quad (4.1)$$

Задача, таким образом, состоит в определении зависимости η_0 от γ . Допустим, что график кривой $\omega_k(\eta)$ имеет минимум. Тогда, если положить $\tau_1 = \tau_0$ ($\omega = \omega_0$), т. е. если перемещаться вдоль касательной к этой кривой в точке минимума, то на основании вышеизложенного (см. (3.1) и, например, фиг. 4, а) можно утверждать, что

$$\tau_2 = \Phi(\eta, \tau_0, h) = \begin{cases} \tau_0 & (1 \leq \eta \leq \eta_0) \\ \Phi(\eta, \tau_0, h) & (\eta_0 < \eta < \infty) \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\xi = \Psi(\eta, \tau_0, h) = \begin{cases} \frac{(h^2 + 2)\eta - 1}{h^2 + \eta} & (1 \leq \eta \leq \eta_0) \\ \Psi(\eta, \tau_0, h) & (\eta_0 < \eta < \infty) \end{cases} \quad (4.3)$$

Заметим (см. (3.7)), что верхняя часть формулы (4.3) дает давление нормального отражения.

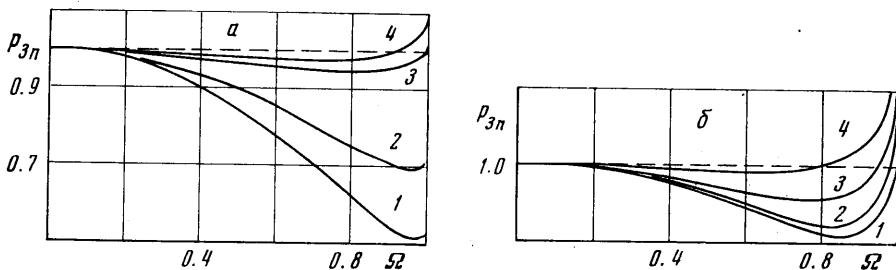
Из (3.1) и (4.2), таким образом следует, что в интервалах $1 \leq \eta \leq \eta_0$ и $\eta_0 < \eta < \infty$ выражение $\Phi(\eta, \tau_0, h)$ имеет различную структуру: если в первом интервале оно не зависит от η , то во втором — представляет собой переменную по η функцию.

Определим выражение $\Phi(\eta, \tau_0, h)$, для чего положим в (3.2) и (3.3) $\tau_1 = \tau_0$. Обозначив A_i , B_j и C_j при $\tau_1 = \tau_0$ соответственно через a_i , b_j и c_j

($i=0, 1, \dots, 4; j=0, 1, 2$), из (3.1) будем иметь

$$(4.4) \quad \Phi(\eta, \tau_0, h) = \frac{b_0 + b_1\eta + b_2\eta^2 + (a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3 + a_4\eta^4)^{1/2}}{c_0 + c_1\eta + c_2\eta^2}$$

Структура правой части (4.4) может изменяться указанным в (4.2) образом лишь при условии, что подкоренное выражение есть квадрат некоторой функции от η (h при этом рассматривается как параметр), которая при переходе через точку η_0 изменяет свой знак. Значит если такая функция существует, то значение η_0 может быть определено из условия равенства ее нулю.



Фиг. 5

Анализ подкоренного выражения (4.4) показывает, что

$$(4.5) \quad a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3 + a_4\eta^4 = [\tau_0 c_0 - b_0 + (\tau_0 c_1 - b_1)\eta + (\tau_0 c_2 - b_2)\eta^2]^2$$

Следовательно, такая функция действительно существует и равна

$$(4.6) \quad \kappa(\eta) = (\tau_0 c_2 - b_2)\eta^2 + (\tau_0 c_1 - b_1)\eta + \tau_0 c_0 - b_0$$

а значение η_0 должно быть определено из условия

$$(4.7) \quad \kappa(\eta) = 0$$

Когда γ изменяется от 1 до 3, $h^2 = \mu$ изменяется при этом от ∞ до 2, а $\tau_0 = [\mu / (\mu - 2)]^{1/2} > 0$. Воспользовавшись выражениями для c_j и b_j , можно тогда показать, что

$$(4.8) \quad \tau_0 c_0 - b_0 = \tau_0 \mu (\mu - 1)^2 / (\mu - 2) > 0 \quad (2 < \mu < \infty)$$

$$(4.9) \quad \tau_0 c_1 - b_1 = 2\tau_0 (\mu - 1)^2 (\mu + 2) / (\mu - 2) > 0 \quad (2 < \mu < \infty)$$

$$(4.9) \quad \tau_0 c_2 - b_2 = -\tau_0 (\mu - 1) (\mu - \mu_1) (\mu - \mu_2) / (\mu - 2),$$

$$\mu_1 = 1/2(3 - \sqrt{33}), \quad \mu_2 = 1/2(3 + \sqrt{33})$$

причем, так как $\mu_1 < 0$, то

$$(4.10) \quad \tau_0 c_2 - b_2 > 0 \quad (2 < \mu < \mu_2), \quad \tau_0 c_2 - b_2 < 0 \quad (\mu_2 < \mu < \infty)$$

При $2 < \mu < \infty$

$$(4.11) \quad (\tau_0 c_1 - b_1)^2 - 4(\tau_0 c_0 - b_0)(\tau_0 c_2 - b_2) = 8\mu(\mu - 1)^3(\mu + 1)^2 / (\mu - 2)^2 > 0$$

Исходя из (4.8) и (4.10), можно показать, что первый корень (4.7) η_1 (со знаком плюс у радикала) всегда отрицателен и его следует отбросить как не имеющий физического смысла. Второй корень (со знаком минус у радикала)

$$\eta_2 < 0 \quad (2 \leq \mu < \mu_2), \quad \eta_2 > 0 \quad (\mu_2 < \mu < \infty)$$

Так как в первом случае η_2 также лишено физического смысла, заключаем, что значение η_0 должно определяться значением η_2 при $\mu_2 < \mu < \infty$.

Исходя из этого, после подстановки в η_2 правых частей (4.8) и (4.9), получаем

$$(4.12) \quad \eta_0 = \frac{(\mu-1)(\mu+2) + (\mu+1)\sqrt{2(\mu-1)(\mu-2)}}{(\mu-\mu_1)(\mu-\mu_2)} \quad (\mu_2 < \mu < \infty)$$

Перейдем в (4.12) от μ к γ , учитывая, что

$$(4.13) \quad \gamma = (\mu+1)/(\mu-1) \quad (2 \leq \mu < \infty)$$

и заметив, что когда μ изменяется от μ_2 до ∞ , γ изменяется от $(\mu_2+1)/(\mu_2-1)$ до 1. Тогда для η_0 будем иметь

$$(4.14) \quad \eta_0 = \frac{2(3\gamma-1+2\gamma\sqrt{3-\gamma})}{[1+\mu_1+(1-\mu_1)\gamma][1+\mu_2-(\mu_2-1)\gamma]} \quad \left(1 \leq \gamma \leq \frac{\mu_2+1}{\mu_2-1}\right)$$

Можно показать, что в указанном интервале $d\eta_0/d\gamma > 0$. Следовательно, при изменении γ от 1 до $(\mu_2+1)/(\mu_2-1)$ значение η_0 будет монотонно расти от своего наименьшего значения $\eta_0 = 1 + \sqrt{2}$ при $\gamma = 1$ до наибольшего $\eta_0 = \infty$ при $\gamma = (\mu_2+1)/(\mu_2-1)$.

На фиг. 6 представлена зависимость η_0 от γ . Очевидно, что

$$(4.15) \quad \gamma_k = (\mu_2+1)/(\mu_2-1) \approx 1.59307$$

Подразумевая под γ_k (4.15), а под η_0 (4.14), окончательно можно утверждать:

1) если $\gamma < \gamma_k$, а $\eta \geq \eta_0$, давление регулярного отражения никогда не будет превышать давление нормального отражения;

2) если $\gamma < \gamma_k$, а $\eta < \eta_0$, давление регулярного отражения может превышать давление нормального отражения;

3) если $\gamma > \gamma_k$, при любом значении η давление регулярного отражения может превышать давление нормального отражения.

Эти выводы подтверждаются данными численного расчета (фиг. 5).

5. Формула для угла и давления регулярного отражения при $\tau_1 = \tau_0$. Выше было установлено, что при любом значении μ из интервала $2 \leq \mu < \infty$ функция $\kappa(\eta)$ обращается в нуль в точках η_1 и η_2 .

Исследуем поведение функции κ при $-\infty < \eta < \infty$. Из (4.6) следует, что в точках η_1 и η_2

$$(5.1) \quad d\kappa/d\eta = \pm [(\tau_0 c_1 - b_1)^2 - 4(\tau_0 c_0 - b_0)(\tau_0 c_2 - b_2)]^{1/2}$$

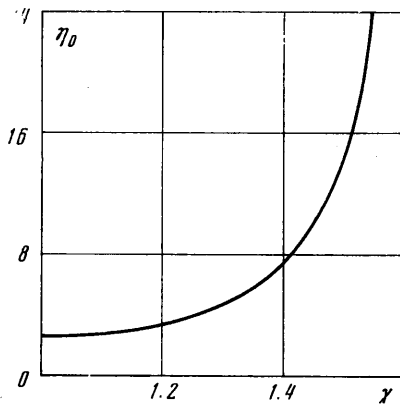
где знак плюс соответствует точке η_1 , а знак минус — точке η_2 .

Таким образом, при $2 < \mu < \infty$ производная функции κ в точке η_1 положительна, а в точке η_2 отрицательна.

Из сказанного в п. 4 следует:

$$(5.2) \quad \eta_1 < 0 \quad (2 \leq \mu < \infty)$$

$$(5.3) \quad \eta_2 < 0 \quad (2 \leq \mu < \mu_2), \quad \eta_2 > 0 \quad (\mu_2 < \mu < \infty)$$



Фиг. 6

Исходя из (4.12), последнее неравенство можно заменить более точным

$$(5.4) \quad \eta_2 \geq 1 + \sqrt{2} \quad (\mu_2 < \mu < \infty)$$

Учитывая (4.10) и (4.11), можно, кроме того, показать, что

$$(5.5) \quad \eta_1 - \eta_2 = \frac{[(\tau_0 c_1 - b_1)^2 - 4(\tau_0 c_0 - b_0)(\tau_0 c_2 - b_2)]^{1/2}}{2(\tau_0 c_2 - b_2)} > 0 \quad (2 \leq \mu < \mu_2)$$

На основании (5.1)–(5.5) можно теперь утверждать, что при изменении η от $-\infty$ до ∞ функция $\kappa(\eta)$ качественно имеет вид, представленный на фиг. 7, где a и b соответствуют $2 \leq \mu < \mu_2$ и $\mu_2 < \mu < \infty$.

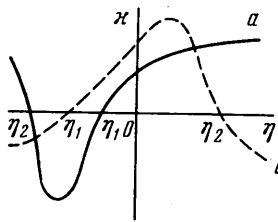
Таким образом, если $2 \leq \mu < \mu_2$ $\kappa(\eta) > 0$ ($1 \leq \eta < \infty$). Если же $\mu_2 < \mu < \infty$ $\kappa(\eta) \geq 0$ ($1 \leq \eta \leq \eta_2$), $\kappa(\eta) < 0$ ($\eta_2 < \eta < \infty$)

Тогда, учитывая (4.5) и (4.6) и имея в виду принятое при $\mu_2 < \mu < \infty$ обозначение $\eta_2 = \eta_0$, можно утверждать, что если $2 \leq \mu < \mu_2$, то в (4.4)

$$(5.6) \quad \left(\sum_{i=0}^4 a_i \eta^i \right)^{1/2} = \kappa(\eta) \quad (1 \leq \eta < \infty)$$

если же $\mu_2 < \mu < \infty$, то в (4.4)

$$(5.7) \quad \left(\sum_{i=0}^4 a_i \eta^i \right)^{1/2} = \begin{cases} \kappa(\eta) & (1 \leq \eta \leq \eta_0) \\ -\kappa(\eta) & (\eta_0 < \eta < \infty) \end{cases}$$



Фиг. 7

Воспользуемся в (5.6) и (5.7) явным выражением (4.6) для $\kappa(\eta)$ и подставим получающиеся при этом суммы в (4.4). Выразив, кроме того, b_j и c_j через μ , для угла регулярного отражения при $\tau_1 = \tau_0$ будем иметь

$$(5.8) \quad \tau_2 = \tau_0 \quad (2 \leq \mu \leq \mu_2, 1 \leq \eta < \infty)$$

$$(5.9) \quad \tau_2 = \begin{cases} \tau_0 & (1 \leq \eta \leq \eta_0) \\ \tau_0(\mu-2) [(\mu+2)\eta^2 - 2\eta - \mu] / (3\mu+2)\eta^2 + 2\mu^2\eta + \mu & (\eta_0 < \eta < \infty) \end{cases} \quad (\mu_2 < \mu < \infty)$$

Таким образом, если $\tau_1 = \tau_0$, то при $2 \leq \mu \leq \mu_2$ ($\gamma_k \leq \gamma \leq 3$) угол отражения ударной волны всегда равен углу падения. Если же $\mu_2 < \mu < \infty$ ($1 \leq \gamma < \gamma_k$), то, как и утверждалось соотношением (4.2), это имеет место лишь при $1 \leq \eta \leq \eta_0$. Очевидно (5.9) есть найденное явное выражение для (4.2).

Из (4.12) следует, что $\eta_0 \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow \mu_2$. Значит, при $\mu \rightarrow \mu_2$ соотношение (5.9) переходит в (5.8).

Из (5.9) и (4.12), кроме того, следует, что при $\mu \rightarrow \infty$ ($\gamma \rightarrow 1$)

$$(5.10) \quad \tau_2 = \begin{cases} 1 & (1 \leq \eta \leq 1 + \sqrt{2}) \\ 1/2 [\eta - (1/\eta)] & (1 + \sqrt{2} < \eta < \infty) \end{cases}$$

Можно показать, что соотношение (5.9) непрерывно в η_0 .

Исходя из (5.9), можно также показать, что при $\mu_2 < \mu < \infty$

$$(5.11) \quad \tau_2 \rightarrow \tau_0(\mu^2 - 4) / (3\mu + 2) \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

И хотя при $\mu \rightarrow \mu_2$ выражение (5.11) не переходит в (5.8), в этом нет ничего противоречивого, так как в (5.9) при этом $\eta_0 \rightarrow \infty$.

Для вывода формулы давления регулярного отражения при $\tau_1 = \tau_0$ необходимо подставить (5.8) и (5.9) в (3.5). После ряда преобразований получаем

$$(5.12) \quad \zeta = [(\mu+2)\eta-1]/(\mu+\eta) \quad (2 \leq \mu \leq \mu_2, 1 \leq \eta < \infty)$$

$$\zeta = \begin{cases} [(\mu+2)\eta-1]/(\mu+\eta) & (1 \leq \eta \leq \eta_0) \\ \frac{k_0+k_1\eta+k_2\eta^2+k_3\eta^3+k_4\eta^4}{2(\mu-2)\eta(l_0+l_1\eta+l_2\eta^2+l_3\eta^3)} & (\eta_0 < \eta < \infty) \end{cases} \quad (\mu_2 < \mu < \infty)$$

(5.13)

$$k_0 = \mu^2(\mu-1)^2, \quad k_1 = 2\mu^2(\mu-1)(\mu+2), \quad k_2 = 2\mu^2(\mu^2+5\mu-2)$$

$$k_3 = 2\mu(\mu^3+3\mu^2+8\mu-4), \quad k_4 = (\mu^2+\mu+2)(\mu^2+3\mu-2)$$

$$l_0 = \mu^2(\mu-1), \quad l_1 = \mu(5\mu-1), \quad l_2 = \mu(\mu^2+\mu+6), \quad l_3 = \mu^2+\mu+2$$

Таким образом, если $\tau_1 = \tau_0$, то при $2 \leq \mu \leq \mu_2$ давление регулярного отражения всегда равно давлению нормального отражения. Если же $\mu_2 < \mu < \infty$, то, как и утверждалось (4.3), это имеет место лишь при $1 \leq \eta \leq \eta_0$. Соотношением (5.13), очевидно, определено явное выражение (4.3).

При $\mu \rightarrow \mu_2$ (5.13) переходит в (5.12). Если же $\mu \rightarrow \infty$, то

$$(5.14) \quad \zeta = \begin{cases} \eta & (1 \leq \eta \leq 1+\sqrt{2}) \\ \frac{1}{2}(\eta+\eta^{-1}+2) & (1+\sqrt{2} < \eta < \infty) \end{cases}$$

Непосредственной подстановкой (4.12) в (5.13) можно убедиться, что соотношение (5.13) непрерывно в η_0 .

Из (5.12) и (5.13), наконец, следует, что

$$(5.15) \quad \zeta \rightarrow \mu+2 \quad (2 \leq \mu \leq \mu_2, \eta \rightarrow \infty)$$

$$(5.16) \quad \zeta \rightarrow \frac{\mu^4+4\mu^3+3\mu^2+4\mu-4}{2(\mu-2)(\mu^2+\mu+2)} \quad (\mu_2 < \mu < \infty, \eta \rightarrow \infty)$$

И хотя при $\mu \rightarrow \mu_2$ выражение (5.16) не переходит в (5.15), в этом нет ничего противоречивого, так как при этом $\eta_0 \rightarrow \infty$.

Автор признателен В. А. Белоконю за стимулирующие дискуссии¹.

Поступила 1 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
2. Polachek H., Seeger R. On the shock wave phenomena. Interaction of shock waves in gases. Proc. Sympos. Appl. Math., 1949, vol. 1.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехтеоретиздат, 1954.
4. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
5. Арутюнян Г. М., Белоконь В. А., Карчевский Л. В. О влиянии показателя адиабаты на отражение ударных волн. ПМТФ, 1970, № 1.
6. Эммонс Г. Основы газовой динамики. М., Изд-во иностр. лит., 1963, стр. 463.
7. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М., «Наука», 1971.
8. Арутюнян Г. М. К расчету давления в критической точке при падении ударной волны на тело, движущееся со сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 6.

¹ В п. 7 работы [8] автора вместо фразы «Используя соотношения на скачках и контактном разрыве...», следует читать: «Используя соотношения на скачках и условие равенства давлений, получаем уравнение (7.1) относительно ординат точек пересечения ударных адиабат, исходящих из точек 1 и 2.

В соотношениях (7.3) и (7.4) предполагается, что $p_1 \neq p_0$, $p_2 \neq p_0$, а значения p считаются заранее неизвестными. Можно, однако, показать, что при $p_1 \neq p_0$, $p_2 \neq p_0$ в действительности всегда $p < p_1 p_2 / p_0$. Следовательно, условие вторичных отражений окончательно можно записать в виде $p_1 > p_2 > p_0$.