№ 4 МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА 1973

УДК 532.546

ОПЫТ ПОСТРОЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕОДНОРОДНОСТИ ПЛАСТА

А. М. ПИРВЕРДЯН

(*Баку*)

На примере одномерной стохастической модели пласта для детерминированного потока показана роль неслучайной (детерминированной) и случайной составляющих фильтрационного сопротивления. Задача сводится к анализу уравнения Фоккера — Планка и определению по нему первого, второго и высших моментов плотности распределения величины сопротивления. Выведена на основе этого исследования простая формула для определения флуктуации как меры случайного в сложном процессе сосуществования обоих указанных компонентов сопротивления. Составляется модель и для случая, когда перепад давления является детерминированной величиной, а поток — случайной. На основе неравенств из анализа проводится сравнение обеих моделей. Учет неоднородности пластов весьма необходим при проектировании и анализе разработки нефтяных месторождений.

Изучению этой проблемы посвящено большое число работ, основанных как на методах математической статистики, так [1–6] и на приемах, базирующихся на предположении о строгой детерминированности процесса [7].

Наблюдения дают основание считать, что у изменений параметров пласта, в частности у проницаемости, по пространственным координатам, с одной стороны, обнаруживаются детерминированные признаки, являющиеся следствием динамических законов, которые действовали в процессе седиментогенеза и диагенеза; с другой стороны, значениям этих параметров присущи случайные колебания.

В статье рассматривается главным образом вопрос о роли динамических законов в стохастических моделях неоднородности пласта. Этот вопрос является важным, так как знание меры случайности (и соответственно меры детерминированности) предопределяет практическую методику изучения и обобщения фактического материала.

1. Рассмотрим одномерную модель пласта, разбитого на ряд внутренне однородных участков длины $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. Однородность понимается в следующем смысле. Если признак k в окрестности $\pm x$ рассматриваемой точки представляется некоторой высокочастотной кривой, то при осреднении этого признака по промежуткам $x_1, x_2, \ldots$ каждый раз получаются разные значения. Однако при некотором достаточно большом значении $x = \lambda / 2$ (но не настолько большом, чтобы сказывалось влияние общей тенденции изменения признака) среднее значение k будет практически постоянно.

Размеры элементов зависят от характера решаемой задачи, от тех требований в смысле точности, которые к ней предъявляются. Значения λ, вообще говоря, должны быть разными в различных частях одномерной модели. Однако для тех оценок и полуколичественных выводов, которые здесь делаются, величина λ принимается постоянной, не зависящей от координаты модели.

Через $\varphi(k)$ и $f(r)$ обозначаются плотности распределения проницаемости k и величины, обратной проницаемости, $r = k^{-1}$. Эти функции связаны между собой следующим образом:

$$f(r) = \varphi(k) k^2 \tag{1.1}$$

В общем случае величина $f(r)$ изменяется от точки к точке, и именно это изменение есть проявление детерминированности. Поэтому

$$f(r) = f(x, r) \tag{1.2}$$

где x — координата точки.

В качестве приближения принимается, что плотность распределения меняется скачком с переходом от одного элемента однородности к другому, т. е.

$$f_n(r) = f(\lambda n, r) \qquad (n = 1, 2, \ldots, N) \tag{1.3}$$

где n — число шагов, $x = \lambda n$, N — общее число элементов, укладывающихся на L.

Для задач фильтрации, которые здесь рассматриваются, важно отыскать вероятностные характеристики суммы величин r на всем пути фильтрации $L = \lambda N$. Эта сумма, очевидно, в случае однофазного потока должна быть пропорциональна величине перепада давления на краях пласта

$$\Delta p \sim \lambda q \sum r = \lambda R q \tag{1.4}$$

где q — расход (поток), который в дальнейшем считается детерминированной (заданной) величиной.

Плотность распределения для первых $(n+1)$ элементов суммы определяется на основе предположения, что она зависит от состояния для первых n элементов указанной суммы и не зависит от того, каким образом реализовалось это состояние. Иначе говоря, рассматривается марковская система (цепь), не обладающая «памятью» о прошлом.

Можно показать, что в этом случае

$$F_{n+1}(R) = \int_0^\infty f(\lambda n, r) F_n(R - r)\, dr \tag{1.5}$$

где F_n и F_{n+1} — плотности распределения первых n и $(n+1)$ элементов суммы соответственно.

Наглядным аналогом изучаемого процесса при неизменной плотности исходного распределения $f(r)$ служит, например, задача определения плотности распределения суммы весов рыб при забрасывании крючка в водоем с заданным (неизменным) распределением размера рыб [8] при условии, что каждое забрасывание крючка производится в новый водоем с иным распределением размера рыб.

При больших значениях n $(n \gg 1)$ интегральное уравнение (1.6) можно свести к дифференциальному. Этот случай является наиболее интересным, так как длина пути фильтрации в большинстве случаев во много раз превышает масштаб неоднородности λ. Будем приближенно считать, что $R \gg r$, хотя величина r, вообще говоря, должна пробегать все значения от нуля до бесконечности и при достаточно больших r по порядку может равняться значению суммы R. Однако можно предположить, что большие значения r, соизмеримые при $n \gg 1$ с R, маловероятны. Тогда в согласии с [9] получим частный случай уравнения Фоккера — Планка

$$\frac{\partial F}{\partial n} = -A(\lambda n) \frac{\partial F}{\partial R} + \frac{1}{2} B(\lambda n) \frac{\partial^2 F}{\partial R^2} \tag{1.6}$$

$$A(\lambda n) = \int_0^\infty f(\lambda n, r)\, r\, dr, \quad B(\lambda n) = \int_0^\infty f(\lambda n, r)\, r^2\, dr \tag{1.7}$$

где $A(\lambda h)$, $B(\lambda n)$ — первый и второй моменты плотности распределения $f(r)$.

Важно отметить, что в рассматриваемом случае эти величины зависят от координаты $x=\lambda n$. Это отличает полученный результат от чисто диффузионного ($A=A_0=\text{const}$, $B=B_0=\text{const}$).

Моменты плотности распределения находятся умножением уравнения (1.6) на $R^s dR$ и интегрированием от нуля до бесконечности

$$\frac{d}{dn}\int_0^\infty R^s F\,dR = -A(\lambda n)\left\{R^s F\Big|_0^\infty - S\int_0^\infty R^{s-1}F\,dR\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}B(\lambda n)\left\{R^s\frac{\partial F}{\partial R}\Big|_0^\infty - SR^{s-1}F\Big|_0^\infty + S(S-1)\int_0^\infty R^{s-2}F\,dR\right\}$$

Для $s=1$, 2, 3 и 4, считая, что F стремится к нулю при $R\to\infty$ настолько быстро, что произведения R^sF и $R^s\partial F/\partial R$ также стремятся к нулю, получим следующую систему рекуррентных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dn}\langle R\rangle = A(\lambda n),\quad \frac{d}{dn}\langle R^2\rangle = 2A(\lambda n)\langle R\rangle + B(\lambda n)$$

$$\frac{d}{dn}\langle R^3\rangle = 3A(\lambda n)\langle R^2\rangle + 3B(\lambda n)\langle R\rangle \tag{1.8}$$

$$\frac{d}{dn}\langle R^4\rangle = 4A(\lambda n)\langle R^3\rangle + 6B(\lambda n)\langle R^2\rangle$$

$$\left(\langle R^s\rangle = \int_0^\infty R^s F\,dR\right)$$

Поскольку $A>0$, $B>0$, то из (1.8) следует возрастание всех моментов с ростом n, т. е. с увеличением пути фильтрации.

Пусть $R=R_0$ при $n_0\gg 1$, причем n_0 настолько велико, что можно считать законной замену (1.5) дифференциальным уравнением (1.6). Проинтегрируем (1.8), заменив нижний предел n_0 на нуль. Поскольку текущее значение n значительно больше n_0, получим

$$\langle R\rangle = \lambda^{-1}\int_0^{\lambda n} A(\xi)\,d\xi$$

$$\langle R^2\rangle = \lambda^{-2}\left(\int_0^{\lambda n} A(\xi)\,d\xi\right)^2 + \lambda^{-1}\int_0^{\lambda n} B(\xi)\,d\xi$$

$$\langle R^3\rangle = \lambda^{-3}\left(\int_0^{\lambda n} A(\xi)\,d\xi\right)^3 + 3\lambda^{-2}\left(\int_0^{\lambda n} A(\xi)\,d\xi\right)\left(\int_0^{\lambda n} B(\xi)\,d\xi\right)$$

$$\langle R^4\rangle = \lambda^{-4}\left(\int_0^{\lambda n} A(\xi)\,d\xi\right)^4 + 6\lambda^{-3}\left(\int_0^{\lambda n} A(\xi)\,d\xi\right)^2\times \tag{1.9}$$

$$\times\left(\int_0^{\lambda n} B(\xi)\,d\xi\right) + 3\lambda^{-2}\left(\int_0^{\lambda n} B(\xi)\,d\xi\right)^2$$

Рассмотрим первый и второй моменты. При $A = A_0 = \mathrm{const}$, $B = B_0 = \mathrm{const}$, полагая $n = N$, имеем

$$\langle R\rangle = A_0N = A_0L/\lambda \tag{1.10}$$

$$\langle R^2\rangle = A_0^2N^2 + B_0N = A_0^2L^2/\lambda^2 + B_0L/\lambda$$

Относительное отклонение (флуктуация) величины фильтрационного сопротивления λR имеет вид

$$v = \frac{(\langle R^2\rangle - \langle R\rangle^2)^{1/2}}{\langle R\rangle} = \left(A_0\frac{L}{\lambda}\right)^{-1}\sqrt{\left(A_0^2\frac{L^2}{\lambda^2} + B_0\frac{L}{\lambda}\right) - A_0^2\frac{L^2}{\lambda^2}} = \frac{(B_0\lambda)^{1/2}}{A_0L^{1/2}} \tag{1.11}$$

и убывает с возрастанием L по закону корня квадратного (случай нормального распределения). В случае переменных значений первого и второго моментов исходного распределения согласно (1.9) имеем

$$v = \lambda^{1/2}\left(\int_0^{\lambda N} B(\xi)\,d\xi\right)^{1/2}\left(\int_0^{\lambda N} A(\xi)\,d\xi\right)^{-1} = \lambda^{1/2}\left(\int_0^{L} B(\xi)\,d\xi\right)^{1/2}\left(\int_0^{L} A(\xi)\,d\xi\right)^{-1} \tag{1.12}$$

Из (1.12) ясно, что изменение флуктуации с ростом L зависит от вида функций $A(l)$ и $B(l)$, т. е. от характера зависимости исходной плотности распределения r от длины l. Задаваясь различными видами изменения плотности распределения $f(r)$ в зависимости от пространственной координаты, получим различные закономерности изменения флуктуации, в том числе и немонотонные.

2. Выше была рассмотрена статистическая модель, соответствующая заданному расходу фильтрационного потока. В случае заданного перепада Δp его следует рассматривать как детерминированную величину, а расход q как случайную. Уравнение связи между этими величинами имеет вид

$$\Delta p \sim \lambda(r_1q + r_2q + \ldots)$$

Из этой зависимости следует, что случайный характер величины расхода одинаково сказывается на каждом компоненте r. Отсюда следует, что расход жидкости через пласт обратно пропорционален сумме R случайных компонентов, т. е.

$$q \sim \frac{\Delta p}{\lambda}\frac{1}{R}$$

Если известна плотность распределения $F(R)$ случайной величины R, то плотность распределения обратной величины $Q = R^{-1}$ найдется по формуле

$$\Phi(Q) = Q^{-2}F(Q^{-1})$$

а первый и второй моменты равны

$$\langle Q\rangle = \int_0^\infty Q\Phi(Q)\,dQ = \int_0^\infty Q^{-1}F(Q^{-1})\,dQ = \int_0^\infty R^{-1}F(R)\,dR \tag{2.1}$$

$$\langle Q^2\rangle = \int_0^\infty Q^2\Phi(Q)\,dQ = \int_0^\infty F(Q^{-1})\,dQ = \int_0^\infty R^{-2}F(R)\,dR \tag{2.2}$$

При подстановке в (2.1) и (2.2) плотности распределения из решения дифференциального уравнения (1.8) интегралы расходятся, так как при $R = 0$ это решение дает $F(R) \neq 0$.

Из примера следует, как важно знать достаточно точно распределение вероятности в области малых значений R. Малое расхождение между приближенным и истинным распределениями ($|F_1(x) - F(x)| < \varepsilon$) еще не говорит о малости ошибки при определении числовых характеристик случайной величины, в данном случае потока [10].

В условиях предыдущей задачи (когда задавался поток, а определялась величина перепада давления) точность задания плотности распределения в области малых значений R не имела большого значения.

Ниже рассматриваются некоторые случаи, для которых интегралы вида $\int\limits_0^\infty R^{-s}F(R)\,dR$ $(s = 1)$ будут несходящимися. Во-первых, очевидно, что не будут сходиться те интегралы, для которых в окрестности нуля не соблюдается условие $F(R) \leqslant CR^{\alpha+s}$ $(\alpha > 0)$. В частности, к этой группе относится равномерное распределение, начинающееся с $r = 0$. Однако если начальное распределение $f(r)$ является равномерным, начиная с нуля до некоторого значения $r = \Delta$ (Δ — размах), то из уравнения (1.5) можно получить выражение для распределения $F_n(R)$ в окрестности начала координат в виде

$$F_n(R) = \frac{1}{\Delta^{n+1}}\frac{R^n}{n!} \quad (R < \Delta) \tag{2.3}$$

Из (2.3) видно, что уже с первого шага ($n = 1$) условие сходимости соблюдается. Очевидно, будут сходиться также и те интегралы, для которых в окрестности нуля $f(r) \equiv 0$.

Однако в практических случаях кривая начальной плотности распределения все же будет начинаться не с нуля, т. е. всегда должен существовать отрезок r, примыкающий к началу координат, для которого $f(r) \equiv 0$. Тем самым снимается проблема отыскания области сходимости указанных интегралов.

При решении задач фильтрации достаточно, по-видимому, знать первый и второй моменты распределения $\Phi(Q)$. Эти величины можно найти по моментам распределения $F(R)$, для чего следует использовать различные приближенные методы, и в частности метод статистической линеаризации.

Однако и без знания конкретного вида плотности распределения $F(R)$ и $\Phi(Q)$ можно сделать некоторые важные выводы качественного характера.

Из неравенства Шварца — Буняковского

$$\left(\int\limits_{R_1}^{R_2} f(R)g(R)\,dR\right)^2 \leqslant \int\limits_{R_1}^{R_2}[f(R)]^2\,dR\int\limits_{R_1}^{R_2}[g(R)]^2\,dR$$

$$g(R) = R^{-s/2}[F(R)]^{1/2}, \quad \text{при } f(R) = R^{s/2}[F(R)]^{1/2}$$

следует неравенство, справедливое для всех моментов распределения

$$\langle R^s\rangle\langle R^{-s}\rangle \geqslant 1 \tag{2.4}$$

Отметим, что для реальных распределений $R_1 \neq 0$ и $R_2 \neq \infty$.

В неравенстве Шварца — Буняковского знак равенства должен иметь место при $f(R) = cg(R)$ и в случае, когда плотность распределения вырождается в дельтообразную функцию. В рассматриваемом здесь случае первое из условий имеет место при $s = 0$. Из (2.4) для статистической модели, соответствующей заданному расходу q, получается

$$\langle\Delta p_1\rangle = a\lambda\langle R\rangle q_1 \tag{2.5}$$

Здесь q — коэффициент пропорциональности.

Для случая, когда задан перепад

$$(2.6) \qquad \langle q_2\rangle = a^{-1}\lambda^{-1}\langle R^{-1}\rangle \Delta p_2$$

отсюда следует:

$$(2.7) \qquad q_1 / \langle \Delta p_1\rangle \leqslant \langle q_2\rangle \Delta p_2$$

т. е. что математическое ожидание коэффициента продуктивности первой из указанных моделей не больше, чем второй для любых видов распределения.

Аналогичным способом получаются выражения для вторых моментов

$$(2.8) \qquad q_1^2 / \langle \Delta p_1^2\rangle \leqslant \langle q_2^2\rangle / \Delta p_2^2$$

3. Выше на примере простейшей стохастической модели неоднородности проиллюстрирована роль детерминированной составляющей изучаемого признака. Из приведенного анализа следует, что флуктуация фильтрационного сопротивления — количественная мера случайной составляющей модели пласта зависит от следующих параметров: первого, второго моментов исходной плотности распределения величины сопротивления r и элемента (масштаба) неоднородности пласта λ, а также длины пути фильтрации L. Формула (1.12) позволяет весьма просто указать ориентировочные границы области, в которой можно не учитывать влияние случайных вариаций признака. Например, если величина $\langle B\rangle^{1/2} / \langle A\rangle$ порядка единицы (что правдоподобно), из приведенных формул видно, что $v \approx (\lambda / L)^{1/2}$. Следовательно, если величина λ на один-два порядка меньше длины L, модель может рассматриваться как детерминированная.

При принятых расстояниях между рядами скважин в сотни метров значение λ может быть равно нескольким метрам или нескольким десяткам метров. Естественно, что здесь речь идет о задачах определения дебитов и перепадов давления. В связи с отмеченным возникает необходимость разработки статистических методов учета неоднородности, позволяющих провести границу между однородными участками для определения масштаба λ. Такие методы разработаны применительно к задачам расчленения геологических размеров по комплексу признаков.

Однако в рассмотренном случае задача осложняется тем, что измеряемыми величинами являются дебиты или перепады давлений между ограниченным числом линий расположения стоков и источников. Эта причина обусловливает небольшой объем статистической выборки, но варьируя дебиты или перепады, можно увеличить объем статистического материала.

Наконец, следует отметить, что наличие предложенной модели облегчит решение типичных задач математической статистики, и в частности задачи проверки правдоподобия гипотез. Вместе с тем модель является эскизной и должна быть существенно усовершенствована, в первую очередь, в направлении обобщения на два и три измерения (многомерные марковские процессы).

Поступила 5 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Швидлер М. И.* Об одномерных фильтрационных течениях в средах со случайными неоднородностями. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2.
2. *Швидлер М. И.* О решении типа источника в задаче о нестационарной фильтрации жидкости в среде со случайной неоднородностью. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.
3. *Швидлер М. И., Леви Б. И.* О статистических характеристиках дебитов фильтрационных потоков в неоднородных средах. Теория и практика добычи нефти. Ежегодник. М., «Недра», 1966.

4. *Пилатовский В. П.* О вероятностной оценке влияния линзовидных пластовых включений на фильтрационный поток несжимаемой жидкости в тонком пласте. Теория и практика добычи нефти. Ежегодник. М., «Недра», 1966.
5. *Мендельсон М. М., Швидлер М. И.* О дисперсионных фильтрационных эффектах в средах со случайными неоднородностями. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.
6. *Мендельсон М. М., Швидлер М. И.* Фильтрация с предельным градиентом в среде со случайными неоднородностями. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 5.
7. *Крылов А. П., Борисов Ю. П. и др.* Проектирование разработки нефтяных месторождений (принципы и методы). М., Гостоптехиздат, 1962.
8. *Зельдович Я. Б.* Элементы прикладной математики. М., «Наука», 1967.
9. *Леонтович М. А.* Статистическая физика. М.— Л., Гостоптехиздат, 1944.
10. *Гнеденко Б. В.* Предисловие к сб. «Теория надежности и массовое обслуживание». М., «Наука», 1969.