

УДК 533.6.014

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СИЛАМИ, ДЕЙСТВУЮЩИМИ НА ТЕЛА, ДВИЖУЩИЕСЯ В РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ, В ПОТОКЕ СВЕТА И В ГИПЕРЗВУКОВОМ НЬЮТОНОВСКОМ ПОТОКЕ

А. И. БУНИМОВИЧ

(Москва)

Для пространственных, осесимметричных и плоских тел выведены справедливые в произвольной системе координат соотношения между аэродинамическими силами при движении тела в случаях, когда справедлив «закон локальности» (т. е. поток импульса на поверхности тела зависит от местного угла между скоростью и нормалью к поверхности), а суммарные силы и моменты определяются интегрированием по обращенной к потоку части поверхности тела. Получены уравнения, определяющие изменение подъемной силы (а следовательно, лобового сопротивления и аэродинамического качества), в зависимости от угла атаки в функции от площади проекции поверхности тела на плоскость, перпендикулярную направлению полета. Частными случаями полученных соотношений являются, например, ньютоновское движение тела с гиперзвуковыми скоростями, движение тела в разреженном газе, воздействие на тело светового давления.

1. Во многих областях аэродинамики и динамики полета успешно используются для определения сил и моментов, действующих на тело, различные теории, по существу основывающиеся на предположениях, что поток импульса на поверхности тела в основном зависит от локальных свойств поверхности и местного угла между нормалью к поверхности и скоростью потока (закон локальности).

В рамках этих теорий местные коэффициенты давления и касательной силы в некоторой точке поверхности тела задаются соответственно в форме ($R \geq 2$)

$$(1.1) \quad c_p = \sum_{k=0}^R A_k (vn)^k,$$

$$c_\tau = (v\tau) \sum_{k=1}^{R-1} B_k (vn)^k = [1 - (vn)^2]^{1/2} \sum_{k=1}^{R-1} B_k (vn)^k$$

где v — орт скорости потока, n — орт нормали к поверхности тела (положительный, если n направлено внутрь тела), A_k , B_k — постоянные величины определяющие законы взаимодействия потока с поверхностью тела. Поскольку орт касательной к поверхности тела

$$(1.2) \quad \tau = [n \times (v \times n)] / |n \times (v \times n)| = [v - n(vn)] / [1 - (vn)^2]^{1/2}$$

то коэффициент силы, действующей на элемент поверхности, имеет вид

$$c_f = c_p n + c_\tau \tau = A_0 n + A_1 (vn) n + \sum_{k=1}^{R-1} [(A_{k+1} - B_k) (vn)^{k+1} n + B_k (vn)^k v] \quad (1.3)$$

Частными случаями соотношения (1.3) являются:

1) гиперзвуковое течение газа в предположениях теории Ньютона

$$(1.4) \quad c_f = c_p n = A_2 (vn)^2 n$$

($A_2 = 2$ в теории Ньютона; $A_2 = c_{p0}$ при обтекании тупоносого тела с отошедшей ударной волной, $A_2 = c_{p0} / (vn)_0^2$ для передней конической кромки остроносого тела с присоединенной ударной волной — в модифицированных теориях Ньютона). Отметим, что известные в теории гиперзвуковых течений методы плоских сечений, касательных конусов и касательных клиньев являются по существу следствием закона локальности;

2) гиперзвуковое свободномолекулярное течение разреженного газа при диффузно-зеркальном отражении

$$(1.5) \quad c_f = 2(2 - \sigma - \sigma_\tau) (vn)^2 n + 2\sigma_\tau (vn) v$$

где σ и σ_τ — коэффициенты аккомодации нормального и касательного импульсов;

3) течение разреженного газа в приближении Шрелло [1]

$$(1.6) \quad c_f = 2(2 - \sigma - \sigma_\tau) (vn)^2 n + \frac{\sigma}{S_\infty} \sqrt{\pi \frac{T_w}{T_\infty}} (vn) n + 2\sigma_\tau (vn) v + \frac{2 - \sigma}{S_\infty} n$$

где T_w и T_∞ — температура тела и внешнего потока, $S_\infty = v(2RT_\infty)^{-1/2}$;

4) воздействие светового потока на тело

$$(1.7) \quad c_f = e(2 - A - B) (vn)^2 n + \frac{2}{3} [1 - e(1 - A)] (vn) n + [1 - e(1 - B)] (vn) v$$

где e , A , B — коэффициенты отражательной способности, аккомодации нормального и касательного импульсов соответственно;

5) течение разреженного газа в промежуточном режиме [2], где коэффициенты A_k , B_k и верхние пределы сумм R определяются на основании имеющихся экспериментальных данных.

Интегрируя выражение (1.3) по поверхности тела, получаем формулы для аэродинамических сил и моментов, действующих на тело.

В данной работе показывается, что при выполнении закона локальности между аэродинамическими силами и моментами и их производными существуют универсальные соотношения справедливые при произвольных углах атаки и скольжения. Использование этих соотношений дает возможность, в частности, в ряде случаев ограничиться при экспериментальных и расчетных исследованиях определением только одной из составляющих сил, так как остальные составляющие могут быть достаточно просто получены путем пересчета по приведенным формулам.

2. Безразмерный коэффициент аэродинамической силы, действующей на тело в рамках закона локальности, определяется интегрированием соотношения (1.3) по «освещенной» поверхности тела, т. е.

$$(2.1) \quad c_F = \frac{1}{S_0} \int_S c_f dS = A_0^* \int_S \mathbf{n} dS + A_1^* \int_S (\mathbf{vn}) \mathbf{n} dS + \\ + \sum_{k=1}^{R-1} \left\{ B_k^* \int_S (\mathbf{vn})^k \mathbf{v} dS + (A_{k+1}^* - B_k^*) \int_S (\mathbf{vn})^{k+1} \mathbf{n} dS \right\}$$

$$A_k^* = A_k / S_0, \quad B_k^* = B_k / S_0$$

где S_0 — характерная площадь, а интегрирование ведется по области $\mathbf{vn} \geq 0$, ограниченной условием $\mathbf{vn} = 0$. В дальнейшем опустим звездочки у величин A_k^* и B_k^* . Направление вектора скорости потока $\mathbf{v}(\theta, \varphi)$ определяется любыми двумя независимыми углами θ и φ , измеряемыми относительно заданной системы координатных осей. В указанных предположениях справедливы соотношения

$$(2.2) \quad R c_{Fv_\theta} = c_{F\theta} v + N_{R\theta}, \quad R c_{Fv_\varphi} = c_{F\varphi} v + N_{R\varphi}$$

$$(2.3) \quad R c_{Fv} + \frac{c_{F\theta} v_\theta}{v_\theta^2} + \frac{c_{F\varphi} v_\varphi}{v_\varphi^2} = \Phi_R$$

$$(2.4) \quad c_{F\theta} v_\varphi = c_{F\varphi} v_\theta$$

$$c_{F\delta} = \partial c_F / \partial \delta, \quad v_\delta = \partial v / \partial \delta, \quad \delta = \theta, \varphi$$

$$(2.5) \quad N_R = \int_S (\mathbf{vn}) \left\{ R A_0 + \frac{R-1}{2} A_1 (\mathbf{vn}) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{R-1} \left[(A_{k+1} - B_k) \frac{R-k-1}{k+2} (\mathbf{vn})^{k+1} - B_k (\mathbf{vn})^{k-1} \right] \right\}$$

$$(2.6) \quad \Phi_R = \int_S \left\{ A_1 + R A_0 (\mathbf{vn}) + (R-1) A_1 (\mathbf{vn})^2 + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{R-1} [(A_{k+1} - B_k) \{ (R-k-1) (\mathbf{vn})^{k+2} + (k+1) (\mathbf{vn})^k \} + \right. \\ \left. + (R+2) B_k (\mathbf{vn})^k \right\}$$

Отметим, что соотношение (2.4), являясь следствием (2.2), в отличие от них не зависит от формы обтекаемого тела. При выводе формул (2.2) — (2.4) использованы условия $\mathbf{v}\mathbf{v}_\varphi = \mathbf{v}\mathbf{v}_\theta = 0$ и требование об ортогональности векторов \mathbf{v}_φ и \mathbf{v}_θ .

Коэффициент момента сил, действующих на тело

$$(2.7) \quad m = \int_S \left\{ (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \left[A_0^+ + A_1^+(\mathbf{v}\mathbf{n}) + \sum_{k=1}^{R-1} (A_{k+1}^+ - B_k^+) (\mathbf{v}\mathbf{n})^{k+1} \right] + \right. \\ \left. + (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \sum_{k=1}^{R-1} B_k^+ (\mathbf{v}\mathbf{n})^k \right\} dS$$

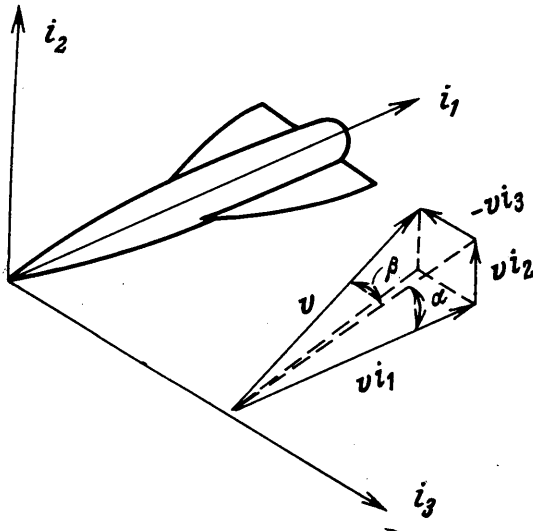
$$A_k^+ = A_k / l_R S_0, \quad B_k^+ = B_k / l_R S_0$$

(l_R — характерная длина, \mathbf{r} — векторное расстояние от центра моментов до данной точки поверхности тела) удовлетворяет соотношению

$$Rm\mathbf{v} + \frac{m_\theta \mathbf{v}_\theta}{v_\theta^2} + \frac{m_\varphi \mathbf{v}_\varphi}{v_\varphi^2} = \mathbf{v} \mathbf{G}_R \quad (2.8)$$

$$\mathbf{G}_R = \int_S (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \left\{ R A_0^+ + (R-1) A_1^+(\mathbf{v}\mathbf{n}) + \sum_{k=1}^{R-1} [(R-k-1)(A_{k+1}^+ - B_k^+) (\mathbf{v}\mathbf{n})^2 - k B_k^+] \times \right. \\ \left. \times (\mathbf{v}\mathbf{n})^{k-1} \right\} dS$$

$$(2.9) \quad m_\delta = \partial m / \partial \delta, \quad \delta = \theta, \varphi$$



Фиг. 1

Для получивших широкое распространение моделей обтекания, перечисленных в 1) — 4) практически интересны соотношения (2.2), (2.3), (2.8) в случае $R=2$. Вводя в этом случае видоизмененные коэффициенты аэродинамической силы и момента по формулам

$$(2.10) \quad c_F^* = c_F - \int_S [A_0 + A_2 + B_1 + A_1(\mathbf{v}\mathbf{n})] \mathbf{n} dS,$$

$$m^* = m - \int_S (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \left[A_0^+ - \frac{1}{2} B_1^+ + A_1^+(\mathbf{v}\mathbf{n}) \right] dS$$

перепишем соотношения (2.3) и (2.8) в форме

$$(2.11) \quad 2c_F^* \mathbf{v} + \frac{c_{F\theta}^* \mathbf{v}_\theta}{v_\theta^2} + \frac{c_{F\varphi}^* \mathbf{v}_\varphi}{v_\varphi^2} = 0, \quad 2m^* \mathbf{v} + \frac{m_\theta^* \mathbf{v}_\theta}{v_\theta^2} + \frac{m_\varphi^* \mathbf{v}_\varphi}{v_\varphi^2} = 0$$

Для частного случая $R=2$, $B_1 = A_1 = A_0 = 0$ соотношения (2.2), (2.3), (2.8) рассматривались в работе [3].

3. В качестве основной выберем поточную систему координат, в которой величина и направление коэффициента суммарной силы, действующей

щей на тело, при произвольных углах θ и φ определяются формулой

$$(3.1) \quad c_F = c_x v + c_y j + c_z s, \quad j = v_\theta / |v_\theta|, \quad s = v \times j$$

где c_x — коэффициент лобового сопротивления, c_y и c_z — соответственно коэффициенты подъемной и боковой силы. Для удовлетворения условию $v_\theta v_\varphi = 0$ выбираем $s = \pm v_\varphi / |v_\varphi|$.

Обтекание пространственного тела. Полученные общие соотношения применимы при любом определении углов крена α_c и тангажа φ или углов атаки α и скольжения β . Определим углы α и β как показано на фиг. 1. При этом

$$(3.2) \quad \operatorname{tg} \alpha = (vi_2) / (vi_1), \quad \sin \beta = -vi_3,$$

$$v = i_1 \cos \alpha \cos \beta + i_2 \sin \alpha \cos \beta - i_3 \sin \beta$$

где i_1, i_2, i_3 — орты связанной с телом системы осей.

Подставляя (3.1) и (3.2) в соотношения (2.2)–(2.4), где (θ, φ) заменено на (α, β) , получим

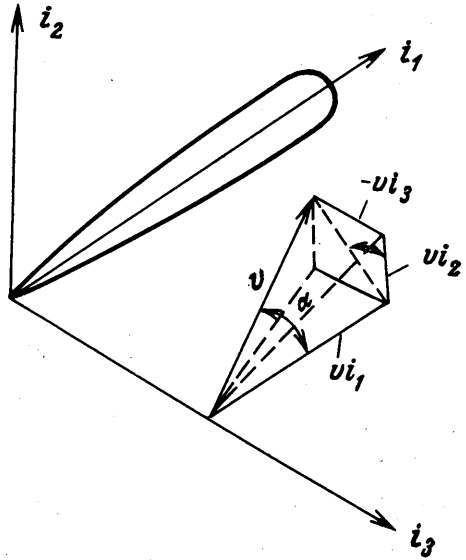
$$(3.3) \quad c_{x\alpha} = (R + 1) c_y \cos \beta - N_{R\alpha}$$

$$(3.4) \quad c_{x\beta} = -(R + 1) c_z - N_{R\beta}$$

$$(3.5) \quad (R + 2) c_x + c_{y\alpha} \operatorname{sc} \beta + c_z \operatorname{tg} \beta - c_{z\beta} = \Phi_R$$

$$(3.6) \quad c_{z\alpha} = c_y \sin \beta - c_{y\beta} \cos \beta$$

Соотношение (3.6) показывает, что изменение боковой силы определяется только величиной и характером изменения подъемной силы, независимо от формы движущегося тела. Подставляя (3.3), (3.4) в (3.5), получим уравнение, определяющее изменение c_x в зависимости от угла атаки и угла скольжения



Фиг. 2

$$(3.7) \quad c_{x\alpha\alpha} \operatorname{sc}^2 \beta + c_{x\beta\beta} - c_{x\beta} \operatorname{tg} \beta + (R + 1) (R + 2) c_x = (R + 1) \Phi_R - N_{R\beta\beta} - N_{R\alpha\alpha} \operatorname{sc}^2 \beta + N_{R\beta} \operatorname{tg} \beta$$

Если ввести обозначения

$$(3.8) \quad c_x^1 = c_x + N_R, \quad \Psi_R = \Phi_R + (R + 2) N_R$$

то соотношения (3.3), (3.4), (3.7) переписутся в более удобной форме

$$c_{x\alpha}^1 = (R + 1) c_y \cos \beta, \quad c_{x\beta}^1 = -(R + 1) c_z$$

$$c_{x\alpha\alpha}^1 \operatorname{sc}^2 \beta + c_{x\beta\beta}^1 - c_{x\beta}^1 \operatorname{tg} \beta + (R + 1) (R + 2) c_x^1 = (R + 1) \Psi_R$$

Применяя соотношение (2.8) к моментам, определенным относительно связанной с телом системы осей, т. е. полагая

$$(3.9) \quad m = -m_{x1} i_1 - m_{y1} i_2 - m_{z1} i_3 = -m_l i_1 - m_m i_2 - m_n i_3$$

где m_l , m_m , m_n — коэффициенты моментов крена, рысканья и тангажа соответственно, получим

$$\begin{aligned} & - (G_{R_l} + m_l R) \cos \alpha \cos \beta - (G_{R_m} + m_m R) \sin \alpha \cos \beta + \\ & + (G_{R_n} + m_n R) \sin \beta + m_{l_\alpha} \sin \alpha \sec \beta + m_{e_\beta} \cos \alpha \sin \beta - \\ & - m_{m_\alpha} \cos \alpha \sec \beta + m_{m_\beta} \sin \alpha \sin \beta + m_{n_\beta} \cos \beta = 0 \end{aligned}$$

Для случая $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$ соотношение (3.10) сводится к

$$(3.11) \quad G_{R_{l_0}} + m_{l_0} R + m_{m_{\alpha_0}} - m_{n_{\beta_0}} = 0$$

Осесимметричное тело. Определим направление скорости углами α и φ (фиг. 2). Тогда

$$\cos \alpha = \mathbf{v} \mathbf{i}_1, \quad \operatorname{tg} \varphi = - (\mathbf{v} \mathbf{i}_3) / (\mathbf{v} \mathbf{i}_2),$$

$$(3.12) \quad \mathbf{v} = \mathbf{i}_1 \cos \alpha + \mathbf{i}_2 \sin \alpha \cos \varphi - \mathbf{i}_3 \sin \alpha \sin \varphi$$

Коэффициент суммарной силы определяется на основании (3.1) формулой

$$(3.13) \quad \mathbf{c}_F = c_x \mathbf{v} + c_y \mathbf{j}$$

Полагая в формулах (2.2), (2.3) α и φ вместо (θ, φ) и пользуясь (3.12), (3.13), получим

$$(3.14) \quad (R+1)c_y = c_{x_\alpha} + N_{R_\alpha}, \quad (R+2)c_x + c_{y_\alpha} + c_y \operatorname{ctg} \alpha = \Phi_R$$

Из (3.14) следуют уравнения, определяющие соответственно коэффициенты лобового сопротивления, подъемной силы и аэродинамического качества

$$(3.15) \quad c_{x_{\alpha\alpha}} + c_{x_\alpha} \operatorname{ctg} \alpha + (R+1)(R+2)c_x = (R+1)\Phi_R - N_{R_\alpha} \operatorname{ctg} \alpha - N_{R_{\alpha\alpha}}$$

$$(3.16) \quad c_{y_{\alpha\alpha}} + c_{y_\alpha} \operatorname{ctg} \alpha + [(R+1)(R+2) - \operatorname{csc}^2 \alpha] c_y = \Psi_{R_\alpha}$$

$$(3.17) \quad \frac{c_y}{c_x} = \frac{d}{d\alpha} [\log(c_x)^{1/(R+1)}] + \frac{1}{R+1} \frac{N_{R_\alpha}}{c_x}$$

Соотношение (2.8) сводится к очевидному условию $m_\varphi = 0$. Если известны функции $\Phi_R(\alpha)$, $N_R(\alpha)$, то $\Delta c_x = c_x - c_{x_0}$, $\Delta c_y = c_y - c_{y_0}$ находятся непосредственно из уравнений (3.15), (3.16) или (3.14). Для малых α , поскольку $c_y \operatorname{ctg} \alpha \approx c_{y_\alpha}$, из уравнений (3.14) получим

$$(3.18) \quad (R+2)c_x + 2c_{y_\alpha} = \Phi_R$$

$$(3.19) \quad c_{x_{\alpha\alpha}} + \frac{(R+1)(R+2)}{2} c_x = \frac{R+1}{2} \Phi_R - N_{R_{\alpha\alpha}}$$

$$(3.20) \quad \frac{\partial c_{y_\alpha}}{\partial c_x} = -\frac{R+2}{2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_R}{\partial c_x}$$

Частный случай (3.20) при $\alpha = 0$ для гиперзвукового потока ($R = 2$, $B_R = A_{i \neq 2} = 0$, $A_2 \neq 0$) был получен в [4] и уточнен в [3].

Решение уравнения (3.19) можно записать в форме

$$(3.21) \quad c_x = c_{x_0} \cos R_1 \alpha + \frac{1}{R_1} c_{x_{\alpha_0}} \sin R_1 \alpha + \frac{1}{R_1} \int_0^\alpha \left[\frac{R+1}{2} \Phi_R - N_{R_{\alpha\alpha}} \right] \sin R_1 (\alpha - u) du$$

$$R_1 = [(1/2) (R+1)(R+2)]^{1/2}$$

Если изменение Φ_R, N_R в некотором диапазоне α пренебрежимо мало, получим из (3.24), (3.14) приближенные выражения

$$2c_x R_1 = [2R_1 c_{x_0} - (R+1)\Phi_R] \cos R_1 \alpha + 2c_{x_{\alpha_0}} \sin R_1 \alpha + (R+1)\Phi_R$$

$$2(R+1)c_y = [(R+1)\Phi_R - 2R_1 c_{x_0}] \sin R_1 \alpha + 2c_{x_{\alpha_0}} \cos R_1 \alpha$$

При малых α и симметричной конфигурации ($c_{x_{\alpha_0}} = 0$) получаем квадратичный закон зависимости от угла атаки для c_x и линейный для c_y

$$c_x = c_{x_0} + (R+1)[R_1 \Phi_R - (R+2)c_{x_0}] \alpha^2 / 4$$

$$c_y = [R_1 \Phi_R - (R+2)c_{x_0}] \alpha / 2$$

Плоскопараллельный поток. В этом случае коэффициент суммарной силы определяется формулой (3.13), а орт скорости

$$(3.22) \quad \mathbf{v} = \mathbf{i}_1 \cos \alpha + \mathbf{i}_z \sin \alpha$$

Полагая в формулах (2.2), (2.3) $\theta = \alpha, \varphi = 0$, получаем

$$(3.23) \quad (R+1)c_y = c_{x_\alpha} + N_{R\alpha}, \quad (R+1)c_x + c_{y_\alpha} = \Phi_R$$

и соответственно уравнения

$$(3.24) \quad c_{x_{\alpha\alpha}} + (R+1)^2 c_x = (R+1)\Phi_R - N_{R\alpha\alpha},$$

$$c_{y_{\alpha\alpha}} + (R+1)^2 c_y = [\Phi_R + (R+1)N_R] \alpha$$

Соотношение для аэродинамического качества имеет вид (3.17). Из (3.23) следует:

$$(3.25) \quad \partial c_{y_\alpha} / \partial c_x = -(R+1) + \partial \Phi_R / \partial c_x$$

Если известны $\Phi_R(\alpha), N_R(\alpha)$, из (3.24) найдем

$$(3.26) \quad c_x = c_{x_0} \cos(R+1)\alpha + [c_{x_{\alpha_0}} / (R+1)] \sin(R+1)\alpha +$$

$$+ [1 / (R+1)] \int_0^\alpha [(R+1)\Phi_R - N_{R_{\alpha\alpha}}] \sin(R+1)(\alpha - u) du$$

Если Φ_R, N_R мало изменяются с изменением α в некотором диапазоне, то из (3.24) следует, что

$$(3.27) \quad (R+1)c_x = [(R+1)c_{x_0} - \Phi_R] \cos(R+1)\alpha + c_{x_{\alpha_0}} \sin(R+1)\alpha + \Phi_R$$

При малых α и симметричной конфигурации ($c_{x_{\alpha_0}} = 0$) получаем

$$(3.28) \quad c_x = c_{x_0} + (R+1)[\Phi - (R+1)c_{x_0}] \alpha^2 / 2,$$

$$c_y = (\Phi_R - c_{x_0})(R+1)\alpha$$

ЛИТЕРАТУРА

Поступила 20 IV 1972

1. Schrello D. M. Approximate free molecule aerodynamic characteristics. ARS Journal, 1960, No. 8.
2. Баранцев Р. Г., Васильев Л. А., Иванов Е. В., Козачек В. В., Минайчев А. Д., Михайлов Л. В., Мурзинов Н. В. Аэродинамический расчет в разреженном газе на основе гипотезы локальности. Аэродинамика разреженных газов, сб. 4. Л., Изд-во ЛГУ, 1969.
3. Jaslow H. Aerodynamic relationships inherent in newtonian impact theory. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 4.
4. Chapman G. T. A simple relationship between the drag near zero lift and initial normal — force — curve slope obtained from newtonian theory. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 6.