УДК 532.546

МЕТОД ЗОНАЛЬНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ В НЕЛИНЕЙНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ МАССОПЕРЕНОСА В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

В. Л. ДАНИЛОВ, Р. М. КАЦ

(*Москва*)

Для расчета совместных течений несмешивающихся и смешивающихся жидкостей в пластах к системам скважин в последние годы предложен ряд методов.

Предлагается подход, который естественно назвать методом зональной линеаризации [1]. Он имеет меньшую размерность по сравнению с обычным конечно-разностным подходом и высокую точность, в частности, в окрестностях скважин ввиду его близости к методу характеристик. Этот метод применим как для непрерывных, так и для разрывных течений и принципиально позволяет исследовать формирование и распад разрывов.

В отличие от метода характеристик он хорошо приспособлен для программирования и реализации на ЭВМ, а также дает возможность получить в ряде случаев приближенное аналитическое решение задачи и оценку точности решения.

Метод основан на зональной линеаризации квазилинейного уравнения сохранения массы суммарного потока между выбранными поверхностями или линиями уровня (равной насыщенности или равной концентрации). Определение динамики поверхностей уровня сводится к задаче Коши для системы интегродифференциальных уравнений в частных производных.

Метод зональной линеаризации является развитием схемы, описанной в [2-4], а методы решения задачи Коши — обобщением методов, изложенных [4-13].

Существо метода и его сходимость иллюстрируются двумерными задачами двухфазной фильтрации.

1. Преобразование уравнений двухфазной фильтрации. Система уравнений изотермической фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей с различными вязкостями и плотностями в изотропной недеформируемой пористой среде с учетом капиллярных сил может быть представлена в виде [7]

$$
\begin{aligned}
&\nabla(K\nabla\Phi_i) = \nabla[(K-K_i)\nabla(p_k-\Delta\rho g h)] \\
&m\partial_t s = (-1)^i\nabla(K_i\nabla\Phi_i) \\
&K = K_1+K_2, \quad K_i = kf_i(s)/\mu_i, \quad \Phi_i = p_i+\rho_i g h, \\
&\Delta\rho = \rho_2-\rho_1 \\
&s_1+s_2 = 1 \quad (s_2\equiv s), \quad \Phi_1-\Phi_2 = p_k-\Delta\rho g h
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Здесь и далее $\partial_t s = \partial s/\partial t$, индексы 1 и 2 относятся соответственно к вытесняемой и вытесняющей жидкостям, Φ_i — напор, s_i — насыщенность порового объема i-й жидкостью в долях единицы, p_i — гидродинамическое давление в i-й фазе, m — открытая пористость, k — абсолютная проницаемость (далее m и k приняты постоянными), $p_k(s)$ — межфазное капиллярное давление, $f_i(s)$ — фазовая (относительная) проницаемость, ρ_i — плотность, g — ускорение силы тяжести, $h(x,y,z)$ — превышение точки (x,y,z) над плоскостью нулевого гравитационного потенциала.

Прямая задача двухфазовой фильтрации заключается в определении двух неизвестных функций $s(x, y, z, t)$, $\Phi_i(x, y, z, t)$, либо s, p_i $(i = 1$

или 2), удовлетворяющих системе двух уравнений (1.1), заданным начальным условиям

$$\Phi_i(x, y, z, 0) = \Phi_i^0(x, y, z), \quad s(x, y, z, 0) = s^0(x, y, z)$$

и граничным условиям первого или второго рода, налагаемым на Φ_i и s или их нормальные производные на границах области течения в рассматриваемый промежуток времени. При этом f_i и p_k считаются известными функциями насыщенности.

Преобразуем исходную систему уравнений (1.1), вводя вместо Φ_i (или p_i) новую функцию — осредненное давление p[1]

$$Kp = K_1 p_1 + K_2 p_2 \tag{1.2}$$

Тогда

$$p_1 = p + K_2 K^{-1} p_k, \quad p_2 = p - K_1 K^{-1} p_k$$

$$\Phi_1 = p + K_2 K^{-1} p_k + \rho_1 g h, \quad \Phi_2 = p - K_1 K^{-1} p_k + \rho_2 g h \tag{1.3}$$

С помощью (1.3) первое уравнение (1.1) в области течения (где всюду $K > 0$) несложными преобразованиями можно привести к виду

$$\nabla^2 p = -K^{-1}[(\nabla K \nabla p) + \nabla (K p_k \nabla K_2 K^{-1}) + (\nabla L, \nabla h)]$$

$$L = g(K_1 \rho_1 + K_2 \rho_2) \tag{1.4}$$

Здесь использовано то, что h — линейная функция координат.

Если ввести обозначения s_- и s_+ соответственно для нижнего и верхнего предельных значений насыщенности s, при которых в силу известного характера кривых $f_i(s)$ имеют место равенства $f_2(s_-) = 0$ и $f_1(s_+) = 0$, то

$$K_2(s_-) = 0, \quad K_1(s_+) = 0$$

Следовательно, если в какой-либо части области течения D движется лишь одна из фаз, то $K = K_1(s_-)$ либо $K = K_2(s_+)$ — постоянные. Но тогда в этой части области $L = \text{const}$ и уравнение (1.4) вырождается в уравнение Лапласа $\nabla^2 p = 0$, поскольку во все члены правой части входят градиенты постоянных величин.

Перейдем к преобразованию второго уравнения (1.1) при $i = 2$.

Используя закон Дарси применительно ко второй фазе, т. е. соотношение $\mathbf{v}_{*_2} = -K_2 \nabla \Phi_2$, уравнение (1.2) можно записать в виде

$$m \partial_t s = -\nabla \mathbf{v}_{*_2} = -\partial_x v_{*_{2x}} - \partial_y v_{*_{2y}} \tag{1.5}$$

где $v_{*_{2x}}$ и $v_{*_{2y}}$ — проекции скорости фильтрации второй фазы на координатные оси. Используя теперь закон Дарси для первой фазы ($\mathbf{v}_{*_1} = -K_1 \nabla \Phi_1$), имеем

$$v_{*x} = v_{*1x} + v_{*2x} = -K \partial_x \Phi_1 - K_2 \partial_x (p_k - \Delta \rho g h)$$

$$v_{*y} = v_{*1y} + v_{*2y} = -K \partial_y \Phi_1 - K_2 \partial_y (p_k + \Delta \rho g h)$$

Отсюда

$$\partial_x \Phi_1 = -v_{*x} K^{-1} - K_2 K^{-1} \partial_x (p_k - \Delta \rho g h)$$

$$\partial_y \Phi_1 = -v_{*y} K^{-1} - K_2 K^{-1} \partial_y (p_k - \Delta \rho g h)$$

Подставим эти соотношения в (1.5), где предварительно $v_{*_{2x}}$ и $v_{*_{2y}}$ выражены через Φ_1 из закона Дарси для второй фазы и учтена связь между Φ_1 и Φ_2.

---

[1] Близкое по форме выражение было предложено В. М. Рыжиком [14].

После некоторых преобразований получаем

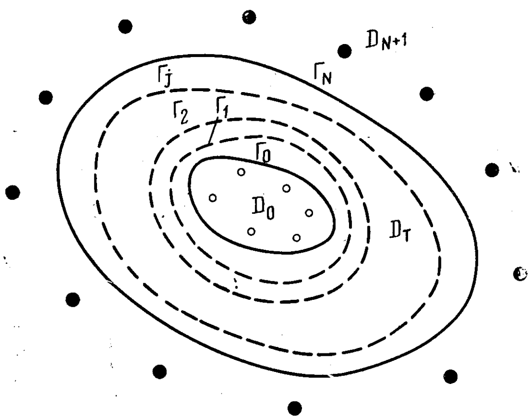
$$m\partial_t s = -\nabla(F\mathbf{v}_*) + \nabla[K_1 F \nabla(p_k - \Delta\rho g h) \tag{1.6}$$

где $\mathbf{v}_*$ — вектор скорости фильтрации суммарного потока, а F — функция Леверетта

$$\mathbf{v}_* = \mathbf{v}_{*1} + \mathbf{v}_{*2} = -K_1\nabla\Phi_1 - K_2\nabla\Phi_2, \qquad F = K_2 K^{-1} \tag{1.7}$$

Итак, исходная система (1.1) относительно Φ_i и s сведена к системе двух уравнений (1.4), (1.6) относительно p и s.

2. Метод зональной линеаризации в задаче двухфазной фильтрации. Ограничимся далее рассмотрением двумерной задачи двухфазной фильтрации, поскольку обобщение на трехмерный случай является очевидным. Пусть также для упрощения рассуждений область течения занимает всю плоскость.



Фиг. 1

В начальный момент $t = 0$ в зоне D_0 внутри замкнутого контура Γ_0 (фиг. 1) всюду насыщенность s имеет минимальное значение $s = s_-$, а зоне D_{N+1} вне охватывающего Γ_0 замкнутого контура Γ_N — максимальное значение $s = s_+$. Между контурами Γ_0 и Γ_N лежит переходная зона D_T, в которой $s_- < s < s_+$, и, следовательно, подвижны обе фазы.

Учитывая, что границы Γ_0 и Γ_N совпадают соответственно с изолиниями $s_0 = s_-$ и $s_N = s_+$, и предполагая насыщенность в D_T убывающей от Γ_N к Γ_0[1], разобьем переходную зону D_T на N подобластей D_j линиями равной насыщенности (изосатами) $s_1, \ldots, s_{N-1}$, причем $s_0 < s_1 < \ldots < s_j < \ldots < s_{N-1} < s_N$.

Далее осредним фильтрационные сопротивления в каждой из зон D_j между изосатами s_{j-1} и s_j (контурами Γ_{j-1} и Γ_j), полагая K_1, K_2 и, следовательно, K постоянными

$$\langle K_{1,j}\rangle = c_{1,j}, \ \langle K_{2,j}\rangle = c_{2,j}, \ \langle K_j\rangle = c_{1,j} + c_{2,j} = c_j \quad (\langle K_j\rangle = K(\langle s_j\rangle))$$

где $s_{j-1} < \langle s_j\rangle < s_j$ в силу монотонного характера зависимостей относительных проницаемостей f_1 и f_2 от s. Из уравнения (1.4) следует, что тогда функция p в каждой из областей D_j будет удовлетворять уравнению Лапласа

$$\nabla^2 p = 0 \tag{2.1}$$

На границах зон D_j — изосатах Γ_j — должны выполняться условия непрерывности суммарного потока $\mathbf{v}_*$ и фазовых давлений p_1 и p_2. Поскольку уравнение (1.6) представляет собой уравнение сохранения для второй фазы и далее будет использовано на границах Γ_j, то при соблюдении не-

---

[1] В общем случае это предположение не является необходимым, поэтому число контуров Γ_j может превышать число выбранных изосат.

прерывности суммарного потока будет выполняться и условие сохранения для первой фазы.

Таким образом, на каждой из $(N+1)$ границ Γ_j зон D_j остается удовлетворить трем условиям

$$(2.2)\qquad \overset{+}{v}_{*n_j} = \overset{-}{v}_{*n_j}, \quad p_1^+ = p_1^-, \quad p_2^+ = p_2^-$$

где n_j — нормаль к контуру Γ_j (для определенности внутренняя), индекс плюс означает предельное значение при подходе к Γ_j изнутри, а индекс минус — снаружи.

Из соотношений (1.7) и (1.3) имеем

$$\mathbf{v}_* = K\nabla p - L\nabla h - Kp_k\nabla K_2K^{-1}$$

$$(2.3)\qquad v_{*n} = -K\partial_n p - L\partial_n h - Kp_k\partial_n(K_2K^{-1})$$

Учитывая, что в области D_j

$$K = c_j,\ \ K_2 = c_{2,j},\ \ L = g(c_{1,j}\rho_1 + c_{2,j}\rho_2) = \langle L_j\rangle$$

а в области D_{j+1}

$$K = c_{j+1},\ \ K_2 = c_{2,j+1},\ \ L = g(c_{1,j+1}\rho_1 + c_{2,j+1}\rho_2) = \langle L_{j+1}\rangle$$

из (2.2) и (2.3) находим

$$(2.4)\qquad c_j\partial_{n_j}p^+ - c_{j+1}\partial_{n_j}p^- = (\langle L_{j+1}\rangle - \langle L_j\rangle)\partial_{n_j}h$$

Здесь символ ∂_{n_j} означает производную по внутренней нормали n_j к Γ_j. Отметим, что контуры Γ_j (а в пространственном случае — выбранные поверхности уровня Σ_j) предполагаются удовлетворяющими условию Ляпунова.

Используя выражения (1.3) и значения K_1, K_2, K в областях D_j, D_{j+1}, условия для давлений (2.2) на Γ_j приводим соответственно к виду

$$(2.5)\qquad p^+ - p^- = -(c_{2,j}c_j^{-1} - c_{2,j+1}c_{j+1}^{-1})p_{k\Gamma_j}$$

$$p^+ - p^- = (c_{1,j}c_j^{-1} - c_{1,j+1}c_{j+1}^{-1})p_{k\Gamma_j} \qquad (j=0,1,\ldots,N)$$

Ввиду того что $c_{1j}c_j^{-1} = 1 - c_{2j}c_j^{-1}$ соотношения (2.5) и (2.6) оказываются эквивалентными, достаточно удовлетворить любому из них.

Итак, после осреднения сопротивлений функция p должна удовлетворять в каждой из зон D_j уравнению Лапласа (2.1), а на границах зон Γ_j — условиям (2.4) и (2.5).

3. Построение функции p и получение системы интегральных уравнений. Естественно отыскивать функцию p в следующей форме:

$$(3.1)\qquad p = \varphi + \sum_{j=0}^{N}(V_j + W_j) + C(t), \qquad V_j = \int_{\Gamma_j}\rho_j'(\xi,\eta)\ln r^{-1}(x,y;\xi,\eta)\,dl_j$$

$$W_j = \int_{\Gamma_j}\varkappa_j(\xi,\eta)\,\partial_{n'_j}\ln r^{-1}(x,y;\xi,\eta)\,dl_j$$

$$r = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2}$$

Здесь φ — потенциал внешнего поля, вкючающий в себя все заданные особенности в областях D_0 и D_{N+1} (например, источники и стоки); V_j и W_j — логарифмические потенциалы соответственно простого и двойного слоев с плотностями ρ_j^1 и $\varkappa_j$, непрерывно распределенными по Γ_j; $(x, y) \in D$, $(\xi, \eta) \in \Gamma_j$, l_j — дуговая абсцисса точки (ξ, η); n_j' — внутренняя нормаль к Γ_j в точке (ξ, η); $C(t)$ — произвольная функция времени.

Чтобы пояснить построение потенциала внешнего поля φ, укажем, например, что при стоке с расходом $Q_1(t)$ в точке $(x_1y_1) \in D_0$ и источнике с обильностью $Q_2(t)$ в точке $(x_2, y_2) \in D_{N+1}$ он имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi = Q_1(t)(2\pi c_0 H)^{-1}\ln[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]^{-1/2} + \\ + Q_2(t)(2\pi c_{N+1}H)^{-1}\ln[(x-x_2)^2+(y-y_2)^2]^{1/2}\end{aligned} \tag{3.2}$$

где H — постоянная мощность (толщина) пласта, $Q_1 < 0$, $Q_2 > 0$.

Функция p (см. (3.1)) удовлетворяет уравнению (2.1) по построению.

Перейдем к выполнению условий (2.4) и (2.5). Удовлетворим в первую очередь условию (2.5). Устремляя точку (x, y) к контуру Γ_q изнутри и снаружи и учитывая непрерывность φ, V_j и W_j при переходе через Γ_q, за исключением одного лишь члена W_q, получаем предельные значения p на Γ_q [15]

$$p^+ = \pi\varkappa_q + \varphi|_{\Gamma_q} + \sum_{j=0}^{N}(V_j + W_j) + C \tag{3.3}$$

$$p^- = -\pi\varkappa_q + \varphi|_{\Gamma_q} + \sum_{j=0}^{N}(V_j + W_j) + C \qquad (q = 0, 1, \ldots, N)$$

Отсюда на Γ_q

$$p^+ - p^- = 2\pi\varkappa_q \tag{3.4}$$

Из (2.5) следует:

$$\varkappa_q = -(2\pi)^{-1}(c_{2,q}c_q^{-1} - c_{2,q+1}c_{q+1}^{-1})p_{k\Gamma_j} \tag{3.5}$$

Ввиду того что на изосатах Γ_q давление $p_{k\Gamma_q} = p_k(s_q) = \mathrm{const}$, плотности $\varkappa_q$ — известные постоянные. Если пренебречь капиллярными силами $(p_k = 0)$, то $\varkappa_q = 0$.

Переходя к удовлетворению условий (2.4), учтем, что нормальные производные функций φ, W_j и всех V_j, за исключением V_q, непрерывны при переходе через Γ_q [15, 16].

Следовательно,

$$\partial_{n_q}p^+ = -\pi\rho_q' + \partial_{n_q}\varphi + \sum_{j=0}^{N}(\partial_{n_q}V_j + \partial_{n_q}W_j), \tag{3.6}$$

$$\partial_{n_q}p^- = \pi\rho_q' + \partial_{n_q}\varphi\sum_{j=0}^{N}(\partial_{n_q}V_j + \partial_{n_q}W_j)$$

Здесь n_q — внутренняя нормаль к Γ_q в точке $(x, y) \in \Gamma_q$.

Подставляя соотношения (3.6) в (2.4), находим

$$\varphi_q' - \lambda_{q,q+1}\pi^{-1}\sum_{j=0}^{N}(\partial_{n_q}V_j + \partial_{n_q}W_j) = \pi^{-1}(\lambda_{q,q+1}\partial_{n_q}\varphi + \delta_{q,q+1}\partial_{n_q}h) \tag{3.7}$$

$$(3.8)\qquad \lambda_{q,\,q+1}=(c_q-c_{q+1})(c_q+c_{q+1})^{-1},\quad \delta_{q,\,q+1}=(\langle L_q\rangle-\langle L_{q+1}\rangle)(c_q+c_{q+1})^{-1}$$

Из соотношения (2.3) имеем

$$\partial_n p=-[v_{*n}K^{-1}+p_k\partial_n(K_2K^{-1})+LK^{-1}\partial_n h]$$

Отсюда с учетом осреднения сопротивлений в зонах D_q получаем

$$(3.9)\qquad \partial_{n_q}p^+=-(v_{*n_q}c_q^{-1}+\langle L_q\rangle c_q^{-1}\partial_{n_q}h),$$

$$\partial_{n_q}p^-=-(v_{*n_q}c_{q+1}+\langle L_{q+1}\rangle c_{q+1}^{-1}\partial_{n_q}h)$$

Из выражений (3.6)

$$(3.10)\qquad \partial_{n_q}p^+-\partial_{n_q}p^-=-2\pi\rho_q'$$

Подставляя сюда производные из (3.9), находим

$$(3.11)\qquad \rho_q'=\pi^{-1}(-\lambda_{q,q+1}c_{q,q+1}^{-1}v_{*n_q}+\gamma_{q,q}\partial_{n_q}h)$$

$$(3.12)\qquad c_{q,q+1}=2c_qc_{q+1}(c_q+c_{q+1})^{-1},\qquad \gamma_{q,q+1}=0.5(\langle L_q\rangle c_q^{-1}-\langle L_{q+1}\rangle c_{q+1}^{-1})$$

Рассмотрим теперь члены $\partial_{n_q}W_j$, входящие в (3.7) под знаком суммы. При $j\neq q$ $\partial_{n_q}W_j$ — значение производной по направлению n_q в точке $(x,\ y)\in\Gamma_q$ от гармонической функции W_j. Выше было показано, что $\varkappa_j$ — постоянные, но тогда, как известно из теории потенциала

$$(3.13)\qquad W_j=\begin{cases}2\pi\varkappa_j & \text{при}\quad (x,y)\quad \text{внутри } \Gamma_j\\ 0 & \text{при}\quad (x,y)\quad \text{вне } \Gamma_j\end{cases}$$

Легко усмотреть (фиг. 1), что точка $(x,\ y)$ лежит внутри Γ_j при $q<j$ и вне Γ_j при $q>j$. В том и другом случаях, очевидно, $\partial_{n_q}W_j=0$.

Остается рассмотреть случай $q=j$. В случае замкнутого контура Γ_q с непрерывно дифференцируемой кривизной имеет место следующая формула [7]:

$$(3.14)\qquad \partial_{n_q}W_q=\partial_{n_q}\int\limits_{\Gamma_q}\varkappa_q\partial_{n_q'}\ln r_{qq}^{-1}\,dl_q=\int\limits_{\Gamma_q}\partial_{l_q}\varkappa_q\partial_{l_q'}\ln r_{qq}^{-1}dl_q.$$

$$r_{qq}=[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{1/2}$$

Здесь l_q' — дуговая абсцисса точки $(x,\ y)\in\Gamma_q$, l_q — дуговая абсцисса точки $(\xi,\ \eta)\in\Gamma_q$.

Из (3.13) при $\varkappa_q=\mathrm{const}$ следует, что $\partial_{n_q}W_q=0$.

Таким образом, все члены $\partial_{n_q}W_j$ исчезают, т. е. наличие капиллярного давления не отражается на форме уравнений (3.7).

Эти уравнения с учетом обращения в нуль $\partial_{n_q}W_j$ и подстановки в них ρ_q' из (3.11) принимают вид

$$(3.15)\qquad v_{*n_q}-\pi^{-1}c_{q+1}\sum_{j=0}^{N}c_{j,j+1}\int\limits_{\Gamma_j}(\lambda_{j,j+1}v_{*n_j}-a_{j,j+1}\partial_{n_j}h)\,\partial_{n_q}\ln r_{jq}^{-1}\,dl_j=$$

$$=-c_{q,q+1}(\partial_{n_q}\varphi+b_{q,q+1}\partial_{n_q}h)\qquad (q=0,1,\ldots,N)$$

$$(3.16)\qquad a_{j,j+1}=c_{j,j+1}\gamma_{j,j+1},\qquad b_{q,q+1}=\lambda_{q,q+1}^{-1}(\delta_{q,q+1}-\gamma_{q,q+1})$$

Уравнения (3.15) представляют собой систему $(N+1)$ интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода относительно неизвестных функций v_{*n_q} — нормальных скоростей фильтрации суммарного потока на контурах Γ_q. Она может быть решена при известных положениях контуров Γ_q.

4. Сведение задачи к задаче Коши для системы интегродифференциальных уравнений. Как указывалось в п.1, распределение насыщенности s и, следовательно, положение Γ_j известны лишь в начальный момент $t=0$. Поскольку выбранные контура Γ_j являются изосатами, а второе уравнение (1.1), или в преобразованном виде уравнение (1.6), представляет собой уравнение сохранения одной фазы, то из него переходом к лагранжевой точке зрения могут быть получены уравнения движения изосат.

Введем n — направление градиента s. Оно совпадает с направлением внутренней нормали к изосате, т. е. ортогонально к Γ_j. Поэтому $|\partial_n s| = |\nabla s|$.

Преобразуем правую часть уравнения (1.6) следующим образом, учитывая, что F, K_1, p_k зависят лишь от s

$$\begin{aligned} &-\nabla(F\mathbf{v}_*) + \nabla[K_1F\nabla(p_k-\Delta\rho gh)] = -(\nabla F, \mathbf{v}_*) - F\nabla\mathbf{v}_* - \\ &- g\Delta\rho(\nabla K_1F, \nabla h) - g\Delta\rho K_1F\nabla^2h + \nabla(K_1F\nabla p_k) = \\ &= -d_sF(\nabla s, \mathbf{v}_*) - g\Delta\rho d_s(K_1F)(\nabla s, \nabla h) + \nabla(K_1Fd_sp_k\nabla s) = \\ &= -d_sF\partial_n s v_{*n} - g\Delta\rho U\partial_n s\partial_n h + \nabla(V\nabla s) \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $\nabla^2h=0$, так как h — линейная функция координат, $\nabla\mathbf{v}_*=0$ вследствие несжимаемости жидкостей и введены обозначения

$$\begin{aligned} &d_sF = dF/ds = d(K_2K^{-1})/ds, \quad d_sp_k = dp_k/ds \\ &U = d_s(K_1F) = d_s(K_1K_2K^{-1}), \quad V = K_1Fd_sp_k = K_1K_2K^{-1}d_sp_k \end{aligned} \tag{4.2}$$

Подставляя (4.1) в правую часть уравнения (1.6), получаем

$$m\partial_t s = -d_sFv_{*n}\partial_n s - g\Delta\rho U\partial_n h\partial_n s + \nabla(V\nabla s) \tag{4.3}$$

Вводя уравнение контура Γ_q — изосаты с насыщенностью в форме

$$s_q(x, y, t) = 0 \tag{4.4}$$

и дифференцируя (4.4) по времени, имеем

$$\partial_x s_q d_t x + \partial_y s_q d_t y + \partial_t s_q = \partial_n s_q v_n + \partial_t s_q = 0 \tag{4.5}$$

$$v_n = -\partial_t s_q(\partial_n s_q)^{-1} \tag{4.6}$$

где v_n — нормальная скорость движения контура Γ_q. Поэтому уравнение (4.3) можно переписать в виде

$$m\partial_t s_q = -d_{s_q}Fv_*\partial_{n_q}s_q - g\Delta\rho U|_{\Gamma_q}\partial_{n_q}h\partial_{n_q}s_q + \nabla(V\nabla s)_{\Gamma_q} \tag{4.7}$$

откуда

$$\begin{aligned} v_{*n_q} = -[d_sF(s_q)]^{-1}\{&m\partial_t s_q(\partial_{n_q}s_q)^{-1} + g\Delta\rho U(s_q)\partial_{n_q}h - \\ &- \nabla(V\nabla s)_{\Gamma_q}(\partial_{n_q}s_q)^{-1}\} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Из поведения функции Леверетта $F(s)$ следует, что $d_sF(s_+) = d_sF(s_N) = 0$, поэтому выражение (4.4) теряет смысл на контуре Γ_N. Для остальных значений индекса q, т. е. для $q = 0, 1, \ldots, N-1$, значение v_{*n_q} из (4.4) может быть подставлено в систему уравнений (3.15), после чего получаем систему $(N+1)$ интегродифференциальных уравнений относительно $(N+1)$ искомых функций $s_q(x, y, t)$ и v_{*n_N}, для которой ставится задача Коши при известных начальных условиях

$$s_q(x, y, 0) = s_q^{\circ}(x, y) \tag{4.9}$$

Задаче Коши можно придать и более симметричную форму. Если известна функция Грина уравнения Лапласа $G(x, y; \xi, \eta)$, удовлетворяющая на Γ_N условиям (2.4), (2.5), то из системы интегродифференциальных уравнений может быть устранена искомая функция v_{*n_N}. Для этого достаточно в выражении (3.1) и всюду далее вместо $\ln r^{-1}$ ввести G (в φ, V_j, W_j) и суммирование по j проводить не до N, а до $N-1$.

Условия (2.4), (2.5) на Γ_N будут выполнены в силу структуры функции p. Тогда в системе (3.7) будут отсутствовать уравнение с $q = N$ и интегральные члены по Γ_N. Поэтому подстановка в нее функций v_{*n_q} из (4.4) приводит к задаче Коши для системы N интегродифференциальных уравнений относительно искомых функций $s_q(x, y, t)$ $(q = 0, 1, \ldots, N-1)$.

Остановимся на определении фазовых давлений. Из (1.3) следует, что они при известном после решения задачи Коши поле насыщенности $s(x, y, t)$ полностью определяются функцией p.

Обращаясь к выражению (3.1), уравнению (2.1) и условиям (2.4), (2.5), видим, что p определяется с точностью до аддитивной произвольной функции времени. Поэтому для единственности определения p следует, например, задать значение этой функции (или одной из p_i) в какой-либо точке области D как функцию времени.

Входящие в (3.1) плотности ρ_j' и контура Γ_j определяются из решения задачи Коши (см. (3.11) и (3.15)), W_j даются выражениями (3.13) и (3.5). Таким образом, определение p сводится к квадратурам при вычислении V_j.

5. О методах решения задачи Коши для системы интегродифференциальных уравнений. Ранее в [3, 4] была сформулирована задача Коши для одного интегродифференциального уравнения, близкого к рассмотренному выше. Графоаналитический и численные методы ее решения предложены в [4, 7] [1], а приближенный аналитический метод — в [7, 8]. Они были реализованы для целого ряда конкретных задач в [2, 5–12]. Обзор результатов дан в [13]. Их обобщение на случай N контуров не представляет принципиальных затруднений.

Укажем также, что с вычислительной точки зрения конечно-разностные алгоритмы решения задачи Коши можно рассматривать как своеобразную реализацию совместного эйлерово-лагранжева метода для нестационарных задач (СЭЛ), обладающую той особенностью, что на каждом шаге по времени отсутствует этап определения давления, присущий методу СЭЛ [17]. Это объясняется расщеплением по предлагаемому методу задачи определения p и s на две задачи, решаемые последовательно,— задачу определения s (задача Коши для системы интегродифференциальных уравнений) и задачу определения p, которая после решения первой сводится к квадратурам (см. п. 4) и может быть решена лишь в случае необходимости. Аналитический подход будет пояснен ниже на конкретных задачах.

6. О сходимости функции давления, полученной методом зональной линеаризации, к точному решению. Рассмотрим некоторые вопросы сходимости метода, причем для упрощения выкладок ограничимся случаем тонкого горизонтального пласта ($h = z_0 = \text{const}$) и пренебрежем капиллярными силами ($p_k = 0$). Тогда уравнения (1.1), (1.6) и (2.3) принимают соответственно вид

$$\nabla^2 p = -K^{-1}(\nabla K, \nabla p) \tag{6.1}$$

$$m\partial_t s = -\nabla(F\mathbf{v}) \tag{6.2}$$

$$v_{*n} = -K\partial_n p \tag{6.3}$$

При этом $p_1 = p_2 = p$, как следует из (1.3). Уравнение (6.1) можно формально рассматривать как уравнения Пуассона с правой частью $-K^{-1}(\nabla K, \nabla p)$ в переход-

[1] В. Л. Данилов. Краевые задачи гидродинамической теории фильтрации и гидродинамики с подвижной границей. Докт. дисс., М., 1961.

ной зоне $D_T = \sum_1^N D_j$. Для точки A функция $u(A)$, удовлетворяющая уравнению

(6.4) $$\nabla_A^2 u = \begin{cases} -2\pi\chi(A) & \text{при} \quad A \in D_T \\ 0 & \text{при} \quad A \text{ вне } D_T \end{cases}$$

может быть выражена с помощью фундаментального решения уравнения Лапласа в плоскости $\ln r_{AP}^{-1}$ формулой [15]

(6.5) $$u(A) = \iint_{D_T} \chi(P) \ln r_{AP}^{-1}\, dD_P$$

Сравнивая (6.1) и (6.4), видим, что следует положить

(6.6) $$\chi(A) = (2\pi K)^{-1}(\nabla K, \nabla p)$$

Учитывая заданные особенности функции p в областях D_0 и D_{N+1}, получаем интегральное ее представление в форме

(6.7) $$p = \varphi + (2\pi)^{-1} \iint K^{-1}(\nabla K, \nabla p) \ln r_{AP}^{-1}\, dD_P$$

С другой стороны, из (3.1) имеем (при $C = 0$)

(6.8) $$p = \varphi + \sum_{j=0}^{N} V_j, \quad V_j = \int_{\Gamma_j} \rho_j' \ln r_{AP_{\Gamma_j}}^{-1} dl_j$$

поскольку $W_j = 0$ при $p_k = 0$, как вытекает из (3.5) и (3.13).

Покажем теперь, что при неограниченном увеличении числа зон $D_j (N \to \infty)$ и при одновременном уменьшении ширины каждой из них выражение (6.8) стремится к интегральному представлению для p (6.7).

Для рассматриваемого случая из (3.11) находим

(6.9) $$\rho_j' = -\pi^{-1} \lambda_{j,j+1} c_{j,j+1}^{-1} v_{*n_j}$$

Используя (6.9) и (6.3), представим выражение (6.8) в форме

(6.10) $$p = \varphi + \pi^{-1} \sum_{j=0}^{N} \lambda_{j,j+1} c_{j,j+1}^{-1} K_{\Gamma_j} \int_{\Gamma_j} \partial_{n_j} p \ln r_{AP_{\Gamma_j}}^{-1} dl_j$$

Введем семейство кривых n_i, ортогональных контурам Γ_j. Пусть их число равно M. Преобразуем несколько множители под знаком суммы в (6.10)

$$\lambda_{j,j+1} c_{j,j+1} K_{\Gamma_j} = (c_j - c_{j+1})(c_j + c_{j+1})^{-1} (2c_j c_{j+1})^{-1} (c_j + c_{j+1}) K_{\Gamma_j} =$$
$$= (\overline{K}_j - \overline{K}_{j+1})(2\overline{K}_j \overline{K}_{j+1})^{-1} K(s_j) =$$

(6.11) $$= 2^{-1} (\Delta \overline{K}_j / \Delta n_{ij}) \overline{K}_j^{-1} [K(s_j) \overline{K}_{j+1}^{-1}]\, \Delta n_{ji}, \qquad \overline{K}_j = \langle K_j \rangle$$

где $\Delta \overline{K}_j = \overline{K}_j - \overline{K}_{j+1}$, Δn_{ji} — расстояние по нормали n_i между точками контуров Γ_j и Γ_{j+1}. Нормали n_i разбивают каждый из контуров Γ_j на M криволинейных участков Δl_{ji}. Обозначая через $\partial_{n_{ji}} p \ln r_{A_{ji}}^{-1}$ средние значения подынтегральных функций на этих участках, имеем

(6.12) $$\int_{\Gamma_j} \partial_{n_j} p \ln r_{AP_{\Gamma_j}}^{-1} dl_j = \sum_{i=1}^{M} \partial_{n_{ji}} p \ln r_{A_{ji}}^{-1} \Delta l_{ji}$$

Подставим (6.11) и (6.12) в (6.10)

$$p' = \varphi + (2\pi)^{-1} \sum_{j=0}^{N} \sum_{i=0}^{M} (\Delta K_j / \Delta n_{ji}) \overline{K}_{ji}^{-1} [K_j(s_j) \overline{K}_{j+1}]_i\, \partial_{n_{ij}} p \ln r_{A_{ji}}^{-1} \Delta l_{ji} \Delta n_{ji}$$

Теперь перейдем к пределу при $N \to \infty$ и $M \to \infty$ в этой двойной римановой сумме, учитывая, что при этом

$$A_{ij} \to r_{AP}, \quad K_{ji} \to K, \quad (\Delta K_j / \Delta n_{ji}) \to \partial_n K; \quad K_j(s_j) \overline{K}_{j+1}^{-1} \to 1 \quad \Delta l_{ji} \Delta n_{ji} \to dl dn = dD_P$$

Следовательно

$$\lim_{M,N\to\infty} p' = \varphi + (2\pi)^{-1} \iint_{D_T} \partial_n K\, \partial_n p K^{-1} \ln r_{AP}^{-1}\, dD_P =$$

$$= \varphi + (2\theta)^{-1} \iint_{D_T} K^{-1}(\nabla K, \nabla p) \ln r_{AP}^{-1}\, dD_P$$

что совпадает с представлением (6.7).

Выражение (3.1) для функции p показывает, что по методу зональной линеаризации отыскивается обобщенное приближенное решение, поскольку на контурах Γ_j нормальная производная $\partial_{n_j} p$ терпит разрыв первого рода в силу известных свойств потенциалов простого слоя V_j [15]. Величина этого разрыва на Γ_j стремится к нулю при $N \to \infty$, и в пределе для точки $A \in D_T$ приходим к непрерывному решению с первыми и вторыми производными.

Если не учитываются капиллярные силы, то решение по s имеет разрывной характер на Γ_0, о чем будет сказано ниже.

7. Задача о двухфазной фильтрации к одиночной скважине. Рассмотрим двумерную задачу о двухфазной фильтрации несжимаемых жидкостей к одиночной скважине в неограниченном по простиранию пласте постоянной мощности H при первоначально прямолинейной границе раздела зон с предельными насыщенностями $\underline{s}$ и $\bar{s}$. Для упрощения примем $p_k = 0$, $h = \mathrm{const}$. Уравнения движения изосат Γ_q в полярных координатах $r = \psi(\theta, t)$ (фиг. 2), исходя из (4.4), могут быть представлены в безразмерном виде (далее для краткости обозначено $\chi_q = \psi_q^2$)

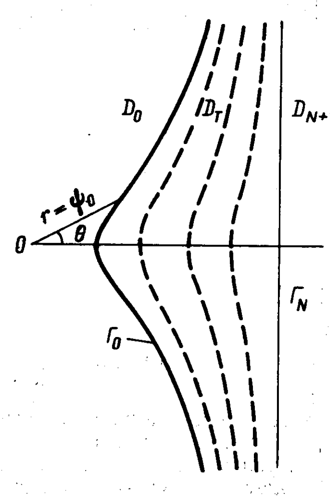
$$\partial_t \chi_q(\theta, t) = d_s F(s_q) u_q(\theta, t) \tag{7.1}$$

где $u_q(\theta, t)$ — решение системы (3.15), принимающей в данной задаче вид

$$u_q(\theta, t) - \pi^{-1} c_{q,q+1} \sum_{j=0}^{N} \lambda_{j,j+1} c_{j,j+1}^{-1} \times$$

$$\times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} u_j(\nu, t) R_{j,q}(\theta, \nu; t)\, d\nu = -c_0 c_{q,q+1}$$

$$R_{jq} = \frac{\psi_q^2(\theta, t) - \psi_q(\theta, t)\psi_j(\nu, t)\cos(\theta - \nu) -}{\psi_q^2(\theta, t) - 2\psi_q(\theta, t)\psi_j(\nu, t) \times}$$
$$\frac{-\partial_\theta \psi_q(\theta, t)\psi_j(\nu, t)\sin(\theta - \nu)}{\times \cos(\theta - \nu) + \psi_j^2(\nu, t)} \tag{7.2}$$



Фиг. 2

Связь размерных величин $\psi°$ и $t°$ с безразмерными такова:

$$\psi = \psi° a^{-1}, \qquad t = Qt°(\pi m a^2 H)^{-1}$$

где a — расстояние между скважиной и Γ_N (см. фиг. 2), $Q = \mathrm{const} < 0$ — дебит скважины.

В данном случае начальные положения всех изосат совпадают, зона D_T при $t = 0$ выраждена в прямую

$$\chi_q(\theta, 0) = \cos^{-2}\theta \quad (q = 0, 1, \ldots, N) \tag{7.3}$$

Решение задачи Коши для системы (7.1), (7.2) при начальных условиях (7.3) отыскивалось в форме степенных рядов по времени t аналогично [8]

$$\chi_q(\theta, t) = \chi_q(\theta, 0) + \partial_t \chi_q(\theta, 0)\frac{t}{1!} + \partial_{t^2}^2 \chi_q(\theta, 0)\frac{t^2}{2!} + \ldots \quad (q = 0, 1, \ldots, N) \tag{7.4}$$

Определялись два коэффициента рядов (7.4)

$$\partial_t \chi_q(\theta, 0) = -d_s F(s_q)(1 - \lambda_{0,N+1}), \qquad \lambda_{0,N+1} = (c_0 - c_{N+1})(c_0 + c_{N+1})^{-1}$$
$$\partial_{t^2}^2 \chi_q(\theta, 0) = d_s F(s_q) \partial_t u_q(\theta, 0) \tag{7.5}$$

где $\partial_t u_q(\theta, 0)$ — решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\partial_t u_q(\theta,0)+c_{q,q+1}\sum_{j=0}^{N}\operatorname{sign}(j-q)\lambda_{j,j+1}c_{j,j+1}\,\partial_t u_j(\theta,0)=$$

$$=0.25\lambda_{q,q+1}\,\partial_t u_q(\theta,0)\,\partial_t\chi_q(\theta,0)\cos 2\theta+c_{q,q+1}\sum_{j=0}^{N}\lambda_{j,j+1}c_{j,j+1}^{-1}\times$$

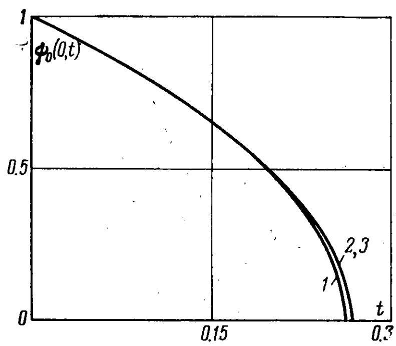
$$\times\{\partial_t u_j(\theta,0)\,\partial_t\chi_q(\theta,0)\,[0.5\cos^2\theta-\cos^2\theta\cos 2\theta-0.5\operatorname{sign}(j-q)\cos^2\theta]+ \tag{7.6}$$

$$+\,\partial_t u_j(\theta,0)\,\partial_t\chi_j(\theta,0)\,[0.5\cos 2\theta+0.25\cos 4\theta+0.5\operatorname{sign}(j-q)\cos^2\theta]\}$$

Здесь sign $(j-q)$ — знак разности $(j-q)$, причем $\operatorname{sign} 0=0$, функция $\partial_t\chi_q(\theta,0)$ подставляется из (7.5), $q=0, 1, \ldots, N$.

Можно показать, что с момента $t=0$ образуется разрыв насыщенности на фронтовой изосате Γ_0, причем величина разрыва та же, что в одномерном решении Бакли — Леверетта [18]. Были выполнены расчеты для отношения вязкостей $\mu_1\mu_2^{-1}=10$. Фазовые проницаемости принимались в виде $f_1=(1-s)^2$, $f_2=s^2$, причем $s_-=0$, $s_+=1$. Значение фронтовой насыщенности на Γ_0 при этом равно $s_0=0.3015$.

Были рассчитаны случаи аппроксимации переходной области одной, двумя и четырьмя зонами. Средние значения насыщенности в каждой из зон принимались равными средним, вычисленным из решения одномерной задачи Бакли — Леверетта [18] на соответствующих интервалах изменений насыщенности для $s_0<s<1$.



Фиг. 3

Сходимость метода с ростом числа зон иллюстрируется сопоставлением безразмерных времен подхода изосаты Γ_0 с $s=s_0$ к скважине, которые для одно-, двух- и четырехзонной схем равны соответственно 0.2602, 0.2638 и 0.2647. Графики функций $\psi_0=(0,t)$, приведенные на фиг. 3, практически совпадают для двухзонной и четырехзонной схем (кривые *2* и *3*).

8. Задача о площадном заводнении. Рассмотрим задачу двухфазной фильтрации в так называемой пятиточечной системе скважин. В [10] получено интегродифференциальное уравнение движения границы раздела нефти и воды для модели поршневого вытеснения (Лейбензона — Муската), которое отличается от однозонной схемы аппроксимации модели Бакли — Леверетта по предлагаемому методу лишь постоянным множителем в правой части. Задача Коши для этого уравнения решалась также методом разложения в степенной ряд по времени. Аналогично может быть получена система уравнений, описывающая движение изосат и в случае многозонной аппроксимации переходной зоны. После перехода к полярным координатам с центром в нагнетательной скважине (фиг. 4) и введения безразмерных переменных этой системе можно придать вид ($\chi_q=\psi_{qN}^2$)

$$\partial_t\chi_q(\theta,t)-\pi^{-1}c_{q,q+1}\,d_sF(s_q)\sum_{j=0}^{N}\lambda_{j,j+1}c_{j,j+1}^{-1}[d_sF(s_j)]^{-1}\times \tag{8.1}$$

$$\times\int_0^{2\pi}\partial_t\chi_j(\nu,t)R_{jq}^*(\theta,\nu,t)\,d\nu=-c_{q,q+1}[c_0^{-1}L_q^*(\theta,t)+c_{N+1}^{-1}N_q(\theta,t)]\,d_sF(s_q)$$

$$\left.\begin{array}{l}R_{jq}^*(\theta,\nu,t)=\\ L_q^*(\theta,t)+\zeta(1)\,\partial_\theta(v-u)=\\ N_q(\theta,t)=\end{array}\right\{\begin{array}{l}\partial_\theta[\psi_q\sin\theta]\left[\zeta(u)+\dfrac{1}{2}\dfrac{\wp'(u)}{\wp(u)+\wp(v)}\right]-\\ -\,\partial_\theta[\psi_q\cos\theta]\left[\theta(v)+\dfrac{1}{2}\dfrac{\wp'(v)}{\wp(u)+\wp(v)}\right]\end{array} \tag{8.2}$$

где соответственно следует подставить

$$u = \psi_j \cos\nu - \psi_q \cos\theta, \qquad v = \psi_j \sin\nu - \psi_q \sin\theta$$
$$u = \psi_q \cos\theta + \omega_1, \qquad v = \psi_q \sin\theta + \omega_1$$
$$u = \psi_q \cos\theta, \qquad v = \psi_q \sin\theta, \qquad \psi_q = \psi_q(\theta, t), \qquad \psi_j = \psi_j(\nu, t)$$

Здесь, как и в предыдущей задаче, $\psi_q(\theta, t)$ — уравнение контура Γ_0 изосаты s_q в полярных координатах (фиг. 4), $\wp$ и ζ — символы пе- и дзета-функций Вейерштрасса, $\wp'$ — производная пе-функции. Связь размерных и безразмерных величин следующая:

$$\psi_q = \psi_q^\circ \omega_1^{-1}, \qquad t = Qt^\circ(\pi m H \omega_1^2)^{-1}$$

где $Q = \mathrm{const} > 0$ — расход через нагнетательную скважину, ω_1 — полупериод. Остальные обозначения прежние.

Начальные условия, поскольку они берутся в непосредственной окрестности скважины, вытекают из решения плоскорадиальной задачи Бакли — Леверетта [18]

(8.3) $$\chi_q(\theta, 0) = r_0^2 d_sF(s_q)[d_sF(s_0)]^{-1} \qquad (q = 0, 1, \ldots, N)$$

Здесь r_0 — радиус фронтовой изосаты s_0, $r_0 \to 0$ при $t \to 0$.

Решение задачи Коши (8.1), (8.2) при начальных условиях (8.3) отыскивалось в виде степенных рядов по t (7.4) аналогично [10]. Для первых пяти производных после соответствующих выкладок получены следующие выражения:

(8.4) $$\partial_t\chi_q(\theta, 0) = d_sF(s_q), \qquad \partial_{t^2}{}^2\chi_q(\theta, 0) = \partial_{t^4}{}^4\chi_q(\theta, 0) = 0$$

(8.5) $$\partial_{t^3}{}^3\chi_q(\theta, 0) + c_{q,q+1} \sum_{j=0}^{N} \operatorname{sign}(j-q)\{d_sF(s_j)[d_sF(s_q)]^{-1}\}^{2\operatorname{sign}(j-q)-1} \times$$
$$\times \lambda_{j,j+1} c_{j,j+1}^{-1} \partial_{t^3}{}^3\chi_j(\theta, 0) = -0.8c_{q,q+1}c_0^{-1}e_1^2[d_sF(s_q)]^3 \cos 4\theta$$

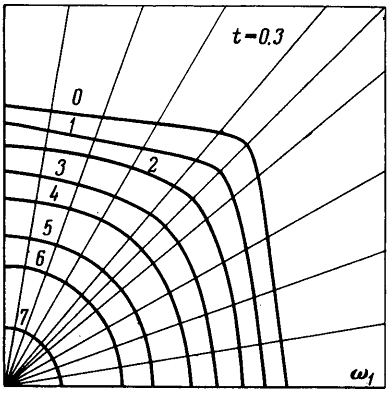
(8.6) $$\partial_{t^5}{}^5\chi_q(\theta, 0) + c_{q,q+1} \sum_{j=0}^{N} \operatorname{sign}(j-q)\{d_sF(s_j)[d_sF(s_q)]^{-1}\}^{4\operatorname{sign}(j-q)-1} \times$$
$$\times \lambda_{j,j+1} c_{j,j+1}^{-1} \partial_{t^5}{}^5\chi_j(\theta, 0) = -4c_{q,q+1}c_0^{-1}\partial_{t^3}{}^3\chi_q(\theta, 0)[d_sF(s_q)]^2 \cos 8\theta$$
$$e_1 = 1.7187 \qquad (q = 0, 1, \ldots, N)$$

Производные $\partial_{t^3}{}^3\chi_q(\theta, 0)$ и $\partial_{t^5}{}^5\chi_q(\theta, 0)$ определяются в результате последовательного решения систем алгебраических уравнений (8.5) и (8.6). Были выполнены расчеты при тех же $\mu_1\mu_2^{-1}$, $f_1(s)$ и $f_2(s)$, s_q, $\langle s_q \rangle$, что и в предыдущей задаче. Рассмотрены одно-, двух-, четырех- и восьмизонная схемы.

q	s_q	Одна зона	Две зоны	Четыре зоны	Восемь зон
1	0.3015	33.72	30.66	29.75	29.60
2	0.3377				17.94
3	0.3738			10.35	10.25
4	0.4186				4.867
5	0.4634		2.425	2.270	2.232
6	0.5339				0.6272
7	0.6044			0.1772	0.1750
	0.8022				0.0247

В таблице приведены значения $\partial_{t^3}{}^3\chi_q(\pi/4, 0)$

Относительная погрешность $\partial_{t^3}{}^3\chi_0(\pi/4, 0)$ для четырехзонной схемы не превышает по сравнению с восьмизонной 0.35%, а $\partial_{t^3}{}^3\chi_6(\pi/4, 0)$ — 1.3%, что свидетельствует о быстрой сходимости с ростом числа зон.



Фиг. 4

На фиг. 4 изображены положения изосат Γ_q для момента времени $t = 0.3$, рассчитанные с помощью рядов по степеням t, в которых удержаны первые члены по t^5 включительно.

Если фазовые проницаемости f_1, f_2 и отношение вязкостей $\mu_1\mu_2^{-1}$ таковы, что K — монотонно возрастающая функция s, то можно дать верхнюю и нижнюю оценки времени прорыва воды в скважину (т. е. подхода к ней изосаты Γ_0).

Принимая во всей переходной зоне D_T между Γ_0 и Γ_{N+1} (последний совпадает с нагнетательной скважиной) $K = K(s_0)$, получаем завышенное значение времени прорыва $t_{\Gamma_0}{}^+$, так как подвижность на фронте Γ_0 является нижней гранью значений ее в D_T. Согласно [10] $t_{\Gamma_0}{}^+$ (момент образования точки возврата на Γ_0) определяется формулой

$$t_{\Gamma_0}{}^+ = t^\circ(c_{0,1}c_0{}^{-1})^{-1/2} \tag{8.7}$$

где t° — время прорыва в одножидкостной системе $(c_{0,1}, c_0{}^{-1} = 1)$ или в системе жестких трубок тока. Коэффициент $c_{0,1}$ рассчитывается по $c_0 = K(s_-)$ и $c_1 = K(s_0)$. Таким образом, формула (8.7) дает верхнюю оценку t_{Γ_0}.

Перейдем к получению нижней оценки. Нетрудно показать, что элементы матрицы $\|a_{jq}\|$ коэффициентов системы линейных уравнений, из которой определяются нечетные (не обращающиеся в нуль) производные $\partial_{t^{2n+1}}^{2n+1}\chi_q(\theta, 0)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, имеют вид

$$a_{qq} = 1, \quad a_{jq} = c_{q,q+1}\lambda_{j,j+1}c_{j,j+1}^{-1}\operatorname{sign}(j-q)\{d_sF(s_j)[d_sF(s_q)]^{-1}\}^{2n\operatorname{sign}(j-q)+1} \tag{8.8}$$
$$(j\neq q;\quad j, q=0, 1, 2, \ldots, N)$$

Поскольку $d_sF(s_0) > d_sF(s_1) > \ldots > d_sF(s_N)$, то при $n\to\infty$ элемент $a_{jq}\to 0$, т. е. матрица стремится к единичной.

Кроме того, на главной линии тока $\theta = \pi/4$ справедливы неравенства

$$\partial_{t^{2n+1}}^{2n+1}\chi_0(\pi/4, 0) > \partial_{t^{2n+1}}^{2n+1}\chi_1(\pi/4, 0) > \ldots > \partial_{t^{2n+1}}^{2n+1}\chi_N(\pi/4, 0) > 0 \quad (n=1,2,\ldots) \tag{8.9}$$

Положим теперь в первой строке матрицы $\|a_{jq}\|$ для всех n

$$a_{j0} = c_{q,\,q+1}\lambda_{j,\,j+1}\{d_sF(s_0)[d_sF(s_q)]^{-1}\}^3 \tag{8.10}$$

что соответствует элементам $a_{j,\,0}$ при $n = 1$. Примем также, что

$$\partial_{t^{2n+1}}^{2n+1}\chi_0(\pi/4, 0) = \partial_{t^{2n+1}}^{2n+1}\chi_1(\pi/4, 0) = \ldots\ \partial_{t^{2n+1}}^{2n+1}\chi_N(\pi/4, 0) \tag{8.11}$$

Подставляя (8.1) в первое из уравнений линейной системы типа (8.5), (8.6), находим

$$\partial_{t^{2n+1}}^{2n+1}\chi_0(\pi/4, 0) = b_{0n}\left(1 + \sum_{j=1}^{N} a_{j0}\right) \quad (n=1,2,\ldots) \tag{8.12}$$

где b_{0n} — свободный член первого уравнения.

В силу сказанного выше правая часть формулы (8.12) является верхней границей величины соответствующей производной. Подстановка (8.12) в (7.4) дает мажорантный ряд, радиус сходимости которого $t_{\Gamma_0}{}^-$ меньше радиуса сходимости исходного степенного ряда. Используя результаты работы [10], легко получить эту нижнюю оценку времени прорыва

$$t_{\Gamma_0}^- = t^\circ \left[c_{0.1} c_0^{-1} \left(1 + \sum_{j=1}^{n} a_{j0} \right) \right]^{-1/2} \tag{8.13}$$

Принятые в расчете f_1, f_2 и $\mu_1\mu_2^{-1}$ обеспечивают монотонно возрастающую зависимость K от s. Поэтому полученные оценки применимы. Расчет дает $t^\circ = 0.423$, $(t_{\Gamma_0}^+ / t^\circ) = 0.925$, $(t_{\Gamma_0}^- / t^\circ) = 0.841$, 0.877, 0.885, 0.889 соответственно для одно-, двух-, трех-, четырех- и восьмизонной схем. Уже для четырехзонной схемы относительное расхождение верхней и нижней оценок составляет $\sim 4\%$. Это позволяет заключить, что в практических расчетах время прорыва можно с достаточной точностью определять, используя однозонную схему, причем $c_1 = K(s_0)$, т. е. $\langle s_1 \rangle = s_0$.

Приближенный метод недеформируемых («жестких») трубок тока [18] при большом их числе дает значение времени прорыва воды $(t_{\Gamma_0} / t^\circ) = 1$. В рассмотренном случае его относительная погрешность составляет $\sim 12\%$.

Аналогичные рассуждения можно провести, если K — монотонно убывающая функция s. В этом случае формулы (8.7) и (8.1) дают соответственно нижнюю и верхнюю оценки для t_{Γ_0}, т. е. меняются местами.

Метод зональной линеаризации без затруднения распространяется на случай фильтрации двух несмешивающихся разновязкостных жидкостей с различными плотностями. Здесь имеются два пути. Первый — непосредственное применение идеи зональной линеаризации к уравнениям процесса подобно тому, как это описано в п. 2—4 для двухфазной фильтрации. Нет необходимости вводить осредненное давление, поскольку $p_k = 0$. Роль изосат играют линии равной концентрации. Второй, по-видимому, наиболее простой путь — использование аналогии между уравнениями течения смешивающихся жидкостей и уравнениями двухфазной фильтрации, изложенной в [19].

Необходимо отметить, что метод зональной линеаризации может быть распространен на случай неоднородной пористой среды, если известна функция Грина для области течения уравнения эллиптического типа $\nabla(k\nabla u) = 0$, где $k(x, y, z)$ — проницаемость.

Поступила 14 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Данилов В. Л., Кац Р. М.* Метод однородных зон решения нелинейных многомерных задач массопереноса в пористых средах. Докл. АН СССР, 1971, т. 201, № 2.
2. *Данилов В. Л.* О влиянии фазовой проницаемости в зоне вытеснения нефти водой на перемещение водонефтяного контакта. Изв. Казанск. фил. АН СССР, Сер. физ.-мат. н., 1959, № 13.
3. *Данилов В. Л.* Интегро-дифференциальное уравнение движения водо-нефтяного контакта в пористой среде. Тр. 3-го Всес. матем. съезда, Изд. АН СССР, 1956, т. 1.
4. *Данилов В. Л.* Интегро-дифференциальные уравнения движения границы раздела жидкостей в пористой среде. Изв. Казанск. фил. АН СССР, Сер. физ.-мат. и техн. н., 1957, № 11.
5. *Данилов В. Л., Скворцов В. В.* Решение одной задачи о стягивании контура нефтеносности с учетом различия вязкостей нефти и воды. Изв. Казанск. фил. АН СССР, Сер. физ.-мат. и техн. н., 1959, № 13.
6. *Данилов В. Л., Скворцов В. В.* Расчеты перемещения водо-нефтяного контакта и времени обводнения скважин на электронной цифровой машине. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 4.
7. *Данилов В. Л., Коновалов А. Н., Якуба С. И.* Об уравнениях и краевых задачах теории двухфазных фильтрационных течений в пористой среде. Докл. АН СССР, 1968, т. 183, № 2.
8. *Данилов В. Л.* Об одном аналитическом методе решения задачи стягивания контура нефтеносности. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 1.
9. *Данилов В. Л., Скворцов Э. В.* Решение задачи о стягивании близкого к круговому пятна жидкости под действием межфазного натяжения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2.
10. *Кац Р. М.* О движении границы раздела двух жидкостей в пористой среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.

11. *Абрамов Ю. С., Кац Р. М.* О пространственном движении границы раздела двух несжимаемых жидкостей в пористой среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.
12. *Абрамов Ю. С.* О пространственном движении двух весомых вязких жидкостей в пористой среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 1.
13. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917—1967). М., «Наука», 1969.
14. *Бан А., Боголюбова А. Ф., Максимов В. А., Николаевский В. Н., Оганджанянц В. Г., Рыжик В. М. и др.* Влияние свойств горных пород на движение в них жидкости. М., Гостоптехиздат, 1962.
15. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1969.
16. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
17. Вычислительные методы в гидродинамике.М., «Мир», 1967.
18. *Чарный И. А.* Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
19. *Lantz R. B.* Rigorous calculation of miscible displacement using immiscible reservoir simulators. SPE Journal, 1970, vol. 10, No. 2.