

УДК 532.526.2

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ В КОСОМ ГАЗОВОМ ПОТОКЕ

Л. И. БОГОВАЯ

(Ленинград)

Рассмотрена задача о ламинарном движении газа в пограничном слое на теле вращения, помещенном под углом атаки. Для решения задачи применен параметрический метод Л. Г. Лойцянского. Влияние внешнего потока и формы обтекаемого тела учтено введением трех рядов параметров. Получена соответствующая система универсальных уравнений, которая численно проинтегрирована в широком диапазоне изменения параметров в различном их сочетании. Результаты расчета позволяют судить об общих закономерностях течения в пограничном слое на теле вращения в косом газовом потоке.

1. Постановка задачи и вывод универсальных уравнений. Рассмотрим трехмерное установившееся ламинарное движение газа в пограничном слое на теле вращения при косом его обтекании и при наличии теплоотдачи с поверхности. Считаем, что никакие физико-химические процессы в газе не происходят, а температура поверхности тела постоянна.

Соответствующие указанной задаче уравнения и граничные условия, записанные в системе ортогональных, криволинейных координат (x, θ, z) , связанной с телом, путем применения обобщенного преобразования Дороницына [1]

$$\bar{x} = x, \quad \bar{\theta} = \theta, \quad \zeta = \int_0^z \frac{\rho}{\rho_1} dz$$

преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
 & u \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} + \frac{w}{R} \frac{\partial u}{\partial \bar{\theta}} + \bar{v} \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{w^2}{R} \frac{dR}{d\bar{x}} = \\
 & = \frac{\rho_e}{\rho} \left(u_e \frac{\partial u_e}{\partial \bar{x}} + \frac{w_e}{R} \frac{\partial u_e}{\partial \bar{\theta}} - \frac{w_e^2}{R} \frac{dR}{d\bar{x}} \right) + \nu_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(N \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \\
 & u \frac{\partial w}{\partial \bar{x}} + \frac{w}{R} \frac{\partial w}{\partial \bar{\theta}} + \bar{v} \frac{\partial w}{\partial \zeta} + \frac{uw}{R} \frac{dR}{d\bar{x}} = \\
 (1.1) \quad & = \frac{\rho_e}{\rho} \left(u_e \frac{\partial w_e}{\partial \bar{x}} + \frac{w_e}{R} \frac{\partial w_e}{\partial \bar{\theta}} + \frac{u_e w_e}{R} \frac{dR}{d\bar{x}} \right) + \nu_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(N \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) \\
 & u \frac{\partial S}{\partial \bar{x}} + \frac{w}{R} \frac{\partial S}{\partial \bar{\theta}} + \bar{v} \frac{\partial S}{\partial \zeta} = \nu_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{N}{Pr} \frac{\partial S}{\partial \zeta} \right) + \\
 & + \frac{\nu_1}{2h_1} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{Pr-1}{Pr} N \frac{\partial}{\partial \zeta} (u^2 + w^2) \right] \\
 & \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (uR) + \frac{\partial w}{\partial \bar{\theta}} + R \frac{\partial \bar{v}}{\partial \zeta} = 0, \quad p = \frac{k-1}{k} \rho h, \quad \frac{\mu}{\mu_1} = \left(\frac{T}{T_1} \right)^{0.76}
 \end{aligned}$$

$$\bar{v} = u \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{w}{R} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + v \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad N = \frac{\mu \rho}{\mu_1 \rho_1}, \quad S = \left(\frac{h_0}{h_1} - 1 \right)$$

$$u = w = v = 0, \quad S = S_w$$

$$u \rightarrow u_e, \quad w \rightarrow w_e, \quad S \rightarrow 0$$

Здесь u, w, v — проекции вектора скорости в пограничном слое на оси x, θ, z соответственно, $R = R(x)$ — расстояние от точки на поверхности тела до его оси, остальные обозначения общеприняты. Индексы $e, 1, w$ относятся к внешнему потоку, к условиям адиабатически и изэнтропически заторможенного внешнего потока и к условиям на стенке.

Для решения полученной системы уравнений применим параметрический метод [2, 3], обобщенный на случай пространственного пограничного слоя в несжимаемой жидкости [4]. Основная идея этого метода заключается в переводе параметров ламинарного пограничного слоя в число независимых переменных, что позволяет получить уравнения в «универсальном» виде, одинаковом для всех частных заданий распределения скорости на внешней границе пограничного слоя. Универсальность позволяет произвести в том или ином приближении численное интегрирование раз и навсегда с последующим табулированием основных, характерных для пограничного слоя величин. При наличии такого рода таблиц можно сравнительно просто производить расчет характеристик пограничного слоя для конкретного внешнего потока.

Следуя идее метода Л. Г. Лойцянского, введем новую переменную $\eta = B\xi / m(\bar{x}, \bar{\theta})$, где B — некоторый нормирующий множитель, $m(\bar{x}, \bar{\theta})$ — масштаб координаты ξ . Профили скоростей в пограничном слое представим следующим образом:

$$u = u_e \frac{\partial \Phi_1(\bar{x}, \bar{\theta}, \eta)}{\partial \eta}, \quad w = w_e \frac{\partial \Phi_2(\bar{x}, \bar{\theta}, \eta)}{\partial \eta}$$

Тогда, воспользовавшись еще уравнением неразрывности, преобразуем систему уравнений (1.1) к виду

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \eta} \left(N \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} \right) + \frac{f_{10}^{[1]}}{B^2} \left[\frac{\rho_e}{\rho} - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{\sigma f_{01}^{[1]}}{B^2} \left[\frac{\rho_e}{\rho} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right] - \\ & - \frac{\sigma^2 f_{10}^{[2]}}{B^2} \left[\frac{\rho_e}{\rho} - \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{f_{10}^{[1]} + f_{10}^{[2]}}{B^2} \Phi_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} + \frac{f_{01}^{[3]}}{B^2} \Phi_2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} + \\ & + \frac{u_e}{2B^2} \frac{\partial k}{\partial \bar{x}} \Phi_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2B^2} \frac{w_e}{R} \frac{\partial k}{\partial \bar{\theta}} \Phi_2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} = \\ & = \frac{u_e k}{B^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \bar{x} \partial \eta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \bar{x}} \right) + \right. \\ & + \left. \frac{\sigma}{R} \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \bar{\theta} \partial \eta} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{\theta}} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \eta} \left(N \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} \right) + \\ & + \frac{f_{01}^{[3]}}{B^2} \left[\frac{\rho_e}{\rho} - \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{f_{10}^{[2]} + f_{10}^{[3]}/\sigma}{B^2} \left[\frac{\rho_e}{\rho} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right] + \\ & + \frac{f_{10}^{[1]} + f_{10}^{[2]}}{B^2} \Phi_1 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} + \frac{f_{01}^{[3]}}{B^2} \Phi_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} + \frac{u_e}{2B^2} \frac{\partial k}{\partial \bar{x}} \Phi_1 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2B^2} \frac{w_e}{R} \frac{\partial k}{\partial \theta} \Phi_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} = \frac{u_e k}{B^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \bar{x}} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{\sigma}{R} \left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \bar{\theta}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \bar{\theta}} \right) \right] \\
 (1.2) \quad & \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{N}{Pr} \frac{\partial S}{\partial \eta} \right) + 2f_{00}^{[1]} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{Pr-1}{Pr} N \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sigma^2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} \right) \right] + \frac{f_{10}^{[1]} + f_{10}^{[2]}}{B^2} \Phi_1 \frac{\partial S}{\partial \eta} + \frac{f_{01}^{[3]}}{B^2} \Phi_2 \frac{\partial S}{\partial \eta} + \\
 & + \frac{u_e}{2B^2} \frac{\partial k}{\partial \bar{x}} \Phi_1 \frac{\partial S}{\partial \eta} + \frac{1}{2B^2} \frac{w_e}{R} \frac{\partial k}{\partial \bar{\theta}} \Phi_2 \frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{u_e k}{B^2} \left[\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial S}{\partial \bar{x}} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\partial S}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\sigma}{R} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \frac{\partial S}{\partial \bar{\theta}} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{\theta}} \frac{\partial S}{\partial \eta} \right) \right] \\
 & p = \frac{k-1}{k} \rho h, \quad \frac{\mu}{\mu_1} = \left(\frac{T}{T_1} \right)^{0.76}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1.3) \quad & k = \frac{m^2}{v_1}, \quad f_{10}^{[1]} = \frac{\partial u_e}{\partial \bar{x}} k, \quad f_{01}^{[1]} = \frac{1}{R} \frac{\partial u_e}{\partial \bar{\theta}} k, \quad f_{00}^{[1]} = \frac{u_e^2}{2h_1} \\
 & f_{10}^{[2]} = \frac{u_e}{R} \frac{dR}{dx} k, \quad \sigma = f_{00}^{[3]} = \frac{w_e}{u_e}, \quad f_{10}^{[3]} = \frac{\partial w_e}{\partial \bar{x}} k, \quad f_{01}^{[3]} = \frac{1}{R} \frac{\partial w_e}{\partial \bar{\theta}} k
 \end{aligned}$$

Комплексы (1.3), зависящие от скоростей внешнего потока, их производных, от формы тела и полной энтальпии внешнего потока, положим в основу построения рядов параметров

$$\begin{aligned}
 f_{ni}^{[1]} &= \frac{u_e^{n+i-1}}{R^i} \frac{\partial^{n+i} u_e}{\partial \bar{x}^n \partial \bar{\theta}^i} k^{n+i}, & f_{00}^{[1]} &= \frac{u_e^2}{2h_1} \\
 f_{ni}^{[2]} &= \frac{u_e^{n+i}}{R^{i+1}} \frac{\partial^{n+i} R}{\partial \bar{x}^n \partial \bar{\theta}^i} k^{n+i} \\
 f_{ni}^{[3]} &= \frac{u_e^{n+i-1}}{R^i} \frac{\partial^{n+i} w_e}{\partial \bar{x}^n \partial \bar{\theta}^i} k^{n+i} \quad \left(\begin{array}{l} n = 0, 1, 2, \dots \\ i = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Параметры $f_{ni}^{[1]}$, $f_{ni}^{[3]}$ характеризуют влияние продольного и поперечного распределения скоростей во внешнем потоке, параметр $f_{00}^{[1]}$ — влияние сжимаемости, параметры $f_{ni}^{[2]}$ учитывают влияние формы обтекаемой поверхности. Заметим, что для рассматриваемой задачи о ламинарном пограничном слое на теле вращения все параметры $f_{ni}^{[2]}$ при $i \neq 0$ равны нулю.

Для определения производных $\partial k / \partial \bar{x}$ и $\partial k / \partial \bar{\theta}$ воспользуемся интегральными уравнениями импульсов для продольного и поперечного течений, которые можно получить с помощью обычных преобразований теории пограничного слоя из уравнений движения и уравнения неразрывности системы (1.1). Эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} (u_e^2 \delta_{11}^{**}) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} (u_e w_e \delta_{21}^{**}) + u_e \frac{\partial u_e}{\partial \bar{x}} \delta_{11}^* + \frac{w_e}{R} \frac{\partial u_e}{\partial \bar{\theta}} \delta_{21}^* +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{u_e}{R} \frac{dR}{dx} \delta_{11}^{**} - \frac{w_e^2}{R} \frac{dR}{dx} (\delta_2^* + \delta_{22}^{**}) = \nu_1 N_w \frac{\partial u}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \\
 & \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (u_e w_e \delta_{12}^{**}) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} (w_e^2 \delta_{22}^{**}) + \frac{u_e w_e}{R} \frac{dR}{d\bar{x}} \delta_{12}^{**} + u_e \frac{\partial w_e}{\partial \bar{x}} \delta_1^* + \\
 (1.4) \quad & + \frac{w_e}{R} \frac{\partial w_e}{\partial \bar{\theta}} \delta_2^* + \frac{u_e w_e}{R} \frac{dR}{d\bar{x}} (\delta_1^* + \delta_{12}^{**}) = \nu_1 N_w \frac{\partial w}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \\
 & \delta_{11}^{**} = \int_0^\infty \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) d\zeta, \quad \delta_{12}^{**} = \int_0^\infty \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{w}{w_e}\right) d\zeta, \\
 & \delta_{21}^{**} = \int_0^\infty \frac{w}{w_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) d\zeta \\
 & \delta_{22}^{**} = \int_0^\infty \frac{w}{w_e} \left(1 - \frac{w}{w_e}\right) d\zeta, \quad \delta_1^* = \int_0^\infty \left(\frac{\rho_e}{\rho} - \frac{u}{u_e}\right) d\zeta, \\
 & \delta_2^* = \int_0^\infty \left(\frac{\rho_e}{\rho} - \frac{w}{w_e}\right) d\zeta
 \end{aligned}$$

Выбирая масштаб $m(\bar{x}, \bar{\theta})$ аналогично тому, как это сделано в [5], и используя (1.4), получим следующие выражения для производных $\partial k / \partial \bar{x}$ и $\partial k / \partial \bar{\theta}$:

$$(1.5) \quad u_e \frac{\partial k}{\partial \bar{x}} = F_1, \quad \frac{w_e}{R} \frac{\partial k}{\partial \bar{\theta}} = F_2$$

$$F_1 = 2\{N_w \zeta_1 - f_{10}^{[1]}(2 + H_1) + f_{10}^{[2]}[\sigma^2(H_2 + H_{22}) - H_{11}] - \sigma f_{01}^{[1]} H_2\}$$

$$F_2 = -2f_{01}^{[3]}(2 + H_2)$$

$$H_1 = \frac{\delta_1^*}{m}, \quad H_2 = \frac{\delta_2^*}{m}, \quad H_{22} = \frac{\delta_{22}^{**}}{m}, \quad H_{11} = \frac{\delta_{11}^{**}}{m},$$

$$\zeta_1 = \frac{\partial(u/u_e)}{\partial(\zeta/m)} \Big|_{\zeta=0}$$

Перейдем в правых частях уравнений (1.2) от производных по \bar{x} и $\bar{\theta}$ к производным по параметрам $f_{ni}^{[r]}$ ($r = 1, 2, 3$) согласно формулам перехода

$$(1.6) \quad u_e k \frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \sum_{r=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial f_{ni}^{[r]}} \theta_{n+i,i}^{[r]} \right)$$

$$\frac{w_e}{R} k \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} = \sum_{r=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial f_{ni}^{[r]}} \theta_{n,i+i}^{[r]} \right)$$

$$\theta_{n+i,i}^{[r]} = L_{n+i,i}^{[r]} + (n+i) f_{ni}^{[r]} F_1 \quad (r = 1, 2, 3), \quad \theta_{1,0}^{[1]} = 2f_{00}^{[1]} f_{10}^{[1]}$$

$$\theta_{n,i+i}^{[r]} = L_{n,i+i}^{[r]} + (n+i) f_{ni}^{[r]} F_2 \quad (r = 1, 2, 3), \quad \theta_{0,i}^{[1]} = 2\sigma f_{00}^{[1]} f_{01}^{[1]}$$

$$L_{n+1,i}^{[r]} = f_{n+1,i}^{[r]} + a_{i0}^{[r]} f_{ni}^{[r]}, \quad L_{n,i+1}^{[r]} = \sigma f_{n,i+1}^{[r]} + \sigma a_{0i}^{[r]} f_{ni}^{[r]}$$

$$a_{i0}^{[r]} = (n+i) f_{i0}^{[1]} - i f_{i0}^{[2]} - f_{i0}^{[r]} \quad (r=1,2)$$

$$a_{0i}^{[r]} = (n+i) f_{0i}^{[1]} - i f_{0i}^{[2]} - f_{0i}^{[r]} \quad (r=1,2)$$

$$a_{i0}^{[3]} = a_{i0}^{[1]}, \quad a_{0i}^{[3]} = a_{0i}^{[1]} \quad (r=3)$$

Тогда, воспользовавшись еще соотношениями (1.5), получим универсальные уравнения пограничного слоя

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \eta} \left(N \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} \right) + \frac{f_{i0}^{[1]}}{B^2} \left[\frac{\rho_e}{\rho} - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{\sigma f_{0i}^{[1]}}{B^2} \left[\frac{\rho_e}{\rho} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right] - \frac{\sigma^2 f_{i0}^{[2]}}{B^2} \left[\frac{\rho_e}{\rho} - \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{2f_{i0}^{[1]} + 2f_{i0}^{[2]} + F_1}{2B^2} \Phi_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} + \frac{2f_{0i}^{[3]} + F_2}{2B^2} \Phi_2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} = \\ & = \frac{1}{B^2} \sum_{r=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial f_{ni}^{[r]}}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial f_{ni}^{[r]}} \right) \theta_{n+1,i}^{[r]} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_2}{\partial f_{ni}^{[r]}} - \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial f_{ni}^{[r]}} \right) \theta_{n,i+1}^{[r]} \right] \\ & \frac{\partial}{\partial \eta} \left(N \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} \right) + \frac{f_{0i}^{[3]}}{B^2} \left[\frac{\rho_e}{\rho} - \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{f_{i0}^{[2]} + f_{i0}^{[3]}/\sigma}{B^2} \left[\frac{\rho_e}{\rho} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right] + \frac{2f_{i0}^{[1]} + 2f_{i0}^{[2]} + F_1}{2B^2} \Phi_1 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} + \\ & + \frac{2f_{0i}^{[3]} + F_2}{2B^2} \Phi_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} = \\ (1.7) \quad & = \frac{1}{B^2} \sum_{r=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial f_{ni}^{[r]}} - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial f_{ni}^{[r]}} \right) \theta_{n+1,i}^{[r]} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_2}{\partial f_{ni}^{[r]}} - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial f_{ni}^{[r]}} \right) \theta_{n,i+1}^{[r]} \right] \\ & \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{N}{Pr} \frac{\partial S}{\partial \eta} \right) + 2f_{00}^{[1]} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{Pr-1}{Pr} N \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sigma^2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} \right) \right] + \frac{2f_{0i}^{[3]} + F_2}{2B^2} \Phi_2 \frac{\partial S}{\partial \eta} + \frac{2f_{i0}^{[1]} + 2f_{i0}^{[2]} + F_1}{2B^2} \Phi_1 \frac{\partial S}{\partial \eta} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{B^2} \sum_{r=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial S}{\partial f_{ni}^{[r]}} - \frac{\partial S}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial f_{ni}^{[r]}} \right) \theta_{n+i,t}^{[r]} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \frac{\partial S}{\partial f_{ni}^{[r]}} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial f_{ni}^{[r]}} \frac{\partial S}{\partial \eta} \right) \theta_{n,i+1}^{[r]} \right]$$

$$p = (k-1)k^{-1}\rho h, \quad \mu / \mu_1 = (T/T_1)^{0.76}$$

Граничные условия

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \partial \Phi_1 / \partial \eta = \partial \Phi_2 / \partial \eta = 0, \quad S = S_w \quad (\eta = 0)$$

$$\partial \Phi_1 / \partial \eta \rightarrow 1, \quad \partial \Phi_2 / \partial \eta \rightarrow 1, \quad S \rightarrow 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

$$\Phi_1 = \Phi^{(0)}(\eta), \quad \Phi_2 = \Phi^{(0)}(\eta), \quad S = S^{(0)}(\eta) \quad (f_{ni}^{[r]} = 0)$$

Входящие в систему универсальных уравнений функции ρ_e / ρ , N и число Прандтля зависят от термодинамических свойств газа. Для численных расчетов представим эти функции в виде следующих аналитических выражений:

$$(1.8) \quad \rho_e / \rho = Q / \alpha, \quad N = \alpha Q^{-0.24} = \alpha G, \quad \text{Pr} = 0.72$$

$$\alpha = 1 - f_{00}^{[1]} (1 + \sigma^2), \quad Q = 1 + S - f_{00}^{[1]} \left[\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right)^2 + \sigma^2 \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right)^2 \right]$$

2. Метод численного интегрирования универсальных уравнений. При наличии бесконечного числа параметров систему универсальных уравнений проинтегрировать не представляется возможным. Поэтому ограничились случаем локально-параметрического приближения с сохранением конечного числа параметров, а именно

$$f_{01}^{[1]} = x, \quad f_{10}^{[1]} = f_{10}, \quad f_{01}^{[1]} = t, \quad f_{10}^{[2]} = q, \quad f_{01}^{[3]} = l, \quad f_{10}^{[3]} / \sigma = g$$

Кроме того, предположили, что все $\partial(\dots) / \partial f_{ni}^{[r]} = 0$, за исключением $\partial(\dots) / \partial f_{10}$. Универсальные уравнения в этом случае принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha^{3.5} G \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} \right) + \frac{f_{10}}{B^2} \left[\frac{Q}{\alpha} - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{\sigma t}{B^2} \left[\frac{Q}{\alpha} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right] - \\ - \frac{\sigma^2 q}{B^2} \left[\frac{Q}{\alpha} - \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{2f_{10} + 2q + F_1}{2B^2} \Phi_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} + \frac{2l + F_2}{2B^2} \Phi_2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} = \\ = \frac{f_{10}}{B^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta \partial f_{10}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial f_{10}} \right) F_1 + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta \partial f_{10}} - \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial f_{10}} \right) F_2 \right] \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha^{3.5} G \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} \right) + \frac{l}{B^2} \left[\frac{Q}{\alpha} - \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{q + g}{B^2} \left[\frac{Q}{\alpha} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \right] + \\ + \frac{2f_{10} + 2q + F_1}{2B^2} \Phi_1 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} + \frac{2l + F_2}{2B^2} \Phi_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} = \\ = \frac{f_{10}}{B^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta \partial f_{10}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial f_{10}} \right) F_1 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta \partial f_{10}} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial f_{10}} \right) F_2 \right] \\ \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\alpha^{3.5} G \frac{\partial S}{\partial \eta} \right) + \frac{\text{Pr} - 1}{\text{Pr}} 2x \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\alpha^{3.5} G \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} + \right. \right.$$

$$(2.1) \quad \begin{aligned} & + \sigma^2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \eta^2} \Big) \Big] + \frac{2f_{10} + 2q + F_1}{2B^2} \Phi_1 \frac{\partial S}{\partial \eta} + \frac{2l + F_2}{2B^2} \Phi_2 \frac{\partial S}{\partial \eta} = \\ & = \frac{f_{10}}{B^2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial f_{10}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} - \frac{\partial S}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial f_{10}} \right) F_1 + \left(\frac{\partial S}{\partial f_{10}} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} - \frac{\partial S}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_2}{\partial f_{10}} \right) F_2 \right] \end{aligned}$$

Граничные условия

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} = 0, \quad S = S_w \quad (\eta=0)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \rightarrow 1, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} \rightarrow 1, \quad S \rightarrow 0 \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

$$\Phi_1 = \Phi_1^{(0)}(\eta, t, g, q, l, \kappa, \sigma, S_w), \quad \Phi_2 = \Phi_2^{(0)}(\eta, t, g, q, l, \kappa, \sigma, S_w)$$

$$S = S^{(0)}(\eta, t, g, q, l, \kappa, \sigma, S_w) \quad (f_{10}=0)$$

При этом $\Phi_1^{(0)}$, $\Phi_2^{(0)}$, $S^{(0)}$ удовлетворяют уравнениям и граничным условиям, получающимся из системы (2.1), если в последней положить $f_{10} = 0$.

Система (2.1) была численно проинтегрирована на ЭЦВМ М-220М. Уравнения системы (2.1) аппроксимировались по неявной, двухслойной, четырехточечной схеме, в результате чего была получена система трех нелинейных разностных уравнений. На каждом шаге по параметру f_{10} эта система решалась методом прогонки с итерациями. Промежуток интегрирования по η был ограничен ($0 \leq \eta \leq \eta_\infty$, $\eta_\infty = 6 \div 8$), шаг по переменной η равнялся 0.05.

Шаг по параметру f_{10} , как правило, был равен 0.005. Но в области вблизи точек отрыва ($\zeta_1 = 0$) и в области, где функция F_1 близка к нулю, шаг по параметру f_{10} уменьшался.

Процесс итераций прекращался после того, как максимальная разность значений искомых функций в двух последовательных приближениях становилась меньше $0.1 \cdot 10^{-5}$.

3. Результаты расчетов. Система уравнений (2.1) была проинтегрирована в широком диапазоне изменения основных параметров в различных их сочетаниях. Параметр f_{10} изменялся в промежутке от значений, соответствующих точкам отрыва, до значений, соответствующих $F_1 = 0$. Остальные параметры изменялись в следующих пределах:

$$\begin{aligned} -0.15 \leq q \leq 0.2, \quad -0.02 \leq l \leq 0.02, \quad 0 \leq \kappa \leq 0.8, \\ -0.2 \leq \sigma \leq 0.4, \quad S_w = 0.0, 0.4, -0.4, \quad t = 0.1, 0.005, \\ g = 0.1, 0.015 \end{aligned}$$

В результате численного интегрирования системы универсальных уравнений были определены поля скоростей, тепловой функции S , комплексов ρ_e / ρ и N , а также гидродинамические и тепловые характеристики пограничного слоя $-F_1$, F_2 , ζ_1 , ζ_2 , H_1 , H_2 , H_{11} , H_{12} , H_{21} , H_{22} , ζ_T , ζ_T^* . Расчет тепловых характеристик производился по формулам

$$\zeta_T = B \frac{\partial S}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0}, \quad \zeta_T^* = \zeta_T \frac{1}{B} \int_0^\infty \varphi S d\eta \quad \left(\varphi = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right)$$

Кроме того, в ходе интегрирования определялись тепловые параметры и число Маха на внешней границе пограничного слоя

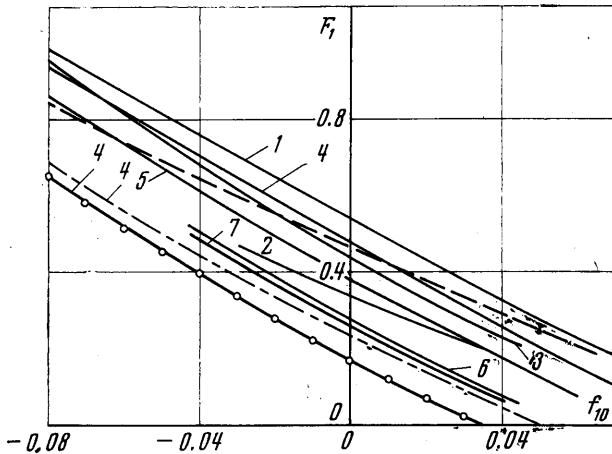
$$f_{10T} = f_{10} \left[\frac{1}{B} \int_0^\infty \varphi S d\eta \right]^2, \quad q_T = q \left[\frac{1}{B} \int_0^\infty \varphi S d\eta \right]^2,$$

$$l_T = l \left[\frac{1}{B} \int_0^{\infty} \varphi S d\eta \right]^2$$

$$t_T = t \left[\frac{1}{B} \int_0^{\infty} \varphi S d\eta \right]^2, \quad g_T = g \left[\frac{1}{B} \int_0^{\infty} \varphi S d\eta \right]^2,$$

$$M_e = \sqrt{\frac{\kappa(1 + \sigma^2)}{1/2(k-1)[1 - \kappa(1 + \sigma^2)]}}$$

На фиг. 1—3 представлены зависимости необходимой для расчета конкретной задачи функции F_1 , безразмерного коэффициента трения ζ_1 и приведенного теплового потока на стенке ξ_T от параметра f_{10} .



Фиг. 1

На этих фигурах сплошные линии соответствуют значению $S_w = 0.0$, $\kappa = 0$; штриховые — $S_w = -0.4$, $\kappa = 0.0$; штрихпунктирные — $S_w = -0.4$, $\kappa = 0.2$; штриховые с крестиком — $S_w = -0.4$, $\kappa = 0.3$. Все кривые, за исключением кривых 3 ($q = -0.05$), соответствуют значению параметра $q = 0.05$. Кривые 1—5, 8—13 получены для значений $t = g = 0.1$, кривые 6 — для $t = 0.005$, $g = 0.1$, кривые 7 — для $t = 0.005$, $g = 0.015$. Значениям параметра $\sigma = 0.4$ и параметра $l = 0.02$, 0.02 соответствуют кривые 1, 2. Кривые 3 получены для значений $\sigma = 0.4$ и $l = 0.02$, 4 — для $l = 0.02$, $\sigma = 0.0$; кривые 5—7 — для $l = 0.005$, $\sigma = 0.2$; кривые 8, 10, 12 — для $\sigma = 0.0$, а 9, 11, 13 — для $\sigma = 0.2$ при $l = 0.01, -0.01, -0.02$.

Приведенные результаты расчета позволяют выявить влияние параметров задачи на основные характеристики пограничного слоя. Относительно функции F_1 (фиг. 1) можно заметить, что во всей области пограничного слоя она монотонно изменяется, не слишком отличаясь от прямой линии. Это свойство зависимости $F_1(f_{10})$ может быть использовано при расчете конкретной задачи.

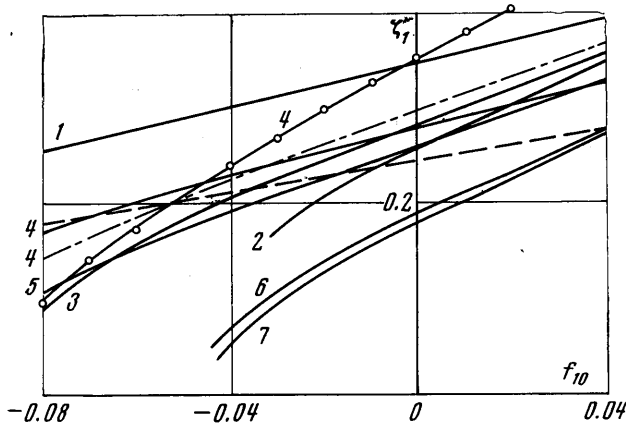
На фиг. 2 представлена зависимость коэффициента трения ζ_1 от параметра f_{10} . Видно, что при увеличении параметров σ , t , g и при уменьшении параметров q , l , κ , а также значения S_w отрыв пограничного слоя затягивается. Отмеченное выше влияние параметров σ , t , q на значение f_{10}^* , соответствующее отрыву, объясняется следующим образом.

«Усеченные» [6] уравнения Эйлера для рассматриваемой задачи могут быть переписаны в виде

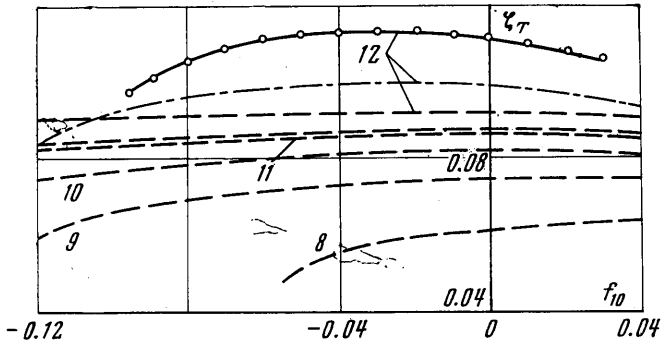
$$(3.1) \quad -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} k = u_e (f_{10}^* + \sigma t - \sigma^2 q)$$

$$(3.2) \quad -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p}{\partial \bar{\theta}} k = w_e (g + l + q)$$

Из соотношения (3.1) видно, что увеличение σ ($\sigma > 0$) и t затягивает, а увеличение q , $|\sigma|$ ускоряет отрыв пограничного слоя. Влияние параметров l и g на характеристики пограничного слоя, в частности на отрыв, с помощью (3.1) оценить не представляется возможным.



Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 3 представлен график зависимости приведенного теплового потока на стенке ζ_T от параметра f_{10} . Наибольшие изменения эта функция претерпевает вблизи отрыва пограничного слоя. С увеличением параметров σ и χ и с уменьшением параметра l значения ζ_T увеличиваются.

Соотношение (3.2) позволяет оценить значение параметров g , l и q , при которых в пограничном слое наблюдаются профили либо с отрицательными трансверсальными скоростями, либо со скоростями, превышающими скорость внешнего потока [5].

Поступила 18 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Дородницын А. А. Пограничный слой в сжимаемом газе. ПММ, 1942, т. 6, вып. 6.
 2. Лойцянский Л. Г. Универсальные уравнения и параметрические приближения в теории ламинарного пограничного слоя. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
 3. Лойцянский Л. Г. Универсальные уравнения теории ламинарного пограничного слоя. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1967, № 280.
 4. Богданова В. В. Универсальные уравнения теории пространственного пограничного слоя. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 6.
 5. Богданова В. В. Универсальные уравнения ламинарного пограничного слоя на вращающемся крыле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 2.
 6. Богданова В. В. Осесимметричный ламинарный пограничный слой в закрученном потоке. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1965, № 248.
-