

УДК 532.2:532.6

## ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ РАВНОВЕСНОГО СОСТОЯНИЯ КАПИЛЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ В СОСУДЕ

Л. А. СЛОБОЖАНИН, А. Д. ТЮЦОВ

(Харьков)

В статье изложена методика, позволяющая определить форму равновесной поверхности жидкости, которая реализуется в заданном сосуде произвольной осесимметричной формы. На жидкость действуют капиллярные, гравитационные и центробежные силы. Объем жидкости и угол смачивания заданы.

Для случая отрицательных перегрузок однородного гравитационного поля построены графики, которые используются для нахождения равновесных состояний. Рассмотрен пример, иллюстрирующий применение изложенной методики.

**1. Постановка задачи.** Пусть некоторый осесимметричный сосуд частично заполнен однородной жидкостью, которая имеет плотность  $\rho$  и занимает объем  $v$  (фиг. 1). Остальная часть сосуда заполнена газом, плотность которого пренебрежимо мала. Предположим, что на жидкость действуют силы тяжести, характеризующиеся ускорением  $ng$  ( $g = 9.81 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-2}$ ,  $n$  — коэффициент перегрузки), и центробежные силы, возникающие при вращении сосуда с постоянной угловой скоростью  $\omega$  (направление сил тяжести и оси вращения совпадают с осью симметрии сосуда). Кроме того, будем учитывать и капиллярные силы, которые характеризуются коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$  на свободной поверхности жидкости и углом смачивания  $\alpha$  на линии пересечения этой поверхности со стенкой сосуда.

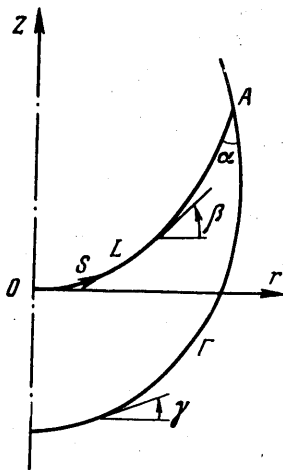
Задача состоит в нахождении формы, которую принимает поверхность жидкости в равновесном состоянии под действием указанных сил. Поверхность предполагается осесимметричной и односвязной (пересекающей ось симметрии).

**2. Условия равновесия.** Введем цилиндрическую систему координат  $r, \theta, z$ . Ось  $z$  совместим с осью симметрии сосуда и направим так, чтобы в начале координат, которое выберем совпадающим с точкой пересечения оси со свободной поверхностью, жидкость находилась ниже этой поверхности.

Поскольку задача обладает осевой симметрией, то все дальнейшие рассуждения удобно вести в полуплоскости  $\theta = \text{const}$ . Линии пересечения этой полуплоскости с поверхностью сосуда и с искомой равновесной поверхностью обозначим соответственно через  $\Gamma$  и  $L$ .

Пусть  $\beta$  и  $\gamma$  — углы наклона касательных в точках, лежащих на линиях  $L$  и  $\Gamma$  (фиг. 1). Введем следующие криволинейные интегралы:

$$v_1 = \pi \int_L r^2 dz, \quad v_2 = \pi \int_{\Gamma} r^2 dz$$



Фиг. 1

Здесь  $\Gamma_1$  — смоченная часть  $\Gamma$ , а направление обхода линий  $L$  и  $\Gamma_1$  выбрано так, чтобы точка их пересечения  $A$  была конечной.

В точке  $A$  должны выполняться условия

$$(2.1) \quad \beta = \gamma - \alpha, \quad v_1 = v_2 - v$$

Первое из них означает, что свободная поверхность жидкости пересекает стенку сосуда под углом, равным заданному углу смачивания  $\alpha$ , а второе — что объем жидкости равен заданному значению  $v$ .

Пусть  $s$  — длина дуги, отсчитываемая вдоль равновесной линии  $L$  от начала координат. Тогда на этой линии функции  $r(s)$  и  $z(s)$  должны быть решениями системы дифференциальных уравнений [1]

$$(2.2) \quad r'' = -z'(bz - pr^2 + c - z'/r), \quad z'' = r'(bz - pr^2 + c - z'/r)$$

с начальными условиями

$$(2.3) \quad r(0) = 0, \quad r'(0) = 1, \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = 0$$

Здесь  $b = \rho n g / \sigma$ , коэффициент перегрузки  $n$  считаем положительным, если сила тяжести направлена вниз по оси  $z$ , и отрицательным, если сила тяжести направлена вверх;  $p = \rho \omega^2 / 2\sigma$ ;  $c$  — параметр, значение которого заранее неизвестно.

При заданных  $b$  и  $p$  интегральные кривые задачи (2.2), (2.3) образуют однопараметрическое семейство (относительно  $c$ ). Искомую равновесную линию  $L$  можно рассматривать как лежащий внутри сосуда участок некоторой интегральной кривой, в конечной точке которого выполняются условия (2.1).

**3. Определение равновесной линии по заданным  $\alpha$  и  $v$ .** При заданном значении  $c$  на соответствующей интегральной линии совокупность пар  $\beta(s), r(s)$  образует непрерывную кривую в плоскости  $r\beta$ . На этой кривой  $\beta$  не всегда является однозначной функцией от  $r$ . Однако условно будем считать, что совокупность таких кривых описывается некоторой функцией  $\beta(c, r)$ . Аналогично введем функции  $v_1(c, r)$ ,  $\gamma(r)$  и  $v_2(r)$ . Тогда условия (2.1), можно рассматривать, как уравнения относительно значений параметра  $c = c_L$  для искомой равновесной линии  $L$  и координаты  $r = r_A$  в точке  $A$

$$(3.1) \quad \beta(c_L, r_A) = \gamma(r_A) - \alpha, \quad v_1(c_L, r_A) = v_2(r_A) - v$$

Эти уравнения можно решать графически. Один из возможных вариантов такого решения состоит в следующем. Интегрируя численно систему (2.2) с начальными условиями (2.3) для разных значений  $c$ , построим достаточно подробное семейство графиков  $\beta(c, r)$  и  $v_1(c, r)$ . На семейство  $\beta(c, r)$  нанесем зависимость  $\gamma(r) - \alpha$ , выполненную в том же масштабе. Найдем значения  $c$  и  $r$  в точках пересечения линии  $\gamma(r) - \alpha$  с кривыми  $\beta(c, r)$ . По полученным данным построим график  $c(r)$ , на котором выполняется первое из равенств (3.1). Поступая аналогично с семейством  $v_1(c, r)$  и зависимостью  $v_2(r) - v$ , построим другую кривую  $c(r)$ , на которой будет выполняться второе из равенств (3.1). Точки пересечения двух построенных кривых  $c(r)$  определяют решения  $(r_A, c_L)$  системы (3.1). Каждому такому решению может соответствовать некоторая равновесная линия.

Пусть  $(r_A, c_L)$  — одно из решений (3.1). Опишем для него процесс построения линии  $L$ . Предварительно заметим, что на интегральной кривой для  $c = c_L$  функция  $r(s)$  может не быть монотонной. Поэтому условия  $r = r_A$  недостаточно для определения положения точки  $A$  на этой кривой. Кроме того, на линии  $\Gamma$  функция  $z(r)$  может не быть однозначной, а по-

тому условие  $r = r_A$  не определяет и положения точки  $A$  на сосуде. Для получения дополнительной информации поступим следующим образом. Кривую  $\Gamma$  разобьем на участки монотонности  $r$ . Это порождает соответствующее разбиение кривых  $\gamma(r) - \alpha$ ,  $v_2(r) - v$  и  $c(r)$ , а также взаимно однозначное соответствие между участками всех этих кривых. Линии  $c(r)$  могут пересекаться лишь в соответствующих друг другу участках. Определим, на каком из участков лежит точка  $(r_A, c_L)$ . Затем найдем соответствующие участки кривых  $\Gamma$ ,  $\gamma(r) - \alpha$  и  $v_2(r) - v$ , а на них — положение точки  $A$  и значения  $\gamma(r_A) - \alpha = \beta_A$  и  $v_2(r_A) - v = v_{1A}$ .

Теперь можно построить равновесную линию  $L$ . Для этого нужно провести численное интегрирование системы (2.2) с начальными условиями (2.3) при  $c = c_L$ . Интегрирование необходимо кончить при выполнении условий  $r = r_A$  и  $\beta(c_L, r) = \beta_A$  (или  $v_1(c_L, r) = v_{1A}$ ), которые определяют положение конечной точки  $A$  на линии  $L$ . Так как положение точки  $A$  на кривой  $\Gamma$  определено, то известно и расположение линии  $L$  в сосуде. После этого остается убедиться, что построенная кривая  $L$  целиком лежит внутри сосуда.

Отметим, что здесь не затрагивался вопрос об устойчивости. Так что найденные равновесные состояния могут оказаться и неустойчивыми.

**4. Отрицательные перегрузки гравитационного поля.** Рассмотрим конкретно случай, когда центробежные силы отсутствуют ( $p = 0$ ), а коэффициент перегрузки однородного гравитационного поля отрицательный. Вводя безразмерные величины

$$(4.1) \quad R = |b|^{1/2} r, \quad Z = |b|^{1/2} z, \quad S = |b|^{1/2} s, \quad C = |b|^{-1/2} c, \quad V = |b|^{1/2} v$$

перепишем систему (2.2) с начальными условиями (2.3) в виде

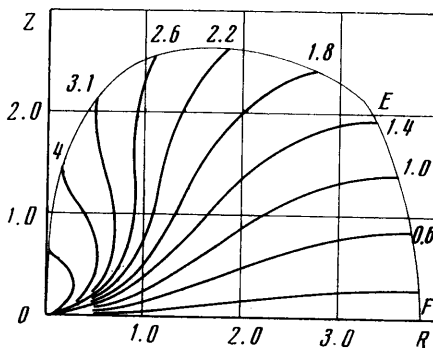
$$(4.2) \quad R'' = -Z'(-Z + C - Z'/R), \quad Z'' = R'(-Z + C - Z'/R)$$

$$(4.3) \quad R(0) = 0, \quad R'(0) = 1, \quad Z(0) = 0, \quad Z'(0) = 0$$

Теперь система (4.2) содержит только один параметр  $C$ .

Интегральные кривые задачи (4.2), (4.3) достаточно подробно изучены в работах [1, 2]. На фиг. 2 для этих кривых (при  $C \geq 0$ ) воспроизведены максимальные начальные участки, которые могут служить образующими устойчивых равновесных поверхностей. Значениям  $C < 0$  соответствуют кривые, которые получаются из кривых для  $C > 0$  при их зеркальном отображении относительно оси  $R$  (это следует из инвариантности системы (4.2) относительно замены  $C$  на  $-C$  и  $Z$  на  $-Z$ ). Ломаная  $OEF$  вместе со своим зеркальным отражением относительно оси  $R$  представляет собой границу максимальной области устойчивости для равновесных линий. Это значит, что при каждом значении  $C$  любой начальный участок интегральной кривой, лежащий внутри указанной области, может служить образующей устойчивой равновесной поверхности в некотором осесимметричном сосуде. Других устойчивых осесимметричных равновесных поверхностей, пересекающих ось вращения, не существует.

На фиг. 3 и 4 изображены семейства графиков  $\beta(C, R)$  и  $V_1(C, R)$  для начальных участков интегральных кривых, показанных на фиг. 2. Вычис-



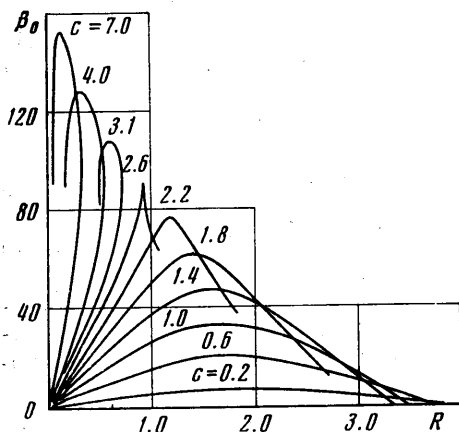
Фиг. 2

ления показали, что при  $C \rightarrow \infty$  значения  $\beta$  в точках, принадлежащих границе максимальной области устойчивости (линия  $OE$ ), стремятся к величине  $\pi/2$ , не превышая ее. Заметим, что на линии  $OE$  при заданном значении  $R$  величина  $V_1$  достигает максимального значения, а в точках линии  $EF$  угол  $\beta = 0$ .

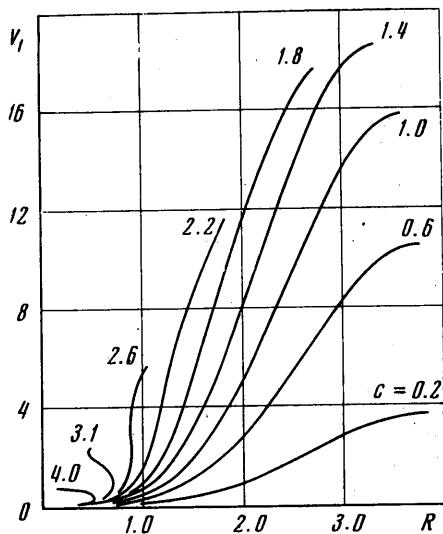
Для отрицательных значений  $C$  нужно пользоваться соотношениями

$$(4.4) \quad \beta(-C, R) = -\beta(C, R), \quad V_1(-C, R) = -V_1(C, R)$$

Приведенных данных достаточно, чтобы при заданных значениях  $b$ ,  $v$  и  $\alpha$  согласно методике, изложенной выше, определить равновесную линию в конкретном осесимметричном сосуде. Подчеркнем только, что все рассуждения необходимо проводить для безразмерных величин.



Фиг. 3



Фиг. 4

После того как будут определены  $R_A$ ,  $C_L$ ,  $\beta_A$  и  $V_{1A}$ , можно найти координату  $Z_A$  на линии  $L$ . Для этого следует воспользоваться равенством, которое получается интегрированием от  $S=0$  до  $S=S_A$  (до точки  $A$ ) второго уравнения системы (4.2)

$$(4.5) \quad 2R_A \sin \beta_A = -Z_A R_A^2 + C_L R_A^2 + \pi^{-1} V_{1A}$$

Зная значения  $R_A$  и  $Z_A$ , можно найти положение точки  $A$  на фиг. 2. После этого для  $C = C_L$  равновесная линия может быть построена путем интерполирования интегральных кривых со значениями  $C$ , близкими к  $C_L$ .

Если окажется, что система уравнений (3.1) не имеет решений, то устойчивых равновесных состояний заведомо не существует. (Напомним, что ограничились рассмотрением лишь «возможно устойчивых» участков интегральных кривых.) Если же решения существуют, то устойчивость соответствующих равновесных состояний еще не гарантируется.

**5. Пример.** Пусть вытянутый эллипсоид вращения с полуосями, равными 100 и 50 см, частично заполнен жидкостью плотности  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$  с коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma = 49.05 \text{ дин·см}^{-1}$ . Угол смачивания жидкости  $\alpha = 30^\circ$ , коэффициент заполнения сосуда (отношение объема жидкости к объему сосуда)  $k = 0.1$ . Коэффициент перегрузки  $n = -8 \cdot 10^{-5}$ ,  $\omega = 0$ . Требуется определить равновесную свободную поверхность жидкости.

Из приведенных данных следует, что  $b = -16 \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-2}$ . Используя преобразование (4.1), найдем, что в переменных  $R, Z$  сосуд представляет собой вытянутый вдоль оси  $Z$  эллипсоид вращения с полуосями  $a = 2, d = 4$ . Объем этого эллипсоида  $V_e = \frac{4}{3}\pi a^2 d = 67.01$ . Следовательно,  $V = kV_e = 6.701$ . Зависимости  $\gamma(R)$  и  $V_2(R)$  определяются формулами

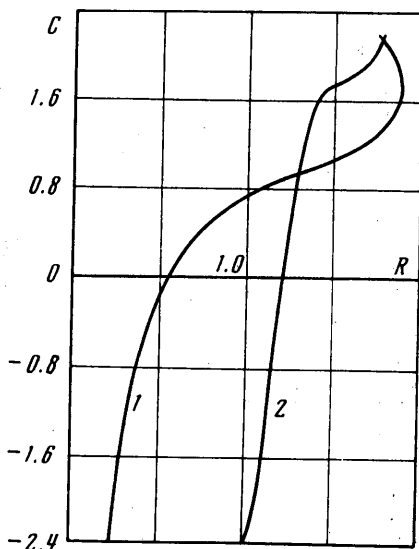
$$(5.1) \quad \gamma = \text{arc ctg} \left( \pm \frac{a^2 \sqrt{1 - R^2/a^2}}{R} \right), \quad V_2 = \frac{2}{3} \pi a^2 d \left( 1 \mp \sqrt{1 - \frac{R^2}{a^2}} \right)$$

и могут быть изображены графически (графики здесь не приводятся). В этих формулах верхний знак соответствует нижней половине эллипсоида, а нижний — верхней половине.

Построенная зависимость  $\gamma(R)$ , сдвинутая вниз по оси ординат на угол  $\alpha = 30^\circ$ , накладывалась на серию кривых  $\beta(R)$ , приведенных на фиг. 3. Чтобы найти точки пересечения графика  $\gamma(R) - \alpha$  с кривыми  $\beta(R)$ , соответствующими  $C < 0$ , часть этого графика, лежащая ниже оси абсцисс, зеркально отражалась относительно этой оси на первый квадрант. По точкам пересечения полученной ломаной с кривыми  $\beta(R)$  строилась зависимость  $C(R)$  (при этом в точках пересечения отраженной части графика  $\gamma(R) - \alpha$  значения  $C$ , согласно (4.4), брались с противоположным знаком). Эта зависимость приведена на фиг. 5 (кривая 1). Аналогично, используя график  $V_2(R) - V$  и семейство кривых  $V_1(R)$ , приведенных на фиг. 4, была построена вторая зависимость  $C(R)$  (кривая 2 на фиг. 5). Кривые 1 и 2 пересекаются в двух точках —  $R_{A1} = 1.275, C_{L1} = 0.94$  и  $R_{A2} = 1.75, C_{L2} = 2.16$ .

При построениях получилось, что графики  $\gamma(R) - \alpha$  и  $V_2(R) - V$  пересекаются соответственно с кривыми  $\beta(R)$  и  $V_1(R)$  в точках, отвечающих нижней половине эллипсоида. Поэтому и точки  $A_1$  и  $A_2$  контакта равновесных линий со стенкой сосуда должны находиться на нижней половине эллипсоида. Теперь, пользуясь зависимостями (5.1), (3.1) и (4.5), легко определить характеристики каждой из линий  $L_1$  и  $L_2$  в их конечных точках  $A_1$  и  $A_2$ . Получим в точке  $A_1$  значения  $\gamma = 58^\circ 51', \beta = 28^\circ 51', V_2 = 7.691, V_1 = 0.990, Z = 0.377$ , а в точке  $A_2$  — значения  $\gamma = 74^\circ 32', \beta = 44^\circ 32', V_2 = 17.284, V_1 = 10.583, Z = 2.458$ . Поскольку точка  $A_2$ , лежащая на нижней половине эллипсоида, имеет координаты  $R = 1.75, Z = 2.458$ , то сам эллипсоид с полуосями  $a$  и  $d$  пересекает ось  $Z$  в нижней точке  $Z = 0.394$  и, следовательно, не содержит внутри себя начало координат. Поэтому осесимметричная поверхность с образующей  $L_2$  не вписывается внутрь эллипсоида. Так что единственное возможно устойчивое равновесное состояние определяется линией  $L_1$ .

После того как линия  $L_1$  построена, остается согласно соотношениям (4.1), от безразмерных переменных вернуться к исходным переменным  $r, z$ .



Фиг. 5

## ЛИТЕРАТУРА

Поступила 19 IV 1972

1. Белляева М. А., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых силовых полях. В сб. «Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости». Изд. ВЦ АН СССР, 1968.
2. Белляева М. А., Мышкис А. Д., Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых гравитационных полях. Равновесные формы поверхности жидкости. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 5.