

УДК 533.6.011.5

РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ О ПОСТРОЕНИИ КОНТУРА ДВУХРЕЖИМНОГО СОПЛА

А. А. ОСИПОВ

(Москва)

Работа посвящена решению задачи оптимального профилирования сверхзвуковой части сопла в тех случаях, когда двигатель предназначается для работы на двух существенно различных режимах. Различные режимы могут быть обусловлены, например, различием в расходе топлива, в конфигурации сопла, что может быть следствием какого-либо регулирования, в условиях внешней среды и т. п. При этом рассмотрены два случая. В одном из них сопло может регулироваться посредством выдвижения в него центрального тела, причем возможны только два режима работы такого сопла — при наличии центрального тела и без него. В другом — параметры потока на входе в сопло, у которого нет дозвуковой части, изменяются по каким-либо причинам при фиксированной конфигурации сопла (например, за счет изменения расхода топлива, параметров на входе в воздухозаборник и т. п.). Получены необходимые условия, определяющие форму оптимального контура, а для его построения развит численный алгоритм. Даны примеры оптимальных сопел, контуры которых построены с помощью указанного алгоритма, и проведено их сравнение с соплами, выбранными из других соображений.

В рассматриваемой задаче, как и в случае составного сопла [1], оптимальное профилирование контура сопла должно обеспечивать реализацию максимума «средней» тяги, которую естественно определить как сумму значений тяги на том и на другом режимах, взятых с некоторыми весовыми коэффициентами. Значения указанных коэффициентов должны определяться соображениями, связанными с назначением сопла (например, с относительной важностью для данной траекторной задачи соответствующих режимов, вероятностями их осуществления и т. п.), и при решении задачи профилирования сопла могут считаться известными. В отличие от работы [1], где поток газа на входе в сопло при переходе от одного режима к другому не изменяется, в задаче, рассмотренной ниже, различным режимам работы сопла соответствуют различные параметры потока на входе. Различны и значения давления, действующего на кормовую часть двигателя в разных режимах, что, впрочем, имело место и в [1]. В данном случае, как и в [1], оптимальное профилирование не может быть выполнено на основе известных решений и требуется специальное исследование, которое и проведено ниже.

1. Рассмотрим плоское ($\nu = 0$) или осесимметричное ($\nu = 1$) сопло, в которое может выдвигаться центральное тело, как показано на фиг. 1. Пусть газ течет слева направо, а x, y — прямоугольная система координат, которая в осесимметричном случае лежит в меридиональной плоскости течения. Поток на входе в исследуемую часть сопла ($x = 0$) во всех возможных ситуациях будем считать равномерным с числом Маха $M \geq 1$. Если центральное тело отсутствует, то поток газа заполняет все сечение входа и реализуется течение в обычном осесимметричном или плоском сопле.

Контур сопла левее точки a считается заданным, поэтому в общем случае точка a является точкой излома. Ограничимся далее случаем, когда центральное тело, контур которого $a'b'$ также считается заданным, таково, что оно целиком расположено слева от замыкающей характеристики пучка волн разрежения, который образуется при обтекании излома в точке a . Кроме того, предполагается, что в области определенности искомого контура ab , ограниченной справа характеристикой первого семейства fb , отсутствуют ударные волны. Это означает, в частности, что

ударная волна, которая может возникнуть при развороте потока за центральным телом в направлении оси x , расположена правее fb .

Газ будем считать невязким и нетеплопроводным, а его энтропию и полную энтальпию при $x = 0$ в каждом из режимов — заданными и постоянными по сечению. При сделанных предположениях течение в области D , ограниченной, как в случае с центральным телом, так и без него, характеристиками af , fb и контуром ab , описывается уравнениями

$$(1.1) \quad \begin{aligned} L^{(1)} &\equiv u_y - v_x = 0 \\ L^{(2)} &\equiv \rho u_x + \rho v_y + u\rho_x + \\ &+ v\rho_y + \rho v v y^{-1} = 0 \end{aligned}$$

Здесь ρ — плотность, u и v — проекции вектора скорости газа на оси x и y , индексы x и y означают соответствующие частные производные. Заметим, что при переходе от одного режима к другому форма области D изменяется вследствие смещения характеристик af и fb .

Если характеристика af и параметры потока на ней в каждом из режимов известны, то течение в области D определяется уравнениями (1.1) и формой контура ab , на котором выполняется условие непротекания

$$(1.2) \quad L \equiv \xi' - u/v = 0$$

Здесь и далее штрихом обозначена полная производная по y вдоль контура ab , а $x = \xi(y)$ — уравнение этого контура.

Сопло может иметь кормовую часть bg , которая газом не обтекается, в силу чего ее форма при фиксированном y_g несущественна. Пусть известны постоянные значения давления p_1^+ и p_2^+ , действующего на корму bg в первом и во втором режимах соответственно.

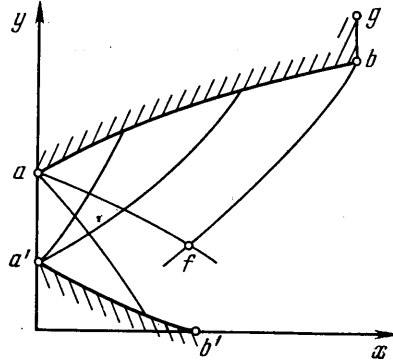
При сделанных предположениях величина тяги сопла в каждом из режимов с точностью до несущественных для дальнейшего слагаемых и множителей определяется выражением

$$(1.3) \quad \chi_i = \int_a^b p_i y^v dy - y_b^{1+v} \frac{p_i^+}{1+v} \quad (i = 1, 2)$$

Здесь и далее нижний индекс b приписан параметрам в точке b , нижний индекс i приписан параметрам газа на соответствующем режиме.

Параметры в (1.1)–(1.3) удобно считать безразмерными. При приведении к безразмерному виду следует иметь в виду, что параметры торможения, а следовательно, и критические параметры потока в сопле, соответствующие разным режимам, вообще говоря, различны. Поэтому за характерные скорость и плотность (w_* , ρ_*) в каждом режиме удобно принять их критические значения, отвечающие данному режиму. За характерную длину l_* примем ординату точки a . Обезразмеривание достигается отнесением величин с размерностью длины к l_* , скорости — к w_* , плотности — к ρ_* , давления — к $\rho_* w_*^2$ и тяги — к $\rho_* w_*^2 l_*^{1+v}$.

Сформулируем вариационную задачу. Пусть заданы максимально допустимая длина сопла X , величины давления p_1^+ и p_2^+ , положительные числа n_1 и n_2 , отношение комбинаций размерных критических параметров газа $A \equiv \rho_{*2} w_{*2}^2 / \rho_{*1} w_{*1}^2$, числа Маха M_1 и M_2 потоков на входе в сопло



Фиг. 1

(при $x = 0$) в каждом из режимов, а в случае сопла с выдвигаемым центральным телом задана форма центрального тела. Требуется построить жесткий контур сопла $x = \xi(y) \leq X$, проходящий через заданную точку a и обеспечивающий максимум «средней» тяги, определяемой выражением

$$(1.4) \quad \chi_x = n_1 \chi_1 + A n_2 \chi_2$$

Коэффициенты n_1 и n_2 в (1.4), которые, как уже говорилось выше, определяются назначением сопла, вероятностями его использования на том и на другом режиме и т. п., удобно нормировать так, чтобы $n_1 + n_2 = 1$. Тогда (1.4) в соответствии с (1.3) переписывается в виде

$$(1.5)$$

$$\chi_x = \int_a^b y^\nu [n_1 p_1 + A(1 - n_1) p_2] dy - y_b^{1+\nu} \frac{1}{1+\nu} [n_1 p_1 + A(1 - n_1) p_2]$$

2. Необходимые условия, определяющие оптимальный контур ab , находятся из рассмотрения первой вариации вспомогательного функционала

$$(2.1) \quad J = \chi_x + \int_a^b [\beta_1 n_1 L_1 + A \beta_2 (1 - n_1) L_2] dy + \\ + \iint_{D_1} n_1 (\mu_1 L_1^{(1)} + \lambda_1 L_1^{(2)}) dx dy + \\ + \iint_{D_2} A (1 - n_1) (\mu_2 L_2^{(1)} + \lambda_2 L_2^{(2)}) dx dy$$

где $\beta_i = \beta_i(y)$, $\mu_i = \mu_i(x, y)$ и $\lambda_i = \lambda_i(x, y)$ — переменные множители Лагранжа; нижние индексы $i = 1$ и 2 , как и прежде, приспаны областям D , параметрам течения и множителям Лагранжа или их функциям в соответствующем режиме. При допустимом варьировании вариации J и χ совпадают.

Независимо от того, рассматривается ли сопло с выдвигаемым центральным телом или сверхзвуковой поток на входе изменяется при фиксированной конфигурации сопла, возможные режимы течения в сопле с точки зрения решения вариационной задачи отличаются лишь граничными условиями на замыкающей характеристике af пучка волн разрежения, которые необходимы для интегрирования системы уравнений (1.1). Таким образом, постановка вариационной задачи, данная выше, отвечает как одному, так и другому рассматриваемому случаю.

В соответствии с обычной процедурой общего метода множителей Лагранжа множители β_i , μ_i , λ_i выбираются так, чтобы обратить в нуль коэффициенты перед всеми вариациями, кроме вариаций координат контура ab . В результате имеем систему уравнений и граничных условий, определяющих β_i на ab , а также μ_i и λ_i в области D . Множители Лагранжа μ_i и λ_i в D определяются уравнениями

$$(2.2) \quad a_i^2 \mu_{iy} + [\rho(a^2 - u^2)]_i \lambda_{ix} - (\rho uv)_i \lambda_{iy} + v(\rho uv)_i y^{-1} \lambda_i = 0 \\ a_i^2 \mu_{ix} + (\rho uv)_i \lambda_{ix} + [\rho(v^2 - a^2)]_i \lambda_{iy} + v[\rho(a^2 - v^2)]_i y^{-1} \lambda_i = 0 \\ (i = 1, 2)$$

Уравнения (2.2) имеют те же характеристики, что и уравнения течения на соответствующем режиме. Вдоль характеристик выполняются соотношения

$$(2.3) \quad \operatorname{tg} \alpha_i d\mu_i \mp \rho_i d\lambda_i \pm \rho_i y^{-1} \lambda_i dy = 0$$

Здесь α — угол Маха, верхний знак соответствует характеристикам первого семейства, а нижний — второго.

Граничные условия для интегрирования (2.2) ставятся на контуре ab и на характеристике fb и соответственно имеют вид

$$(2.4) \quad \mu_i = y^v(\rho v)_i, \quad (ab) \quad \mu_i + \lambda_i(\rho \operatorname{ctg} \alpha)_i = 0 \quad (fb)$$

Наконец, множители β_i на ab определяются из соотношения

$$(2.5) \quad \beta_i + y^v(\rho v)_i \lambda_i = 0$$

После того, как множители Лагранжа выбраны в соответствии с (2.2) — (2.5), приходим к следующим условиям для определения формы оптимального контура:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} n_1(\rho v)_1(\lambda_1/y - u_1)' + (1 - n_1)A(\rho v)_2(\lambda_2/y - u_2)' &= 0 \quad (ab) \\ n_1(\rho v^2 \operatorname{tg} \alpha)_{1b} + (1 - n_1)A(\rho v^2 \operatorname{tg} \alpha)_{2b} &\geq 0 \\ n_1[p_1^+ - p_1 + (\rho uv \operatorname{tg} \alpha)_1]_b + (1 - n_1)A[p_2^+ - p_2 + \\ + (\rho uv \operatorname{tg} \alpha)_2]_b &= 0 \end{aligned}$$

Первое соотношение (2.6) может быть проинтегрировано, в результате чего получим

$$(2.7) \quad E = n_1 \left(\frac{\lambda_1}{y} - u_1 \right) + (1 - n_1)A \int_{y_a}^y \frac{(\rho v)_2}{(\rho v)_1} d \left(\frac{\lambda_2}{y} - u_2 \right) - c = 0$$

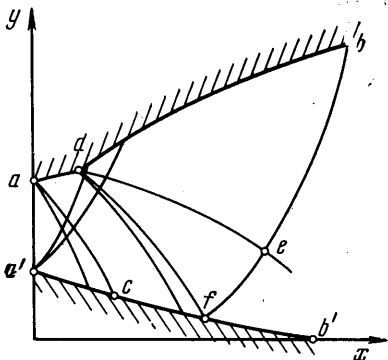
где c — константа интегрирования.

В постановке рассматриваемой задачи является существенным то обстоятельство, что замыкающая характеристика пучка волн разрежения, образующегося при обтекании излома в точке a , не приходит на центральное тело. Можно показать [2], что в противном случае в области D могут существовать линии разрыва множителей Лагранжа μ_i и λ_i . Последними в этом случае являются линии Маха второго семейства (линия fd на фиг. 2), которые, отражаясь от центрального тела как линии Маха первого семейства, приходят в точку b . Как показано в [2], указанные линии разрыва могут выходить только из точек излома оптимального контура.

Заметим, что если число Маха потока совершенного газа с постоянными теплоемкостями на входе в сопло в обоих режимах одинаково, а различны только параметры торможения потока (а следовательно, и критические параметры) и, может быть, противодействия p_1^+ и p_2^+ , то оптимальный контур принадлежит уже известному семейству контуров. Действительно, в этом случае в силу обезразмеривания поля параметров течения и множителей Лагранжа в области определенности контура ab в обоих режимах в точности одинаковы. Поэтому первое и второе условия оптимальности (2.6) имеют тот же вид, что и в случае фиксированного режима на входе в сопло, а контур оптимального сопла вследствие этого оказывается принадлежащим семейству контуров, реализующих максимум тяги при соответствующем числе Маха на входе. Конкретный контур из этого семейства выбирается согласно третьему условию оптимальности из (2.6).

3. Полученные уравнения и граничные условия составляют основу численного алгоритма построения оптимального контура двухрежимного сопла. В рассматриваемой вариационной задаче фиксируются X , n_1 , p_1^+ , p_2^+ , A , M_1 , M_2 и форма центрального тела в соответствующем случае. В то же время численный алгоритм оказывается более простым для «обратной» задачи, в которой вместо одной из величин противодействия p_1^+ или p_2^+ задается угол излома контура в начальной точке a , а само значение этого противодействия подбирается так, чтобы выполнялось третье условие оптимальности из (2.6).

Заметим, что задание угла излома контура в точке a эквивалентно заданию замыкающих характеристик пучков волн разрежения, выходящих из a , и параметров течения на них в каждом из возможных режимов. Для рассматриваемой конфигурации центрального тела это в свою очередь означает, что интеграл сил давления по его поверхности фиксирован, т. е. не изменяется при допустимом варьировании контура ab . По этой причине соответствующее слагаемое не было включено в выражение для тяги (1.5). В случае же, если замыкающая характеристика ac пучка волн разрежения



Фиг. 2

приходит в точку c на поверхности центрального тела, как показано на фиг. 2, то интеграл сил давления по участку cb' контура центрального тела зависит от формы участка ae искомого контура сопла (на фиг. 2 линия de — линия Маха второго семейства), в силу чего величина интеграла сил давления по cb' должна быть включена в (1.5).

Оптимальное распределение параметров течения и множителей Лагранжа на контуре ab должно удовлетворять условию оптимальности (2.7). Выполнение указанного условия в точке a может быть обеспечено за счет выбора константы c . Отличие величины E от нуля во всех остальных точках контура ха-

рактеризует отличие распределения $\zeta(x) = 1/\xi'$ от оптимального. Указанное обстоятельство используется для организации итерационного процесса с целью получения оптимального распределения $\zeta(x)$. Схема итерационного процесса, аналогичная примененной в [1, 3, 4], была следующей:

$$(3.1) \quad \zeta_n^j = \zeta_n^{j-1} + \epsilon_n^j E_n^j$$

где нижний индекс n означает номер расчетной точки на ab , j — номер итерации, а ϵ_n^j — константы, причем $|\epsilon_n^j| < 1$. Значения ϵ_n^j выбираются так, чтобы обеспечить лучшую сходимость итераций.

На каждом шаге итерационного процесса найденная из (3.1) зависимость $\zeta(x)$ дает возможность проинтегрировать уравнение $\xi' = 1/\zeta$. Для полученного таким образом контура сопла и граничных условий на замыкающей характеристике пучка волн разрежения, выходящего из a , методом характеристик рассчитывается течение в области D , соответствующее каждому из режимов. Это, в свою очередь, позволяет проинтегрировать в D уравнения для множителей Лагранжа μ_i и λ_i и сделать новую итерацию согласно (3.1). Абсолютная величина и знак ϵ_n^j в итерационной формуле (3.1) выбирались в зависимости от поведения невязки E_n^j в той же точке контура по методике, использованной в расчетах, результаты которых приведены в [1].

Описанный итерационный процесс ведется до тех пор, пока условие оптимальности (2.7) не будет удовлетворено с заданной точностью, а именно пока $|E_n|$ всюду на ab не станет меньше достаточно малой величины. При этом можно показать [1], что отклонение $\Delta\chi_2$ тяги сопла, построенного таким образом, от оптимального составляет величину порядка $E_{n\max}^2$, где $E_{n\max}$ — максимальное значение E_n на ab . Скорость сходимости итерационного процесса зависит от выбора начального распределения $\zeta(x)$ на ab . В данной работе за начальное бралось такое распределение $\zeta(x)$, которое соответствует оптимальному соплу, реализующему максимум тяги на том или на другом режиме в зависимости от соотношения чисел n_1 и n_2 .

Второе условие оптимальности из (2.6) при $v_b \neq 0$, что обычно имеет место, означает, что $x_b = X$.

Напомним, что при численном решении обратной задачи фиксировано только одно из противодавлений p_1^+ и p_2^+ . Величина же другого выбирается так, чтобы удовлетворить третьему условию из (2.6). Следует заметить, что для построенного в результате итерационного процесса контура сопла указанное условие оптимальности может быть выполнено и при произвольном выборе одного из противодавлений. Другими словами, построенный контур оказывается оптимальным для однопараметрического семейства пар чисел (p_1^+, p_2^+) , каждая из которых должна удовлетворять последнему соотношению (2.6) и двум неравенствам

$$(3.2) \quad 0 \leq p_1^+ \leq p_{1b}, \quad 0 \leq p_2^+ \leq p_{2b}$$

Условия (3.2) вытекают из требования безударности течения в D . Найденные таким образом p_1^+ и p_2^+ могут считаться заданными для некоторой исходной вариационной задачи, решением которой и является построенный оптимальный контур.

4. С помощью описанного выше алгоритма были построены примеры оптимальных контуров. В первом случае рассматривались осесимметричные сопла с выдвигаемым центральным телом, имеющим форму конуса, так что в точке a' , как и в точке a , реализовалось обтекание выпуклого угла. Поток газа на входе задавался равномерным и сверхзвуковым с числом Маха $M = 1.1$, одинаковым на том и на другом режимах. Газ считался совершенным с показателем адиабаты $\kappa = 1.4$. Во всех расчетах итерации велись до тех пор, пока не выполнялось условие $|E_n| < 0.002$, что требовало не более восьми итераций.

Вообще говоря, представляется более естественным рассмотреть случай, когда в обоих режимах сечение входа в сопло является критическим. В то же время отход от звуковой линии при численном интегрировании системы (1.1) в случае произвольного радиуса центрального тела потребовал выполнения значительного объема работы, не имеющей непосредственного отношения к данному исследованию (см. [5]), что автор счел нецелесообразным.

Однако отличие рассматриваемого течения на входе от критического с точки зрения решения вариационной задачи не имеет принципиального значения.

Оптимальное сопло, построенное в результате итерационного процесса, сравнивалось со средним соплом, распределение $\xi(x) = \langle \xi \rangle$ на контуре которого определяется по формуле

$$(4.1) \quad \langle \xi_n \rangle = n_1 \xi_{1n} + (1 - n_1) \xi_{2n}$$

где распределения ξ_{1n} и ξ_{2n} отвечают соплам, дающим максимум тяги соответственно в первом и во втором режимах.

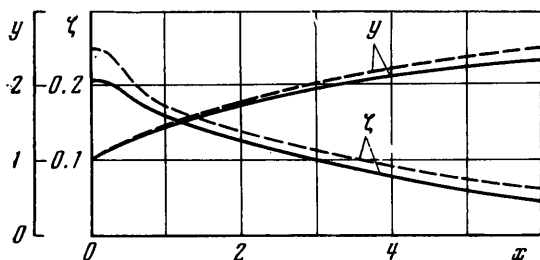
В различных вариантах расчета были различными значения следующих параметров: длины сопла X , ординаты его концевой точки y_b , длины L конической части центрального тела, ординаты r точки a' , отношения A критических параметров, коэффициента n_1 , а также противодавлений p_1^+ и p_2^+ . Для оценки эффективности оптимального профилирования вычислялась величина относительного выигрыша в значении интеграла сил давления χ_z по контурам, отвечающим сравниваемым соплам, равная $\Delta \chi_z \equiv (\chi_z - \langle \chi_z \rangle) / \chi_z$, где χ_z соответствует оптимальному соплу, а $\langle \chi_z \rangle$ — среднему.

Полученные в ряде примеров расчета результаты вместе с основными геометрическими характеристиками оптимальных сопел, а также значения A , n_1 , p_1^+ и p_2^+ приведены ниже.

№	1	2	3	4
X	6.0	6.0	5.0	5.0
y_b	2.36	2.0	1.65	2.02
L	3.0	2.0	2.0	3.0
r	0.7	0.6	0.5	0.3
A	2.0	1.5	1.2	2.0
n_1	0.7	0.4	0.6	0.8
$p_1^+ \cdot 10^2$	0.152	0.507	4.76	1.50
$p_2^+ \cdot 10$	0.24	0.43	0.70	0.50
χ_Σ	0.195	0.217	0.141	0.214
$\Delta\chi_\Sigma, \%$	2.1	1.7	1.1	0.3

Как видно, оптимальное профилирование сопла в рассматриваемом случае дает выигрыш по интегралу сил давления до 2.1%.

На фиг. 3 построены кривые распределения $\zeta(x)$, соответствующие сравниваемым контурам в первом примере расчета, а также построены сами контуры сопел, причем сплошная линия соответствует оптимальному соплу.



Фиг. 3

Концевые точки оптимального контура ab и контура, построенного в соответствии с (4.1), вообще говоря, не совпадают. Поэтому учет второго слагаемого в правой части (1.3) является существенным.

С помощью того же численного алгоритма были построены

примеры оптимальных сопел в другом случае, когда разным режимам течения на входе в осесимметричное сопло с фиксированной конфигурацией, у которого нет дозвуковой части, отвечают как разные параметры торможения, так и разные числа Маха потоков. В данной вариационной задаче в каждом из вариантов расчета фиксируются X , n_1 , A , p_1^+ , p_2^+ , а также числа Маха M_1 и M_2 потока на входе в сопло в соответствующих режимах. Как и в первом случае, при численном решении обратной задачи вместо одного из противодавлений удобнее задавать угол излома контура в начальной точке a , при этом величина этого противодавления выбирается согласно третьему условию из (2.6).

Построенное в результате итерационного процесса сопло сравнивалось с оптимальным соплом, отвечающим среднему числу Маха потока на входе и «среднему» противодавлению, равным соответственно

$$\langle M \rangle = n_1 M_1 + (1 - n_1) M_2.$$

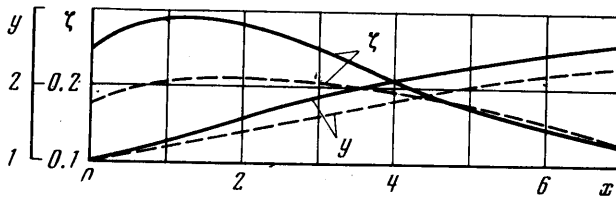
$$\langle p^+ \rangle = \frac{n_1 p_1^+ + A(1 - n_1) p_2^+}{n_1 + A(1 - n_1)}$$

Результаты примеров расчета и значения основных исходных параметров в них, соответствующие этому случаю, приведены ниже, где через $\Delta\chi_{\Sigma}$, как и ранее, обозначен относительный выигрыш в значении интеграла сил давления χ_{Σ} .

№	1	2	3
X	7.0	6.0	6.0
y_b	2.54	2.11	2.11
A	1.5	1.0	2.0
n_1	0.4	0.5	0.3
M_1	1.5	1.1	1.1
M_2	3.0	2.5	2.5
$p_1^+ \cdot 10^2$	0.319	2.55	3.22
$p_2^+ \cdot 10^2$	0.356	1.05	0.26
χ_{Σ}	0.082	0.118	0.11
$\Delta\chi_{\Sigma}, \%$	1.8	0.9	0.7

В данном случае оптимальное профилирование сопла дает выигрыш до 1.8%.

На фиг. 4 построены кривые распределения $\zeta(x)$, соответствующие сравниваемым контурам в первом примере расчета, а также построены контуры сопл. Оптимальному соплу соответствует сплошная линия.



Фиг. 4

Автор благодарит А. Н. Крайко, привлечшего его внимание к рассмотренной задаче.

Поступила 5 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Крайко А. Н., Тилляева Н. И. Решение вариационной задачи о построении контура составного сопла. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4, стр. 619—632.
2. Крайко А. Н., Осипов А. А. К решению вариационных задач сверхзвуковых течений газа с инородными частицами. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4, стр. 596—605.
3. Борисов В. М. О системе тел с минимальным волновым сопротивлением. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 6, стр. 1028—1034.
4. Шипилин А. В. Оптимальные формы тел с присоединенными ударными волнами. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4, стр. 9—18.
5. Кацкова О. Н. Расчет равновесных течений газа в сверхзвуковых соплах. М., Тр. ВЦ АН СССР, 1964.