

УДК 533.6.011.35

О ПЛОСКИХ ВИХРЕВЫХ ОКОЛОЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Г. Д. СЕВОСТЬЯНОВ

(Саратов)

Получены уравнения плоских околозвуковых вихревых адиабатических (неизэнергетических и неизэнтропических) течений идеального совершенного газа с использованием естественных координат $\varphi\psi$ ($\psi = \text{const}$ — семейство линий тока, $\varphi = \text{const}$ — семейство ортогональных им линий). На околозвуковое течение газа не накладывается требование близости его к однородному звуковому потоку (вывод дан без ε -оценок). Найдены и исследованы решения полученных уравнений, описывающие вихревые течения внутри сопла Лаваля и вблизи звуковой границы свободной струи.

1. В системе уравнений плоского адиабатического установившегося течения идеального совершенного газа

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \rho \mathbf{w} &= 0, \quad \rho \mathbf{w} \operatorname{grad} \mathbf{w} = -\operatorname{grad} P \\ (1.1) \quad P &= (\kappa - 1) / \kappa \rho H, \quad \mathbf{w} \operatorname{grad} (H + w^2 / 2) = 0 \\ \mathbf{w} \operatorname{grad} s &= 0 \end{aligned}$$

перейдем к естественной глобальной ортогональной системе координат $\varphi\psi$ ($\operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \psi = 0$)

$$(1.2) \quad \rho u / \rho_c w_c = \psi_y, \quad \rho v / \rho_c w_c = -\psi_x, \quad g u / w = \varphi_x, \quad g v / w = \varphi_y$$

Здесь $\mathbf{w}(u, v)$ — вектор скорости и его координаты на оси x, y декартовой системы, P, ρ — давление и плотность газа, H — энтальпия, κ — отношение теплоемкостей, ρ_c, w_c — постоянные размерности плотности и скорости соответственно, ψ — функция тока, φ — «вихревой» потенциал скорости, g — безразмерная подлежащая определению функция, связанная с интегрирующим множителем выражения $u dx + v dy = w / g d\varphi$ (если вихрь $\Omega = v_x - u_y = 0$, то $g = w / w_c$), s — энтропия, H_0 — полная энтальпия. Пусть θ — угол наклона \mathbf{w} к оси x ($u = w \cos \theta, v = w \sin \theta$). Тогда, вводя функции

$$(1.3) \quad \lambda = w / w_c, \quad \rho^\circ = \rho / \rho_c, \quad m = \rho^\circ \lambda, \quad h = H / w_c^2, \quad p = P / \rho_c w_c^2, \quad \omega = \Omega / w_c$$

и исключая из (1.2) перекрестным дифференцированием φ и ψ , получим

$$(1.4) \quad q(\ln m)_\varphi + m \theta_\varphi = 0, \quad m(\ln g)_\psi - g \theta_\psi = 0$$

Система (1.1) примет вид ($h_0 = H_0 / w_c^2$)

$$(1.5) \quad m \lambda_\varphi = -p_\varphi, \quad m \lambda_\psi = -p_\psi - \omega, \quad h = \frac{\kappa}{\kappa - 1} p / \rho^\circ$$

$$h + \lambda^2 / 2 = h_0(\psi), \quad s = s(\psi)$$

$$(1.6) \quad \omega = \lambda g \theta_\varphi - m \lambda_\psi = m \lambda (\ln g / \lambda)_\psi$$

Второе уравнение (1.4) — условие ортогональности системы $\varphi\psi$. Переход с плоскости $\varphi\psi$ на физическую плоскость осуществляется по формуле

$$(1.7) \quad d(x+iy) = \exp(i\theta) [g^{-1}d\varphi + im^{-1}d\psi], \quad i = \sqrt{-1}$$

где dx, dy — полные дифференциалы в силу (1.4), поэтому система $\varphi\psi$ глобальная.

Система (1.5) тождественно удовлетворяется с помощью известных соотношений

$$(1.8) \quad P = (\kappa - 1) / \kappa \rho H, \quad \rho = [(\kappa - 1)H / (\kappa c)]^{1/(\kappa - 1)} f(\psi) \\ f(\psi) = \exp[-(s - s_0) / R], \quad H = H_0(\psi) - w^2 / 2$$

$$\Omega / \rho = -H_0'(\psi) + \frac{\kappa - 1}{\kappa} H s'(\psi) / R$$

Здесь $R = c_p - c_v$ — газовая постоянная, $s_0 = s(\psi_0)$, $H_{00} = H_0(\psi_0)$ на некоторой выбранной линии тока $\psi = \psi_0$. Вводя скорость звука $a = [(\kappa - 1)H]^{1/2}$ и число Маха $M = w / a$, преобразуем (1.4) с помощью (1.8)

$$(1.9) \quad (M^2 - 1) g \lambda_\varphi / \lambda = \lambda \rho^\circ \theta_\psi, \quad g \theta_\psi = \rho^\circ \lambda_\psi + \rho^\circ \lambda \left[-\frac{H_0'(\psi)}{w^2} + \frac{s'(\psi)}{\kappa R M^2} \right]$$

Функцию g можно с помощью (1.6) и (1.8) представить в виде

$$(1.10) \quad g = \lambda \exp \left\{ \int_{\psi_0}^{\psi} \left[-w^{-2} H_0'(\psi) + (\kappa R M^2)^{-1} s'(\psi) \right] d\psi \right\}$$

интеграл берется вдоль линии постоянства φ .

В случае изэннергетического течения ($H_0' = 0$) система (1.9) переходит в систему из [1, 2], однако используемые в этих работах естественные координаты и уравнения являются локальными. Конечно, с помощью принципа «замещения» ([3], § 39) для совершенного газа достаточно рассмотреть изэннергетические вихревые течения, однако ниже (1.9) будут заменены приближенными уравнениями при $M \approx 1$, при этом обратный переход от сопряженного изэннергетического течения к исходному ($H_0' \neq 0$) течению для таких уравнений затруднителен.

2. При изучении околосвуковых течений ($M \approx 1$) удобно выбрать постоянные

$$w_c = a_*(\psi_0) = a_{*0}, \quad \rho_c = \rho_*(\psi_0) = \rho_{*0}, \quad c = P_{*0} \rho_{*0}^{-\kappa}$$

где $a_*(\psi)$, $\rho_*(\psi)$ — критические скорость звука и плотность. Учитывая соотношения

$$(2.1) \quad w^2 / 2 + a^2 / (\kappa - 1) = H_0(\psi) = \frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)} a_*^2(\psi) = r(\psi) H_{00}$$

найдем при $w = a = a_*(\psi)$ критические значения функций в (1.9)

$$\lambda_* = r^{1/2}(\psi), \quad \rho_*^\circ = f(\psi) r^{1/(\kappa - 1)}(\psi), \quad g_* = f^{-1/\kappa}(\psi) r^{-1/(\kappa - 1)}(\psi)$$

При околосвуковых скоростях потока ($M \approx 1$) перейдем в (1.9) к новым переменным η, Ψ

$$w = a_*(\psi) (1 + \eta), \quad |\eta| \ll 1$$

$$(2.2) \quad \Psi = \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi}{b(\psi)}, \quad b(\psi) = f^{(\kappa + 1)/\kappa}(\psi) r^{(\kappa + 3)/(2\kappa - 2)}(\psi)$$

$$(3.1) \quad (\kappa+1)\eta\eta_\psi = \theta_\psi, \quad |\eta| \ll 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\theta_\psi = \eta_\psi + G(\Psi) / (\kappa+1)$$

$$G(\Psi) = (\kappa+1)b(\psi) \left[-\frac{1}{\kappa-1} \frac{H_0'(\psi)}{H_0(\psi)} + \frac{s'(\psi)}{\kappa R} \right]$$

Уравнения (2.3) описывают плоские адиабатические вихревые течения идеального совершенного газа вблизи звуковой линии $M=1$ ($\eta=0$), которая в неизэнергетическом потоке не является линией постоянства w .

В случае изэнергетических ($H_0'=0, r=1$) вихревых течений аналогичные уравнения получены в [4, 5] с помощью ϵ -оценок, что накладывает требование близости течения к однородному звуковому потоку. Известные частные решения [5-7] можно распространить на случай неизэнергетических течений, вообще не близких к однородному звуковому потоку (вблизи криволинейной звуковой линии). Ниже в системе (2.3) и ее решениях будем вместо Ψ писать ψ .

3. Кроме автомодельных решений вида

$$(\kappa+1)\eta = \psi^{2n-2}q(\xi), \quad (\kappa+1)\theta = \psi^{3n-3}t(\xi), \quad \xi = \varphi\psi^{-n}$$

существующих [7] при специальном виде вихревой функции $G(\psi) = k\psi^{2n-3}$, для системы (2.3) можно указать несколько неавтомодельных аналитических решений, некоторые из них имеют место при любой достаточно гладкой функции $G(\psi)$.

Так, получающееся из (2.3) уравнение

$$(3.1) \quad (\kappa+1)(\eta\eta_\psi)_\psi = \eta_\psi\eta + G'(\psi) / (\kappa+1)$$

имеет решение, которое для безвихревого течения ($G=0$) при $q_1=0$ переходит в решение Томотики и Тамады [8]

$$(3.2) \quad (\kappa+1)\eta = q_0(\psi) + q_1(\psi)\varphi + q_2(\psi)\varphi^2$$

$$q_2'' = 6q_2^2, \quad q_1'' = 6q_2q_1,$$

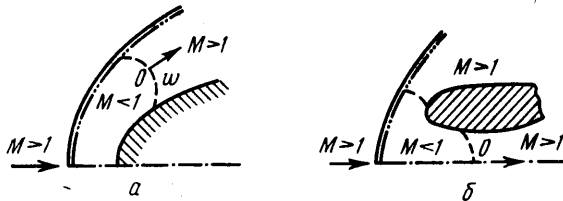
$$q_0'' = 2q_2q_0 + q_1^2 - G'$$

$$q_2(\psi) = N^2\wp(N\psi + c, 0; \pm 4)$$

или $q_2(\psi) = \psi^{-2}$

$$q_1(\psi) =$$

$$= q_2(\psi) \left[c_1 + c_2 \int q_2^{-2}(\psi) d\psi \right]$$



Фиг. 1

Здесь \wp — эллиптическая функция Вейерштрасса, N и c — постоянные. Общее решение уравнения для $q_0(\psi)$ легко определяется через общее решение соответствующего однородного уравнения [8, 9].

Если в (3.2) $q_2=0$, то можно найти решение (2.3)

$$(3.3) \quad (\kappa+1)\eta = A\varphi + A^2\psi^2/2 + G_0\psi - \int_0^\psi G(\psi) d\psi$$

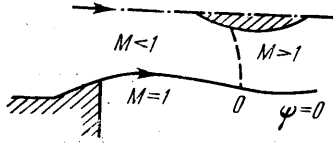
$$(\kappa+1)\theta = (A\psi^2 + G_0)\varphi + A^3\psi^3/6 + AG_0\psi^2/2 - A \int_0^\psi d\psi \int_0^\psi G(\psi) d\psi$$

Здесь начало координат O выбрано на звуковой линии в точке ее ортогональности с линией тока, ось x направлена по вектору скорости в этой точке ($\varphi = \psi = \theta = \eta = \eta_\psi = 0$), $G(0) = G_0$ и A — постоянные. Такое течение возникает, например, при обтекании выпуклого профиля сверхзвуковым потоком горючей смеси газов [10] с достаточно большой скоростью (фиг. 1, а) и внутри сопла Лавала при его зазира-

нии (фиг. 1, б). Решение (3.3) обобщает безвихревое решение работы [11] и вихревое решение из [5], справедливое при определенных ϵ -оценках вблизи точки O , на случай неизэннергетических околосвуковых течений с произвольной вихревой функцией $G(\psi)$, при этом уравнение звуковой линии $\eta=0$ на плоскости $\psi\phi$

$$(3.4) \quad \varphi = -A\psi^2/2 - G_0\psi/A + A^{-1} \int_0^\psi G(\psi) d\psi, \quad A > 0$$

Здесь ϕ увеличивается в направлении течения. Если в (3.3) $G(\psi) = G_0 + G_1\psi$, $\psi \approx 0$, то приходим к решению, по форме совпадающему с решением из [5]. При $q_2 \equiv 0$ в (3.2) можно построить другое решение (2.3)



Фиг. 2

$$(3.5) \quad \begin{aligned} (\kappa+1)\eta &= B^2\psi^4/12 + B\phi\psi + G_0\psi - \int_0^\psi G(\psi) d\psi \\ (\kappa+1)\theta &= B\phi^2/2 + (G_0 + B^2\psi^3/3)\phi + B^3\psi^6/72 + \\ &+ BG_0\psi^3/3 - B \int_0^\psi \psi d\psi \int_0^\psi G(\psi) d\psi \end{aligned}$$

которое описывает околосвуковое течение при запираии профилем звуковой свободной плоской струи (фиг. 2) и обобщает безвихревое ($G \equiv 0$) решение ([12], стр. 70). Течение имеет две пересекающиеся в точке O ($\phi = \psi = 0$) звуковые линии $\eta = 0$: звуковую свободную границу $\psi = 0$ и звуковую линию с уравнением

$$(3.6) \quad B\phi = -B^2\psi^3/12 + \psi^{-1} \int_0^\psi G(\psi) d\psi - G_0$$

Если внутри этого ускоренного течения $\psi \geq 0$, то постоянная $B > 0$, а ϕ увеличивается вниз по потоку. На свободной границе (где постоянны P, ψ) вихрь Ω не меняется, что следует из (1.8). Если при $\psi \approx 0$ подставить в (3.6) ряд $G = G_0 + G_1\psi + G_2\psi^2 + \dots$, то на плоскости $\psi\phi$ в общем случае звуковые линии в точке O не ортогональны в отличие от безвихревого случая [9, 12].

В вихревом течении при $G_0 \neq 0$ точка O не совпадает с точкой перегиба звуковой свободной границы $\psi = 0$.

Если в (2.3) $G(\psi) = c^2\alpha\psi$, то имеем решение

$$(3.7) \quad (\kappa+1)\eta = c\Phi(z) + c^2\psi^2, \quad z = \phi + c\psi^2/2$$

$$(3.8) \quad \Phi\Phi' = \Phi + (2+\alpha)z$$

Здесь $c > 0$ и α — постоянные.

Решение (3.7) описывает непрерывные симметричные вихревые течения в соплах Лавала (безвихревой случай исследован в [8]). Сделав замену $\Phi = dz/d\xi$, получим для $z(\xi)$ линейное уравнение $z'' = z' + (2+\alpha)z$, тогда общее решение (3.8) дается в параметрической форме

$$(3.9) \quad \begin{aligned} z &= c_1 \exp(A_1\xi) + c_2 \exp(A_2\xi) \\ \Phi &= c_1 A_1 \exp(A_1\xi) + c_2 A_2 \exp(A_2\xi) \\ A_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\alpha + \frac{9}{4}} \quad -\infty \leq \xi \leq +\infty \end{aligned}$$

Функция $\Phi(z)$ характеризует изменение скорости вдоль оси сопла $\psi = 0$, поэтому случай $\alpha < -9/4$ физически неинтересен для непрерывного течения, так как на плоскости $z\Phi$ начало координат есть фокус для кривой $\Phi(z)$.

При $\alpha > -9/4$ ($A_1 > 1/2, A_2 < 1/2$) уравнение (3.8) имеет частные решения $\Phi = A_1 z$ и $A_2 z$. Если $\alpha > -2$ ($A_1 > 1, A_2 < 0$), то решение (3.9) имеет в начале координат седло, на оси сопла — дозвуковые скорости, имеющие максимум; вдали от оси могут возникнуть местные сверхзвуковые зоны. При $\alpha = -2$ имеются два решения ($\Phi = z + c_0$ и 0). Наконец, при $-9/4 \leq \alpha < -2$ $\Phi(z)$ имеет в начале координат плоскости $z\Phi$ узел. Взяв при $-9/4 \leq \alpha < -2$ решение $\Phi = A_1 z$, придем к случаю запираия сопла Лавала (фиг. 1, б).

Можно указать еще одно решение (2.3) со звуковой свободной границей для $G(\psi) = G_0 + \frac{4}{3}c^2\beta\psi^3$

$$(3.10) \quad (\kappa+1)\eta = 2c\Phi(z)\psi + c^2\psi^4, \quad z = \varphi + c/3\psi^3$$

$$(\kappa+1)\theta = G_0\varphi + c/2[\Phi^2(z) - (3+\beta)z^2] + 2c^2[\Phi(z) + \frac{2}{3}(3+\beta)z]\psi^3 - \frac{2}{9}c^3(3+\beta)\psi^6 + \delta$$

$$(3.11) \quad \Phi\Phi' = 2\Phi + (3+\beta)z$$

Здесь $c > 0$, G_0 , β , δ — постоянные, $\psi \geq 0$. При отсутствии вихрей ($G_0 = \beta = 0$) решение исследовано в [13] (где на фиг. 2—5 V следует заменить на θ). Общее решение (3.11) дается (3.9), где $A_{1,2} = 1 \pm \sqrt{4+\beta}$. Функция $\Phi(z)$ в (3.10) характеризует изменение скорости вдоль линии тока, поэтому случай $\beta < -4$ не рассматриваем, так как начало координат плоскости $z\Phi$ есть фокус для интегральных кривых $\Phi(z)$.

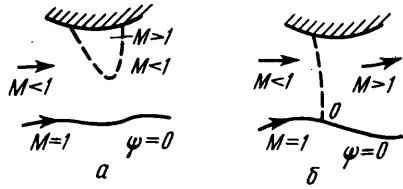
В случае $\beta > -3$ ($A_1 > 2$, $A_2 < 0$) эта точка есть седло; выбрав нижнюю ветвь решения $\Phi(z) < 0$, вдали от края струи можно обнаружить местную сверхзвуковую зону (фиг. 3, а). Если обозначить через $\Phi_m < 0$ максимум $\Phi(z)$, то свободная звуковая граница струи $\psi = 0$ при $G_0 > -2c\Phi_m$ имеет две точки перегиба (фиг. 3, а), а при $G_0 < -2c\Phi_m$ такие точки отсутствуют (сюда входит безвихревой случай $G_0 = 0$ [13]).

При $\beta = -3$ имеются два решения (3.11) ($\Phi = 2z + c_0$ и 0). Если $-4 \leq \beta < -3$, то $\Phi(z)$ имеет узел в начале координат плоскости $z\Phi$; в этом случае интересно решение $\Phi = A_1 z$, когда происходит загибание струи (фиг. 3, б), при этом линия перегиба свободной границы совпадает с точкой O ортогонального пересечения звуковых линий только при $G_0 = 0$.

В заключение отметим простое решение (2.3)

$$(\kappa+1)\eta = c\psi - \int_0^\psi G(\psi) d\psi, \quad (\kappa+1)\theta = c\varphi$$

описывающее течение около вихря вблизи звуковой окружности $\psi = 0$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$).



Фиг. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Honda M. Stream — function coordinates in rotational flow and an analysis of the flow in a shock layer. I. Two — dimensional flow. J. Inst. Math. and Applic., 1965, vol. 1, № 2, pp. 127—148.
2. Шифрин Э. Г. Некоторые свойства симметричного обтекания профиля с отошедшей ударной волной. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5, стр. 99—101.
3. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
4. Vaglio-Laurin R. Transonic rotational flow over a convex corner. J. Fluid Mech., 1960, vol. 9, No. 1, pp. 81—103.
5. Шифрин Э. Г. Плоское вихревое течение в окрестности точки ортогональности звуковой линии вектору скорости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6, стр. 144—146.
6. Ильинская Г. Б., Лифшиц Ю. Б. О возмущениях трансзвукового течения, вызываемых завихренностью. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1, стр. 168—170.
7. Лифшиц Ю. Б., Шифрин Э. Г. К задаче о трансзвуковом обтекании выпуклого угла. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 2, стр. 67—69.
8. Tomotika S., Tamada K. Studies on two-dimensional transonic flows of compressible fluids, pt 1. Quart. Appl. Math., 1950, vol. 7, No. 4, pp. 381—397. (Рус. перев.: Изучение плоских трансзвуковых течений сжимаемых жидкостей. Механика. Сб. перев. и обзор. иностр. период. лит., 1951, № 4.)
9. Севостьянов Г. Д. Плоские трансзвуковые течения газа с прямым скачком уплотнения. ПММ, 1967, № 6, стр. 1028—1034.
10. Гилинский С. М., Запryanov З. Д. О переходе сверхзвукового течения горячей смеси газов к режиму Чепмена — Жуге. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 3, стр. 137—140.
11. Фалькович С. В. К теории сопла Лавала. ПММ, 1946, т. 10, № 4.
12. Баранцев Р. Г. Лекции по трансзвуковой газодинамике. Л., Изд. ЛГУ, 1965.
13. Севостьянов Г. Д. Примеры околзвуковых течений идеального газа со скачком уплотнения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 1, стр. 49—52.

Поступила 29 V 1972