УДК 532.526

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА[1]

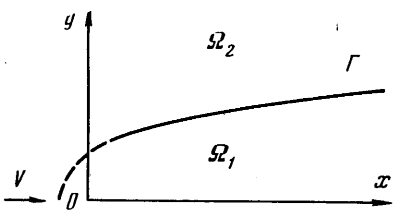
Д. Н. ГОРЕЛОВ, Г. И. ЩЕПАНОВСКАЯ

(*Новосибирск*)

Предлагается приближенный метод решения задач обтекания тел вязкой жидкостью при больших числах Рейнольдса. В основе метода лежит разделение области течения на две, в каждой из которых формулируется и решается своя краевая задача с учетом взаимного влияния течения жидкости в областях. При этом в одной области, прилегающей к телу, течение жидкости описывается уравнениями Навье — Стокса, а в другой, внешней области,— уравнениями Эйлера. На границе раздела этих областей, которая заранее неизвестна, требуется выполнение условий непрерывности вектора скорости и тензора напряжения.

Метод применяется для решения задачи обтекания полубесконечной пластины потоком вязкой несжимаемой жидкости. Решение задачи ищется в виде асимптотического разложения по малому параметру $\varepsilon = \mathrm{Re}^{-1/2}$ (Re — число Рейнольдса). Построены решения порядка ε^0 и ε^1. Приведены результаты расчетов.

1. Рассмотрим плоское стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости около полубесконечной пластины при больших значениях местного числа Рейнольдса. Предположим, что вязкость жидкости проявляется только в области Ω_1, ограниченной пластиной и некоторым контуром Γ: $y = y_\Gamma(x)$ (фиг. 1). В остальной части течения (область Ω_2) жидкость предполагаем идеальной, а течение — потенциальным. Тогда краевая задача, определяющая течение жидкости в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Gamma \cup \Omega_2$, формулируется следующим образом.



Фиг. 1

В области Ω_1 вектор скорости $\mathbf{v}_1$ и гидродинамическое давление p_1 удовлетворяют системе уравнений Навье — Стокса

$$(1.1)\qquad (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla)\mathbf{v}_1 = -\frac{1}{\rho}\nabla p_1 + \nu\Delta\mathbf{v}_1, \qquad \nabla\cdot\mathbf{v}_1 = 0$$

и граничным условиям

$$(1.2)\qquad \mathbf{v}_1 = 0 \quad \text{при } y = 0,\ x > 0$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u} \quad \text{при } y = y_\Gamma,\ x > 0$$

Здесь ρ — плотность жидкости, ν — кинематический коэффициент вязкости, $\mathbf{u}$ — некоторая искомая вектор-функция.

В области Ω_2 вектор скорости $\mathbf{v}_2$ потенциальный ($\mathbf{v}_2 = \nabla\varphi$). Потенциал скорости $\varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$(1.3)\qquad \Delta\varphi = 0$$

[1] Содержание статьи было доложено на III Всесоюзном семинаре по численным методам механики вязкой жидкости (Алма-Ата, 1970).

и граничным условиям

$$
\nabla\varphi\cdot\mathbf{n}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} \quad \text{при } y=y_\Gamma(x),\ x>0
$$

(1.4)
$$
\lim_{r\to\infty}\nabla\varphi=V\mathbf{x}^0 \qquad (r=\sqrt{x^2+y^2})
$$

$$
\varphi(x,y)=\varphi(x,-y)
$$

Здесь $\mathbf{n}$ — орт нормали к контуру Г, $\mathbf{x}^0$ — орт оси x, V — скорость потока в бесконечном удалении от пластины.

Вектор-функция $\mathbf{u}$ и уравнение контура $y=y_\Gamma(x)$ определяются из условий

(1.5)
$$
\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_2, \qquad T_1=T_2 \qquad \text{при } y=y_\Gamma(x),\ x>0
$$

Первое из этих условий обеспечивает непрерывность вектора скорости во всей области течения, а второе — отсутствие скачка напряжений при подходе к контуру Г сверху и снизу.

Для решения задачи (1.1)—(1.5) вместо вектора скорости $\mathbf{v}_1$ введем функцию тока ψ соотношениями

(1.6)
$$
v_{1x}=\partial\psi/\partial y, \qquad v_{1y}=-\partial\psi/\partial x
$$

Кроме того, перейдем к безразмерным функциям и координатам, полагая

(1.7)
$$
\varphi=VL\Phi, \quad \psi=\sqrt{\nu VL}\,\Psi, \quad p=\rho V^2P
$$
$$
\mathbf{u}=V\mathbf{U}, \quad x=L\sigma, \quad y=L\lambda
$$

где L — характерный линейный размер (расстояние от передней кромки до рассматриваемой точки на пластине).

В качестве независимых переменных в области Ω_1 выберем σ

(1.8)
$$
\mu=y\sqrt{\mathrm{Re}}/\sqrt{Lx} \qquad (\mathrm{Re}=VL/\nu)
$$

а в области Ω_2 — σ, λ. Тогда задача (1.1)—(1.5) принимает следующий вид.

В области Ω_1

(1.9)
$$
\frac{\partial^3\Psi}{\partial\mu^3}-\sqrt{\sigma}\frac{\partial\Psi}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}(D\Psi)+\sqrt{\sigma}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\mu^2}D\Psi=
=\sqrt{\sigma^3}D\Psi-\frac{\sigma}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial\mu}(D^2\Psi)
$$

$$
-\frac{\partial P}{\partial\mu}=\frac{1}{\mathrm{Re}}K+\frac{\sqrt{\sigma}}{\mathrm{Re}^2}(D^3\Psi)
$$

$$
\Psi=0, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial\mu}=0 \quad \text{при } \mu=0,\ \sigma>0
$$

(1.10)
$$
\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\frac{\partial\Psi}{\partial\mu}=U_x, \quad -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}D\Psi=U_y \qquad ((\sigma,\mu)\in\Gamma)
$$

$$
D=\frac{\partial}{\partial\sigma}-\frac{\mu}{2\sigma}\frac{\partial}{\partial\mu}
$$

$$
K=-\frac{\partial\Psi}{\partial\mu}D^2\Psi+D\Psi\frac{\partial}{\partial\mu}(D\Psi)+\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}(D\Psi)
$$

Здесь через D^α обозначен α раз последовательно примененный оператор D.

В области Ω_2

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\sigma^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\lambda^2}=0 \tag{1.11}$$

$$\nabla\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{U}\cdot\mathbf{n} \qquad ((\sigma,\lambda)\in\Gamma)$$

$$\lim_{R\to\infty}\nabla\Phi=\boldsymbol{\sigma}^0 \qquad (R=\sqrt{\sigma^2+\lambda^2}) \tag{1.12}$$

$$\Phi(\sigma,\lambda)=\Phi(\sigma,-\lambda)$$

Условия склейки решений на контуре Γ

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}=\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\frac{\partial\Psi}{\partial\mu},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}=-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}D\Psi,\quad P_1=P_2$$
$$\frac{4}{\mathrm{Re}\sqrt{\sigma}}\frac{\partial}{\partial\mu}(D\Psi)=0,\quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial\mu^2}-\frac{\sigma}{\mathrm{Re}}D^2\Psi=0 \tag{1.13}$$

при $\mu=\mu_\Gamma(\sigma)\equiv y_\Gamma\sqrt{\mathrm{Re}}\,/\,(L\,/\,\sigma)$, $\lambda=\lambda_\Gamma\equiv y_\Gamma\,/\,L$.

Здесь $\mu=\mu_\Gamma(\sigma)$ — уравнение границы раздела областей Ω_1 и Ω_2 в переменных μ, σ.

2. Решение задачи (1.9)—(1.13) ищем в виде асимптотических разложений по малому параметру $\varepsilon=\mathrm{Re}^{-1/2}$, полагая

$$\Phi=\Phi^{(0)}+\varepsilon\Phi^{(1)}+\ldots,\qquad \Psi=\Psi^{(0)}+\Psi^{(1)}+\ldots$$
$$P=P^{(0)}+\varepsilon P^{(1)}+\ldots,\qquad \mathbf{U}=\mathbf{U}^{(0)}+\varepsilon\mathbf{U}^{(1)}+\ldots \tag{2.1}$$

Предположим, что функции $\Phi^{(k)}$, $\Psi^{(k)}$, $P^{(k)}$ и $\mathbf{U}^{(k)}$ $(k=0,1,\ldots)$ и производные от них по соответствующим переменным имеют одинаковый порядок. Подставляя разложения (2.1) в (1.9)—(1.13), для первого приближения $\Phi^{(0)}$, $\Psi^{(0)}$, $P^{(0)},\ldots$ получим задачу

$$\frac{\partial^3\Psi^{(0)}}{\partial\mu^3}+\sqrt{\sigma}\frac{\partial^2\Psi^{(0)}}{\partial\mu^2}\frac{\partial\Psi^{(0)}}{\partial\sigma}-\sqrt{\sigma}\frac{\partial\Psi^{(0)}}{\partial\mu}\frac{\partial^2\Psi^{(0)}}{\partial\mu\,\partial\sigma}+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\sigma}}\left(\frac{\partial\Psi^{(0)}}{\partial\mu}\right)^2=\sqrt{\sigma^3}\frac{\partial P^{(0)}}{\partial\sigma}\qquad \frac{\partial P^{(0)}}{\partial\mu}=0 \tag{2.2}$$

$$\Psi^{(0)}=0,\qquad \frac{\partial\Psi^{(0)}}{\partial\mu}=0\quad \text{при } \mu=0$$
$$\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\frac{\partial\Psi^{(0)}}{\partial\mu}\to U_x^{(0)}\qquad \text{при } \mu\to\infty \tag{2.3}$$

$$\Delta\Phi^{(0)}=0,\quad \nabla\boldsymbol{\Phi}^{(0)}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{U}^{(0)}\cdot\mathbf{n}\qquad ((\sigma,\lambda)\in\Gamma) \tag{2.4}$$
$$\lim_{R\to\infty}\nabla\Phi^{(0)}=\boldsymbol{\sigma}^{(0)},\quad \Phi^{(0)}(\sigma,\lambda)=\Phi^{(0)}(\sigma,-\lambda)$$

Следует отметить, что для первого приближения условия (1.13) на Γ могут быть выполнены только при $\mu_\Gamma\to\infty$. При этом оказывается, что

$$\Phi^{(0)}=\sigma,\quad P^{(0)}=\mathrm{const},\quad U_x^{(0)}=1$$

Таким образом, в первом приближении задача (1.9)—(1.13) свелась к задаче Блазиуса [1].

В этом случае

$$\Psi^{(0)}(\sigma,\mu)=\sqrt{\sigma}f(\mu) \tag{2.5}$$

где $f(\mu)$ — решение уравнения Блазиуса.

Следующее приближение задачи (1.9)—(1.13), учитывающее члены порядка ε, принимает вид

В области Ω_1

$$\frac{\partial^3\Psi^{(1)}}{\partial\mu^3}+\sigma\left(f''\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial\sigma}-f'\frac{\partial^2\Psi^{(1)}}{\partial\mu\,\partial\sigma}\right)+\frac{1}{2}f'\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial\mu}+ \tag{2.6}$$
$$+\frac{1}{2}f\frac{\partial^2\Psi^{(1)}}{\partial\mu^2}=\sqrt{\sigma^3}\cdot\frac{\partial P^{(1)}}{\partial\sigma},\quad \frac{\partial P^{(1)}}{\partial\mu}=0$$

$$\Psi^{(1)}=0,\qquad \frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial\mu}=0\quad \text{при } \mu=0,\ \sigma>0$$

$$\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial\mu}=\sqrt{\sigma}\,U_x^{(1)}\qquad \text{при } \mu=\mu_\Gamma(\sigma),\ \sigma>0 \tag{2.7}$$

В области Ω_2

$$\Delta\Phi^{(1)}=0 \tag{2.8}$$
$$\nabla\Phi^{(1)}\cdot\mathbf{n}=U_y^{(1)}\qquad \text{при } \sigma>0,\ \lambda=\lambda_\Gamma(\sigma)$$

$$\lim_{R\to\infty}\nabla\Phi^{(1)}=0,\qquad \Phi^{(1)}(\sigma,\lambda)=\Phi^{(1)}(\sigma,-\lambda) \tag{2.9}$$

Условия на Γ

$$1+\varepsilon\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\sigma}=f'+\frac{\varepsilon}{\sqrt{\sigma}}\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial\mu} \tag{2.10}$$
$$\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\lambda}=-\frac{1}{2\sqrt{\sigma}}[f-\mu f')$$
$$\frac{1}{\sqrt{\sigma}}f''+\frac{\varepsilon}{\sigma}\frac{\partial^2\Psi^{(1)}}{\partial\mu^2}=0$$

при $\mu=\mu_\Gamma(\sigma)$, $\lambda=\lambda_\Gamma(\sigma)$.

Аналогично ставится задача и для следующих приближений. Заметим, что уравнения для высших приближений линейные. Однако условия на Γ остаются нелинейными, так как функция $\mu_\Gamma(\sigma)$ является искомой.

3. Для решения задачи (2.8), (2.9) в области Ω_2 введем параболическую систему координат ξ, η с помощью соотношений $2\sigma=\xi^2-\eta^2$, $\lambda=\xi\eta$. В этой системе координат точкам пластины соответствует $\eta=0$, а отрицательной оси σ — ось $\xi=0$. Краевая задача (2.8), (2.9) в переменных ξ, η принимает вид

$$\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial\eta^2}=0 \tag{3.1}$$

$$\left.\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}=\xi U_y^{(1)}\left(\frac{\xi^2}{2}\right),\qquad \Phi^{(1)}(\xi,\eta)=\Phi^{(1)}(-\xi,\eta) \tag{3.2}$$

$$\nabla\Phi^{(1)}\to 0\quad \text{при } \eta\to\infty$$

Отметим, что при решении задачи второго приближения граничное условие (2.9) на Γ сносится на линию $\eta=0$, так как это приводит к ошибке порядка ε^2 (в предположении, что $\lambda_\Gamma\sim\varepsilon$).

Решением задачи (3.1), (3.2) является функция

$$\Phi^{(1)}(\xi,\eta)=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\omega\eta}\frac{\cos\omega\xi}{\omega}\times \tag{3.3}$$

$$\times\left(\int_0^\infty \theta U_y^{(1)}\left(\frac{\theta^2}{2}\right)\cos\omega\theta\,d\theta\right)d\omega$$

В (3.3) функция $U_y^{(1)}$ является искомой достаточно гладкой функцией, которая определяется из условий (2.10).

Представим функцию $U_y^{(1)}$ в виде

$$U_y^{(1)}(\sigma)=\sqrt{\sigma}\sum_{m=1}^\infty\frac{q_m}{(1+\sigma)^m}\qquad\left(\sigma=\frac{\xi^2}{2}\right) \tag{3.4}$$

Коэффициенты q_m определяются в результате решения всей задачи (2.6)–(2.10) и связаны дополнительно условием разрешимости задачи Неймана для уравнения Лапласа

$$\int_0^\infty \xi U_y^{(1)}(\xi^2/2)\,d\xi=0$$

Отсюда следует:

$$q_1=0,\qquad \sum_{m=2}^\infty\frac{(2m-5)!!}{(2m-2)!!}q_m=0 \tag{3.5}$$

В соответствии с (3.3)–(3.5)

$$\Phi^{(1)}(\xi,\eta)=\sum_{n=2}^\infty q_n\Phi_n^{(1)}(\xi,\eta) \tag{3.6}$$

$$\Phi_n^{(1)}(\xi,\eta)=-\frac{2^{n+1}}{\pi\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-\omega\eta}\frac{\cos\omega\xi}{\omega}\left(\int_0^\infty\frac{\theta^2\cos\omega\theta}{(2+\theta^2)^n}d\theta\right)d\omega$$

Вычисляя интегралы, получим

$$\Phi_n^{(1)}(\xi,\eta)=\sum_{k=1}^{n-1}A_{nk}F_k(\xi,\eta) \tag{3.7}$$

$$A_{nk}=\frac{2^{3k/2}}{k2^{2n-2}}\left[\frac{(2n-k-2)!}{(n-1)!\,(n-k-1)!}-4(1-\delta_{k,n-1})\times\right.$$

$$\left.\times\frac{(2n-k-4)!}{(n-2)!\,(n-k-2)!}\right],$$

$$F_k(\xi,\eta)=[\xi^2+(\sqrt{2}+\eta)^2]^{-k/2}\cos\left(k\operatorname{arc\,tg}\frac{\xi}{\sqrt{2}+\eta}\right)$$

где $\delta_{k,\,n-1}$ — символ Кронекера.

4. Перейдем к решению задачи (2.6), (2.7) в области Ω_1 $(0<\sigma<1,$ $0\leqslant\mu\leqslant\mu_\Gamma)$. Решение этой задачи зависит от функций $U_x^{(1)}$ и $\partial P^{(1)}/\partial\sigma$.

В соответствии с (3.6)

$$U_x^{(1)}=\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\sigma}\bigg|_{\lambda=0}=\sum_{n=2}^{\infty}q_n\frac{\partial\Phi_n^{(1)}(\xi,0)}{\partial\sigma} \tag{4.1}$$

Безразмерное гидродинамическое давление $P^{(1)}$ во втором приближении удовлетворяет в Ω_1 уравнению $\partial P^{(1)}/\partial\mu=0$. Поэтому давление $P^{(1)}$ является функцией одной переменной σ и определяется решением задачи (3.1), (3.2). Используя интеграл Бернулли, имеем

$$\frac{dP^{(1)}}{d\sigma}=-\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial\sigma^2}\bigg|_{\lambda=0}=-\sum_{n=2}^{\infty}q_n\frac{\partial^2\Phi_n^{(1)}(\xi,0)}{\partial\sigma^2} \tag{4.2}$$

Предполагая аналитичность решения в окрестности точки $\sigma=\sigma_0$, $\mu=0$ из области Ω_1, ищем функцию тока $\Psi^{(1)}$ в виде двойного ряда

$$\Psi^{(1)}(\sigma,\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}b_{kn}\mu^k(\sigma-\sigma_0)^n \tag{4.3}$$

Правую часть первого уравнения системы (2.6) также разложим в ряд вида

$$\sqrt{\sigma^3}\frac{dP^{(1)}}{d\sigma}=-\sqrt{\sigma^3}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\partial^2\Phi_m^{(1)}(\xi,0)}{\partial\sigma^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\varkappa_{nm}q_m(\sigma-\sigma_0)^n \tag{4.4}$$

Функцию $f(\mu)$, значения которой, включая первую и вторую производные, затабулированы в широком диапазоне изменения μ (см., например, [1]), интерполируем полиномом

$$f(\mu)=\sum_{k=2}^{N}a_k\mu^k\qquad(0\leqslant\mu\leqslant\mu_0>\mu_\Gamma) \tag{4.5}$$

Подставляя (4.3)—(4.5) в уравнения (2.6), получим следующую рекуррентную формулу для коэффициентов b_{kn} (для $N=5$)

$$\begin{aligned}
b_{k+3,n}=&-\frac{1}{(k+3)(k+2)(k+1)}\bigg\{\bigg[\frac{k(k-1)}{2}+2k\Big(\frac{1}{2}-k\Big)+\\
&+2k\bigg]a_2b_{kn}+\bigg[\frac{(k-1)(k-2)}{2}+3(k-1)\Big(\frac{1}{2}-k\Big)+6k\bigg]\times\\
&\times a_3b_{k-1,n}+\bigg[\frac{(k-2)(k-3)}{2}+4(k-2)\Big(\frac{1}{2}-k\Big)+12k\bigg]\times\\
&\times a_4b_{k-2,n}+\bigg[\frac{(k-3)(k-4)}{2}+5(k-3)\Big(\frac{1}{2}-k\Big)+20k\bigg]\times\\
&\times a_5b_{k-3,n}+(n+1)\sigma_0[2(1-k)a_2b_{k,n+1}+3(3-k)a_3b_{k-1,n+1}+\\
&+4(5-k)a_4b_{k-2,n+1}+5(7-k)a_5b_{k-3,n+1}]-\delta_{0k}\varkappa_k\bigg\}\\
&\bigg(n,k=0,1,\ldots;\qquad \varkappa_k=\sum_{m=2}^{\infty}q_m\varkappa_{km}\bigg)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Здесь предполагается, что $b_{mn}=0$ при $m<0$. Формула (4.6) дает выражение всех коэффициентов b_{mn} через b_{0n}, b_{1n}, b_{2n}. Из граничных условий (2.7) на пластине (при $\mu=0$) следует, что

$$(4.7)\qquad b_{0n}=b_{1n}=0$$

Таким образом, задачи (2.6)–(2.9) в областях Ω_1 и Ω_2 свелись к нахождению коэффициентов q_m, b_{2n} $(m=2,\ldots;n=0,\ldots)$ и функции $\mu_\Gamma(\sigma)$. Для их определения воспользуемся условиями (2.10) на контуре Г.

5. Подставляя (3.6), (4.3) в (2.10) и используя условие (2.7) при $\mu=\mu_\Gamma$, приходим к следующей системе трех функциональных уравнений:

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{\sigma}}\sum_{l=2}^{\infty} l\sum_{n=0}^{\infty}(\sigma-\sigma_0)^n\mu_\Gamma^{l-1}\left[\sum_{s=0}^{\alpha(l)}R_{ln}^{(s)}\sum_{m=2}^{\infty}q_m\varkappa_{n+s,m}+\right.$$
$$\left.+\sum_{s=0}^{\beta(l)}r_{ln}^{(s)}b_{2,n+s}\right]+\sum_{k=2}^{5}ka_k\mu_\Gamma^{k-1}=1+\varepsilon\sum_{m=2}^{\infty}q_m\frac{\partial\Phi_m^{(1)}}{\partial\sigma}\bigg|_{\sigma=0}$$

$$(5.1)\qquad \frac{\mu_\Gamma}{2\sqrt{\sigma}}\sum_{k=2}^{5}ka_k\mu_\Gamma^{k-1}-\frac{1}{2\sqrt{\sigma}}\sum_{k=2}^{5}a_k\mu_\Gamma^{k}=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{q_m}{(1+\sigma)^m}$$

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{\sigma}}\sum_{l=2}^{\infty} l(l-1)\sum_{n=0}^{\infty}(\sigma-\sigma_0)^n\mu_\Gamma^{l-2}\left[\sum_{s=0}^{\alpha(l)}R_{ln}^{(s)}\sum_{m=2}^{\infty}q_m\varkappa_{n+s,m}+\right.$$
$$\left.+\sum_{s=0}^{\beta(l)}r_{ln}^{(s)}b_{2,n+s}\right]+\sum_{k=2}^{5}k(k-1)a_k\mu_\Gamma^{k-2}=0$$

к которым следует добавить соотношения (3.5).

Здесь

$$\alpha(l)=\operatorname{entier}(l/3)-1,\quad \beta(l)=\operatorname{entier}(l-2)/3$$

а коэффициенты $R_{ln}^{(s)}$, $r_{ln}^{(s)}$ определяются системой алгебраических уравнений

$$(5.2)\qquad b_{ln}=\sum_{k=0}^{\alpha(l)}R_{ln}^{(k)}\varkappa_{n+k}+\sum_{k=0}^{\beta(l)}r_{ln}^{(k)}b_{2,n+k}\quad(l=2,\ldots;\ n=0,\ldots)$$

Систему (5.1) решаем методом коллокаций, согласно которому уравнения (5.1) удовлетворяются в ряде дискретных точек $\sigma=\sigma_0=\sigma_i$ $(i=1,\ldots,N)$, а соответствующие ряды заменяются конечными суммами. В результате получим систему $3N$ нелинейных алгебраических уравнений для определения $3N$ неизвестных величин b_{2n}, q_m $\mu_i=\mu_\Gamma(\sigma_i)$ $(n=0,\ldots,N-1;\ m=2,\ldots,N+1,\ i=1,\ldots,N)$. Замена бесконечных рядов конечными суммами обусловлена сходимостью ряда (4.3) в каждой точке $\sigma=\sigma_i\neq0$ (это можно показать, используя рекуррентные формулы (4.6)).

Полученная система имеет вид

$$(5.3)\qquad B_1b+Q_1q=c_1,\quad Q_2q=c_2,\quad B_3b+Q_3q=c_3$$

где B_1, B_3, Q_1, Q_2, Q_3 — квадратные матрицы N порядка, коэффициенты которых являются функциями величин $\mu_1,\ldots,\mu_N$, c_1,c_2,c_3 — вектор-столбцы, также зависящие от $\mu_1,\ldots,\mu_N$, а b, q — векторы, компоненты которых равны коэффициентам $b_{20},\ldots,b_{2,N-1}$ и $q_2,\ldots,q_{N+1}$ соответственно. Решая первые два матричных уравнения относительно b и q, получим

(5.4) $$q = Q_2^{-1}c_2, \qquad b = B_1^{-1}[c_1 - Q_1Q_2^{-1}c_2]$$

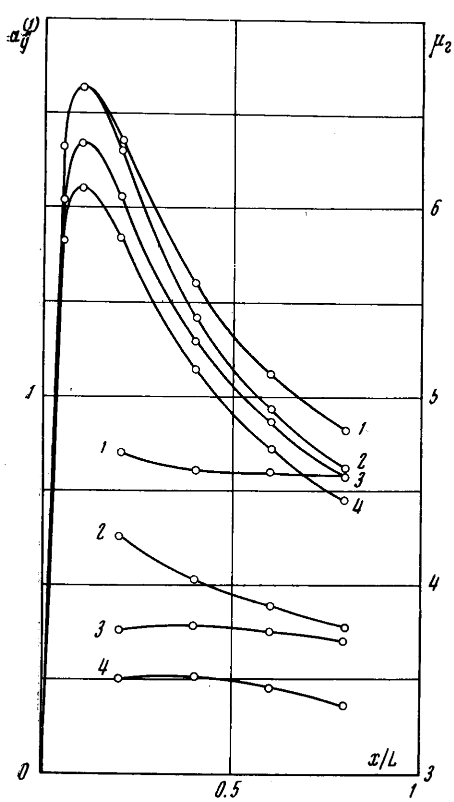
Подставляя (5.4) в третье уравнение системы (5.3), придем к следующей системе N нелинейных алгебраических уравнений относительно величин $\mu_1, \ldots, \mu_N$:

(5.5) $$B_3B_1^{-1}[c_1 - Q_1Q_2^{-1}c_2] + Q_3Q_2^{-1}c_2 = c_3$$

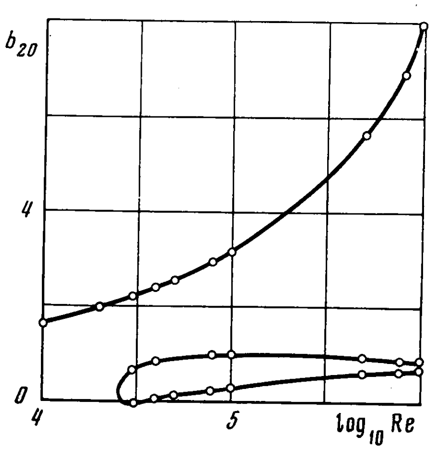
Эта система решается методом итераций [3]. После определения $\mu_1, \ldots, \mu_N$ вычисляются коэффициенты b_{2n}, q_m по формулам (5.4).

На этом решение задачи (2.6)—(2.10) для второго приближения можно считать законченным.

6. В качестве примера реализации предложенного метода был проведен расчет второго приближения на ЭВМ БЭСМ-6 для ряда значений числа Рейнольдса в диапазоне $10^4 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 10^6$. При этом система уравнений (5.1) удовлетворялась в четырех точках с координатами $\sigma_i = 0.2\, i$ $(i = 1, \ldots, 4)$. Соответствующие им величины $\mu_i = \mu_г(\sigma_i)$ определялись из системы (5.5) методом итераций. Начальные значения μ_{i0} задавались одинаковыми во всех точках, а число итераций определялось требуемой точностью расчета (обычно 10^{-8}). При этом в случае $\mathrm{Re} < 2.5 \cdot 10^4$ были получены единственные значения $\mu_г(\sigma_i)$ для каждого Re, а при $\mathrm{Re} > 2.5 \cdot 10^4$ единственность решения нарушалась.



Фиг. 2



Фиг. 3

Результаты расчета функции $\mu_г(\sigma)$ и коэффициентов b_{2n}, q_m позволяют вычислить форму границы Г, гидродинамические характеристики потока и величину местного сопротивления трения в точках пластины.

Уравнение границы μ в соответствии с формулами (1.8) имеет вид

(6.1) $$\frac{y_г(x)}{L} = \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\mu_г(\sigma) \qquad (\sigma = x/L)$$

В первом приближении (в задаче Блазиуса) функция $\mu_\Gamma(\sigma)=\infty$. Значения функции μ_Γ для второго приближения, соответствующие $\mathrm{Re}=10^4$ (кривая *4*) и $\mathrm{Re}=10^5$ (кривые *1—3*), показаны на фиг. 2 пунктиром. Там же сплошными линиями показаны результаты расчета поперечной составляющей скорости $U_y^{(1)}$ на границе Г.

Коэффициент местного сопротивления пластины с учетом второго приближения вычисляется по формуле

$$C_f(x)=\frac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}+\frac{4b_{20}}{\mathrm{Re}_x}\qquad\left(\mathrm{Re}_x=\frac{Vx}{\nu}\right)\tag{6.2}$$

где первое слагаемое совпадает с известным решением задачи Блазиуса, а второе дает поправку на взаимное влияние течений в областях Ω_1 и Ω_2. Величина коэффициентов b_{20} в зависимости от Re приведена на фиг. 3. Появление нескольких решений задачи показывает неоднозначность определения поля скоростей при $\mathrm{Re}>2.5\cdot10^4$ в рамках рассматриваемой модели обтекания пластины вязкой жидкостью.

Институт гидродинамики
СО АН СССР

Поступила 29 XI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
2. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, ч. 2. М., Физматгиз, 1963.
3. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики. М., Физматгиз, 1960.