

УДК 532.529

О МАССООБМЕНЕ МЕЖДУ ПУЗЫРЯМИ И НЕПРЕРЫВНОЙ ФАЗОЙ В ПСЕВДООЖИЖЕННОМ СЛОЕ

Ю. П. ГУПАЛО, Ю. С. РЯЗАНЦЕВ, Ю. А. СЕРГЕЕВ

(*Москва*)

Рассматривается задача о массообмене между отдельным пузырем и непрерывной фазой в псевдоожиженнном слое, когда установившаяся скорость подъема пузыря превышает скорость псевдоожижения. В этом случае пузырь вместе с прилегающей областью, занятой двухфазной системой, окружен непроницаемой для жидкости поверхностью тока [1-3], и задача сводится к определению поля концентрации и полного потока вещества на эту поверхность. Решение задачи получено для больших и малых чисел Пекле методом диффузионного пограничного слоя и методом сращиваемых асимптотических разложений соответственно.

Одной из принципиальных особенностей химического реактора с неоднородным псевдоожиженным слоем служит массообмен между непрерывной фазой и свободными от твердых частиц полостями, по существу представляющими собой всплывающие пузыри. Внутри этих пузырей реакция практически не идет, поэтому степень превращения и эффективность работы реактора существенно зависит от характера массообмена между пузырями и окружающей средой. Почти во всех реальных случаях скорость подъема пузыря превышает скорость псевдоожижения, и задача становится нетривиальной вследствие образования включающей пузырь области с замкнутой циркуляцией жидкой фазы, массообмен которой с окружающим псевдоожиженным слоем определяется процессом конвективной диффузии.

Для решения этой задачи в [4] был предложен полуэмпирический подход, основанный на использовании закономерностей диффузии к твердой сфере в пренебрежении особенностями действительной картины обтекания пузыря. В [4] авторы необоснованно пренебрегли диффузией к границе области с циркуляцией, содержащей пузырь, и ограничились рассмотрением менее существенного процесса диффузионного обмена внутри области циркуляции между пузырем и окружающим его облаком; аналогичный характер носит и работа [5]. В [6] рассмотрена плоская задача массообмена при больших числах Пекле и приведены результаты соответствующих экспериментов. Некоторые экспериментальные результаты содержатся также в [7]. Наконец, в [8] дано численное решение приближенной задачи, соответствующей большими числам Пекле.

Ниже получено аналитическое решение задачи о массообмене пузыря с псевдоожиженным слоем как для больших, так и для малых чисел Пекле, основанное на анализе реального поля течения вокруг пузыря.

1. Постановка задачи. Рассмотрим сферический пузырь, поднимающийся с постоянной скоростью u_b в реакторе с псевдоожиженным слоем катализатора. Реактор имеет постоянное сечение, поток оживающего агента вдали от пузыря однороден, а средняя скорость этого потока в промежутках между частицами равна v_0 . Радиус пузыря a_b предполагается достаточно малым по сравнению с поперечным размером реактора, так что можно рассматривать изолированный пузырь в однородном потоке. Предполагается, что $u_b > v_0$.

В сферической системе координат, связанной с центром пузыря, поле течения оживающего агента описывается следующей функцией тока [1]:

$$(1.1) \quad \psi = (u_b - v_0) \left(1 - \frac{a_c^3}{r^3} \right) \frac{r^2}{2} \sin^2 \theta, \quad \frac{a_c^3}{a_b^3} = \frac{u_b + 2v_0}{u_b - v_0}$$

Здесь при $u_b > v_0$ величина a_c представляет собой радиус сферы с центром, совпадающим с центром пузыря, поверхность которой непроницаема для жидкости. Внутри области, ограниченной этой поверхностью, про-

исходит интенсивная циркуляция жидкости, поэтому естественно считать, что здесь имеет место полное перемешивание вещества.

В качестве иллюстрации поля течения в окрестности пузыря на фиг. 1 показаны траектории частиц твердой фазы (правая часть фиг. 1, пунктир) и линии тока жидкости (левая часть, тонкие сплошные линии) при $u_b / v_0 = 2$, чему соответствует $a_c / a_b \approx 1.58$.

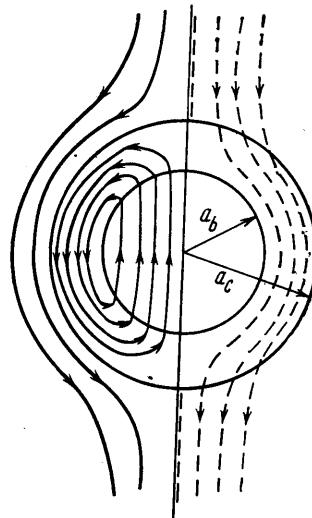
Исходя из описанной выше модели течения, будем считать, что концентрация диффундирующего вещества в области замкнутой циркуляции постоянна. Тогда задача о массообмене между пузырем и окружающим его взвешенным слоем сводится к расчету диффузационного потока на границу этой области.

2. Приближение диффузационного пограничного слоя. Рассмотрим случай, когда число Пекле, определяемое по радиусу a_c области замкнутой циркуляции, относительной скорости движения пузыря $u_b - v_0$ и эффективному коэффициенту диффузии D , велико. В этом случае для решения задачи достаточно рассмотреть диффузию в пограничном слое вокруг области замкнутой циркуляции.

Отсчитывая концентрацию от ее значения в области замкнутой циркуляции, уравнение стационарной конвективной диффузии в пограничном слое и граничные условия запишем в виде

$$(2.1) \quad v_r \frac{\partial c}{\partial r} + v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta} = D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right)$$

$$r \rightarrow \infty, \quad c = c_0; \quad r = a_c, \quad c = 0$$



Фиг. 1

Здесь v_r, v_θ — составляющие скорости жидкости в сферических координатах, связанных с центром пузыря (угловая координата θ отсчитывается от направления относительной скорости потока на бесконечности).

Используя функцию тока (1.1), перейдем в (2.1) к переменным ψ, θ и с учетом неравенства $r - a_c \ll a_c$, справедливого в пограничном слое, ограничимся главным членом разложения функции тока в ряд по степеням $r - a_c$. Кроме того, используем дополнительное условие в точке набегания потока: условие $c = c_0$ при $\theta = \pi, r = a_c$. В результате задача (2.1) сводится к следующей:

$$(2.2) \quad \frac{\partial c}{\partial \theta} = Da_c^2 \sin \theta \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial c}{\partial \psi} \right)$$

$$\psi = 0, \quad c = 0; \quad \psi \rightarrow \infty, \quad c = c_0$$

$$\theta = \pi, \quad r = a_c, \quad c = c_0$$

$$\psi = \frac{1}{2} (u_b - v_0) a (r - a_c) \sin^2 \theta$$

Решение задачи (2.2) имеет вид [8]

$$(2.3) \quad c = c_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp(-z^2) dz, \quad \eta = \frac{\psi}{2\sqrt{t}}$$

$$t = \frac{1}{2} (u_b - v_0) Da_c^3 (2 + 3 \cos \theta - \cos^3 \theta)$$

Для диффузионного потока получим (δ — толщина диффузионного пограничного слоя)

$$j = D \left(\frac{\partial c}{\partial r} \right)_{r=a_c} = \frac{Dc_0}{\delta}, \quad \delta = \frac{\sqrt{2\pi}}{3} \sqrt{\frac{a_c D}{u_b - v_0}} \frac{\sqrt{2 - \cos \theta}}{1 - \cos \theta}$$

Полный поток к поверхности области замкнутой циркуляции равен

$$(2.4) \quad I = 8c_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} D^{1/2} (u_b + 2v_0)^{1/2} a_b^{1/2}$$

С учетом (2.4) для среднего числа Шервуда получим

$$(2.5) \quad Sh = \frac{I}{4\pi a_c D c_0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a_b^{1/2} u_b^{1/2}}{D^{1/2}} \left(1 - \frac{v_0}{u_b} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{2v_0}{u_b} \right)^{1/2}$$

Видно, что число Шервуда зависит не только от скорости подъема пузыря, но и от величины отношения v_0 / u_b . На фиг. 2 сплошной линией показана зависимость $Sh^* = Sh D^{1/2} a_b^{-1/2} u_b^{-1/2}$ от v_0 / u_b .

Следует подчеркнуть, что приведенные результаты были получены в предположении, что $P = a_c(u_b - v_0) / D \gg 1$, поэтому при $u_b \approx v_0$ они пригодны лишь до тех пор, пока $1 - v_0 / u_b \gg (D / a_b u_b)^{1/2}$

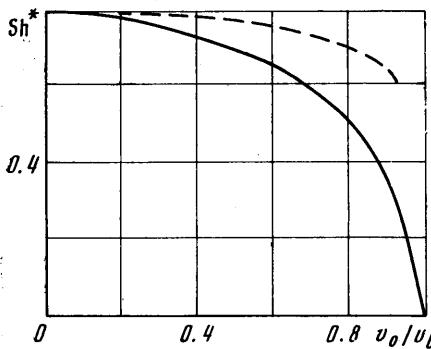
Решение задачи при малых конечных числах Пекле получено в п. 4.

3. Другие модели течения. Рассмотренное выше поле течения жидкой фазы вблизи пузыря соответствует одной из простейших моделей, правильно описывающих основные

особенности реальной картины течения. Представляет интерес сравнить результаты п. 2 с результатами, к которым приводят более сложные модели обтекания, например, предложенные в [2, 3]. Одной из наиболее совершенных является модель [2], в которой составляющие скорости течения жидкой фазы вокруг пузыря имеют вид [2]

$$(3.1) \quad \begin{aligned} v_r &= u_b \left(1 - \frac{a_b^3}{r^3} \right) \cos \theta - \gamma v_0 \left[\frac{2a_b^3}{3r^3} + \frac{a_b^6}{3r^6} + \cos \theta - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{2a_b^3}{r^3} - \frac{a_b^6}{r^6} \right) \cos^2 \theta \right] \\ v_\theta &= -u_b \left(1 + \frac{1}{2r^3} \right) \sin \theta + \gamma v_0 \left[1 + \left(\frac{4a_b^4}{3r^4} - \frac{a_b^7}{3r^7} \right) \cos \theta \right] \sin \theta \end{aligned}$$

Здесь $\gamma = \gamma(r, \theta)$ — не зависящее от поля скоростей отношение проницаемости слоя на бесконечности и вблизи пузыря. Функция $\gamma(r, \theta)$ получена в [2] численным методом. Численные оценки, а также экспериментальные данные [10] показывают, что величина γ заключена в пределах $0.8 < \gamma \leq 1$ и быстро приближается к единице при удалении от поверхности пузыря. Необходимо иметь в виду, что решение диффузионной задачи зависит лишь от распределения скоростей вне области замкнутой циркуляции, граница которой расположена тем дальше от поверхности пузыря,



Фиг. 2

чем больше отношение v_0 / u_b . С другой стороны, при малых v_0 / u_b член, содержащий γ , вообще несуществен, поэтому практически всегда можно считать, что $\gamma = 1$, и функцию тока, соответствующую (3.1), записать в виде

$$(3.2) \quad \psi = u_b \left(1 - \frac{a_b^3}{r^3} \right) \frac{r^2}{2} \sin^2 \theta + v_0 \frac{r^2}{2} \sin^2 \theta + v_0 \frac{1}{r} \left(1 + \frac{5}{6} \cos \theta + \frac{1}{6} \cos 3\theta - \frac{7}{6r} - \frac{13}{12r} \cos \theta - \frac{1}{12r} \cos 3\theta \right)$$

Граница области замкнутой циркуляции задается неявной функцией $\psi(r, \theta) = 0$ и при $v_0 / u_b < 1$ может быть аппроксимирована выражением

$$(3.3) \quad r_c = a_c + 1.4 \left(\frac{v_0}{u_b} \right)^2 \left(1 + \frac{0.16}{1 - \cos \theta} \right) a_b, \quad \frac{a_c^3}{a_b^3} = \frac{u_b + 2v_0}{u_b - v_0}$$

Аппроксимация (3.3) пригодна всюду, за исключением узкой кормовой области, несущественной при расчете диффузионного притока.

Таким образом, в рамках модели [2] задача сводится к определению диффузионного притока к поверхности (3.3) для поля течения, заданного функцией тока (3.2).

Уравнение конвективной диффузии в пограничном слое после перехода к переменным ψ, θ принимает вид

$$(3.4) \quad \frac{\partial c}{\partial \theta} = D r_c^2(\theta) \sin^2 \theta v_r(\theta) \sqrt{r_c^2(\theta) + r_c'^2(\theta)} \frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2}$$

Здесь $v_r(\theta)$ — значение касательной составляющей скорости жидкости на границе области замкнутой циркуляции. Границные условия для (3.4) аналогичны приведенным в п. 2.

Решение сформулированной задачи находится так же, как решение задачи в п. 2, но требует более громоздких вычислений. В результате для среднего числа Шервуда получим

$$(3.5) \quad Sh = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a_b^{1/2} u_b^{1/2}}{D^{1/2}} f \left(\frac{v_0}{u_b} \right)$$

Функция $f = f(v_0 / u_b)$ в (3.5) может быть определена только численно и имеет следующие значения:

u_0/u_b	0.1	0.25	0.4	0.5	0.65	0.8
f	1.0	0.99	0.98	0.96	0.94	0.89

Формула (3.5) совпадает с (2.5) с точностью до функции $f(v_0 / u_b)$. На фиг. 2 зависимость (3.5) показана пунктиром. Видно, что модель [2] приводит к более высоким значениям Sh , но достаточно близким к полученным в п. 2. Можно заключить, что использование более сложной модели течения не приводит к имеющим практическое значение изменениям величины числа Шервуда.

4. Случай малых чисел Пекле. Так же, как в п. 2, будем считать, что обтекание пузыря описывается функцией тока (2.1). Тогда задача о диффузионном притоке к пузырю сводится к расчету диффузионного притока к поверхности области с замкнутой циркуляцией. Уравнение конвективной диффузии и граничные условия запишем в виде

$$(4.1) \quad \Delta \xi = \frac{P}{r^2} \frac{\partial (\psi, \xi)}{\partial (r, \mu)} \quad \left(\mu = \cos \theta, P = \frac{a_c (u_b - v_0)}{D} \right)$$

$$(4.2) \quad r \rightarrow \infty, \quad \xi \rightarrow 0$$

$$(4.3) \quad r = 1, \quad \xi = 1$$

Здесь и далее r — безразмерная радиальная координата, отнесенная к радиусу a_c зоны замкнутой циркуляции, $\xi = (c_0 - c) / c$.

Решение задачи (4.1) — (4.3) найдем методом сращиваемых асимптотических разложений по числу P (см., например, [1]).

Внутреннее и внешнее разложения имеют вид

$$(4.4) \quad \xi_* = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(P) \xi_n(r, \mu), \quad \xi^* = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{(n)}(P) \xi^{(n)}(\rho, \mu)$$

$$\alpha_0 = 1, \quad \lim_{P \rightarrow 0} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 0, \quad \lim_{P \rightarrow 0} \frac{\alpha^{(n+1)}}{\alpha^{(n)}} = 0$$

Члены внутреннего разложения находятся из (4.1), (4.3), где

$$(4.5) \quad \psi \equiv \psi_* = \left(r^2 - \frac{1}{r} \right) (1 - \mu^2) / 2$$

Во внешней области введем координату $\rho = rP$ и функцию тока $\psi^* = \psi P^2$. Из (4.1), (2.1), (4.2) для ξ^* получим

$$(4.6) \quad \Delta^* \xi^* = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial (\psi^*, \xi^*)}{\partial (\rho, \mu)}$$

$$(4.7) \quad \rho \rightarrow \infty, \quad \xi \rightarrow 0$$

$$(4.8) \quad \psi^* = (\rho^2 + P^3 1 / \rho) (1 - \mu^2) / 2$$

Здесь Δ^* — оператор Лапласа по переменным ρ и μ . Константы, появляющиеся в решениях задач (4.2), (4.3) и (4.6), определяются сращиванием разложений (4.4).

В таком виде задача сводится к расчету диффузионного потока на сфере радиуса a_c , помещенную в однородный поток идеальной жидкости, при малых числах Пекле, которая была решена в работе [1]. Для нулевых членов внешнего и внутреннего разложений имеем

$$(4.9) \quad \alpha^{(0)} = 1, \quad \xi^{(0)} = 0, \quad \alpha_0 = 1, \quad \xi_0 = r^{-1}$$

Переписывая ξ_0 во внешних переменных, имеем $\alpha^{(1)} = P$. Следуя общему методу, для первого члена внешнего разложения получим уравнение, которое сводится к уравнению Гельмгольца, и граничное условие (4.7). Выписывая общее решение этой задачи, получим после сращивания с ξ_0

$$(4.10) \quad \alpha^{(1)} = P, \quad \xi^{(1)} = \rho^{-1} \exp [1/2\rho(\mu - 1)]$$

Отсюда для первого члена внутреннего разложения $\alpha_1 = P$. Решая уравнение для ξ_1 , после сращивания $\xi_{*1} = \xi_0 + P\xi_1$ с $\xi^{*(1)} = P\xi^{(1)}$ имеем

$$(4.11) \quad \alpha_1 = P, \quad \xi_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2r} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4r^2} + \frac{1}{4r^3} \right) \mu$$

Действуя аналогично, для вторых членов внешнего и внутреннего разложения найдем

$$\alpha^{(2)} = P^2, \quad \xi^{(2)} = 1/2\xi^{(1)}, \quad \alpha_2 = P^2$$

$$(4.12) \quad \xi_2 = \left(\frac{r}{6} - \frac{1}{4} + \frac{7}{40r} + \frac{1}{24r^2} - \frac{1}{16r^4} + \frac{1}{60r^5} \right) + \\ + \left(-\frac{r}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8r^2} + \frac{1}{8r^3} \right) P_1(\mu) + \\ + \left(\frac{r}{12} - \frac{1}{4r} + \frac{5}{24r^2} + \frac{3}{56r^3} - \frac{1}{8r^4} + \frac{5}{168r^5} \right) P_2(\mu).$$

Для третьих членов внешнего и внутреннего разложений

$$(4.13) \quad \alpha^{(3)} = P^3, \quad \xi^{(3)} = \exp \left(\rho \frac{\mu - 1}{2} \right) \left[\frac{17}{80\rho} - \frac{3}{8\rho} \left(1 + \frac{2}{\rho} \right) P_1(\mu) \right] \\ \alpha_3 = P^3, \quad \xi_3 = \left(-\frac{r^2}{24} + \frac{r}{12} - \frac{17}{160} + \frac{1}{240r} - \frac{1}{48r^4} - \frac{1}{72r^4} + \frac{1}{120r^5} \right) + \\ + \left(\frac{3r^2}{40} - \frac{r}{8} + \frac{23}{160} + \frac{3}{40r} - \frac{247}{1120r^2} + \frac{11}{320r^3} + \frac{3}{112r^4} + \frac{3}{560r^5} - \right. \\ \left. - \frac{3}{160r^6} + \frac{1}{360r^7} \right) P_1(\mu) + \left(-\frac{r^2}{24} + \frac{r}{24} - \frac{1}{12r} + \frac{5}{48r^2} - \frac{5}{336r^3} - \right. \\ \left. - \frac{1}{48r^4} + \frac{5}{336r^5} \right) P_2(\mu) + \left(\frac{r^2}{120} - \frac{3}{80} + \frac{1}{20r} + \frac{9}{560r^2} - \frac{3}{40r^3} + \right. \\ \left. + \frac{9}{224r^4} + \frac{9}{1120r^5} - \frac{1}{80r^6} + \frac{1}{420r^7} \right) P_3(\mu)$$

Выпишем окончательный результат. Вдали от области идеального смещения (внешнее асимптотическое разложение)

$$(4.14) \quad \xi^* = P\xi^{(1)} + P^2\xi^{(2)} + P^3\xi^{(3)} + O(P^4)$$

В окрестности области идеального смещения

$$(4.15) \quad \xi^* = \xi_0 + P\xi_1 + P^2\xi_2 + P^3\xi_3 + O(P^4)$$

Здесь $\xi^{(n)}$ и ξ_n определяются формулами (4.9) — (4.13).

Число Шервуда для диффузационного потока на область идеального смещения получим в виде

$$(4.16) \quad Sh = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial \xi^*}{\partial r} \right)_{r=1} d\mu = 1 + \frac{P}{2} - \frac{13P^2}{80} + \frac{7P^3}{80} + O(P^4)$$

Зависимость (4.16) показана на фиг. 3 сплошной линией 1.

5. Область применимости результатов. В работе исследован диффузационный поток на пузырь в псевдоожиженнном слое при $u_b > v_0$ в области больших и малых чисел Пекле. При достаточно высоких скоростях начала псевдоожижения в принципе может реализоваться также случай $u_b < v_0$, когда жидкость из внешней по отношению к пузырю области протекает через него. Области с замкнутой циркуляцией, в которой перемешивание можно считать идеальным, в этом случае не образуется.

Для оценки реальных значений отношения v_0 и u_b и чисел Пекле обратимся к результатам экспериментальных исследований.

При анализе опытных данных фильтрационные скорости газа пересчитывались в истинные. Эффективная пористость принималась равной 0.5. В качестве эффективного коэффициента диффузии использовались экспе-

риментальные значения коэффициентов перемешивания в однородных участках псевдоожженного слоя, где скорость газа близка к скорости начала псевдоожжения.

В [12] исследовалась система газ (воздух, CO₂, H₂, He) — твердые частицы (катализатор крекинга, стеклянные шарики). Фильтрационная скорость газа изменялась в пределах 2—100 см/сек, а коэффициенты перемешивания — соответственно 0.4—10 см²/сек. Скорость v_0 и коэффициент диффузии в такой системе, соответствующие скорости начала псевдоожжения, имели величины $v_0 = 40$ см/сек, $D = 5-10$ см²/сек. В этой системе образуются пузыри размером от 1.5 до 3.5 см. Для пузырей $a < 1.5$ см $u_b < v_0$, для пузырей большего размера $u_b > v_0$. При $a < 1.8$ см $P \ll 1$, $a \geq 2.5$ см $P \gg 1$. Большая часть пузырей имеет радиус $a \sim 2.5$ см, так что обычно реализуется случай $P \gg 1$.

В [13] исследовалась система промышленный катализатор крекинга — пары в больших аппаратах (диаметром ~1200 см) при скоростях, близких к началу псевдоожжения, $v_0 = 94$ см/сек.

Измеренный коэффициент диффузии равнялся $D = 1.49 \div 9.7$ см²/сек. В больших аппаратах при использовании крупных частиц с большими скоростями псевдоожжения возникают крупные пузыри $a = 5 \div 20$ см. При $a < 9$ см реализуется режим $u_b > v_0$. При больших размерах пузырей уже при $a \geq 10$ см, $P \gg 1$.

В системе глинозем — воздух (азот) [14] при фильтрационных скоростях газа от 10 до 30 см/сек измеренные значения коэффициентов перемешивания изменились в пределах 154—435 см²/сек. Началу псевдоожжения соответствовала скорость $v_0 = 20$ см/сек. В этой системе

размеры образующихся пузырей были равны $a = 1 \div 3$ см, т. е. всегда реализовался случай $P \ll 1$.

Таким образом, в реальных системах наиболее распространенным является режим $u_b > v_0$, при этом возможны случаи как $P \gg 1$, так и $P \ll 1$, а также промежуточные значения P . Режим $u_b < v_0$ реализуется существенно реже.

Как показано на фиг. 3, полученные для больших и малых чисел Пекле результаты можно экстраполировать на промежуточную область и для всего интервала изменения чисел Пекле представить в виде приближенной формулы

$$Sh = (1 + 2\pi^{-1}P)^{1/2}$$

Поступила 26 II 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Davidson J. F., Harrison D. Fluidised particles. Cambridge, 1963.
2. Jackson R. The mechanics of fluidized beds, pt 1. The stability of the state of uniform fluidization. Pt. 2. The motion of fully developed bubbles. Trans. Instn. Chem. Engrs, London, 1963, vol. 41, p. 13.
3. Murray J. D. On the mathematics of fluidization, pt 2. Steady motion of fully developed bubbles. J. Fluid Mech., 1965, vol. 22, p. 57.
4. Partridge B. A., Rowe P. N. Analysis of gas flow in a bubbling fluidised bed when cloud formation occurs. Trans. Inst. Chem. Engrs, 1966, vol. 44, p. 335.
5. Chiba T., Kobayashi N. Gas exchange between the bubble and emulsion phases in gas — solid fluidized beds. Chem. Engng Sci., 1970, vol. 25, p. 1375.
6. Tool R., Matsuno R. Gas interchange between a bubble and continuous phase in gas — solid fluidized bed. Memoirs of the Faculty of Engineering. Kyoto Univ., 1968, vol. 30, p. 525.

7. Davies L., Richardson J. F. Gas interchange between bubbles and continuous phase in a fluidized bed. Brit. Chem. Engng, 1967, vol. 12, p. 403.
 8. Drinkenberg A. A., Rietema K. Gas transfer from bubbles in a fluidised bet to the dense phase — 1. Theory. Chem. Engng Sci., 1972, vol. 27, p. 1765.
 9. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
 10. Lockett M. J., Harrison D. The distribution of voidage fraction near bubbles rising in gas-fluidised beds. Proc. Internat. Sympos. on Fluidization. Eindhoven, 1967.
 11. Sano T. Heat transfer from a sphere immersed in a stream of an inviscid fluid at small Péclet number. J. Engng Math., 1972, vol. 6, p. 217.
 12. Reman G. H. Effects of gas and solid mixing in fluidized beds on chemical reactions. Chem. and Industr., 1955, vol. 15, No. 3, p. 46.
 13. Askins J. W., Hinds G. P., Kunrenther F. Fluid catalyst — gas mixing in commercial equipment. Chem. Eng. Progr., 1951, vol. 47, p. 401.
 14. Ogasawara S., Kihara M., Nishiyama M., Shirai T., Morikawa K. Back mixing in fluidized beds. Chem. Engng (Japan), 1964, vol. 28, No. 1, p. 59.
-