УДК 533.6.011.8

ПЛОСКОЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ПУАЗЕЙЛЯ ДЛЯ ЧЕТЫРЕХ МОЛЕКУЛЯРНЫХ МОДЕЛЕЙ

А. И. КАРПЕНКО, С. Г. СКАКУН, П. Е. СУЕТИН, В. Г. ЧЕРНЯК

(Свердловск)

Методом полупространственных моментов в третьем приближении решена задача о плоском неизотермическом течении Пуазейля. Получены потоки, обусловленные градиентами температуры и давления, а также скорость теплового скольжения для четырех молекулярных моделей. Приводится сопоставление с результатами других авторов.

Рассматривается движение газа между бесконечными параллельными пластинами, расположенными в $x = \pm d / 2$, возмущенного вдоль оси z градиентами температуры и давления. В этом случае линеаризованное уравнение Больцмана запишется в следующем виде:

(1) $$f_0 c_x \partial\varphi / \partial x + f_0 c_z [\nu + (c^2 - {}^5/_2)\tau] = J(\varphi)$$

$$f_0 = n(z) \left[\frac{m}{2\pi k T(z)}\right]^{3/2} \exp\left[-\frac{mv^2}{2kT(z)}\right]$$

$$\nu = \frac{d}{p}\frac{dp}{dz}, \qquad \tau = \frac{d}{T}\frac{dT}{dz}, \qquad c_i = \left(\frac{m}{2kT_0}\right)^{1/2} v_i, \qquad T_0 = T \qquad (z = 0)$$

Здесь $J(\varphi)$ — оператор соударений Больцмана, $\varphi(\mathbf{c}, x)$ — возмущение максвелловской функции распределения, v_i — i — компонента молекулярной скорости, $p(z)$ — давление, $T(z)$ — температура, k — постоянная Больцмана, m — масса молекулы.

Для решения уравнения (1) применен метод полупространственных моментов в третьем приближении [1, 2]. При этом учитывается разрыв функции распределения вблизи границы в пространстве скоростей с помощью разрывной функции знака $\operatorname{sign} c_x$, которая определяется как $\operatorname{sign} c_x = \pm 1$ при $c_x \gtrless 0$ соответственно. Тогда функция возмущения может быть записана в виде

(2) $$\varphi = {}^1/_2 [\varphi^+ (1 + \operatorname{sign} c_x) + \varphi^- (1 - \operatorname{sign} c_x)]$$

Для составления замкнутой системы моментных уравнений кинетическое уравнение (1) с учетом (2) умножается на молекулярные признаки вида $c_z c_x^k (1 \pm \operatorname{sign} c_x)$ ($k = 0, 1, 2$) и интегрируется по всему пространству скоростей. При этом полупространственные интегралы столкновений могут быть вычислены только в некоторых частных случаях. В данной работе рассматриваются: молекулы, взаимодействующие как твердые упругие сферы, максвелловские молекулы, модель БГК и эллипсоидальная статистическая модель.

Для произвольного закона межмолекулярных сил решение системы моментных уравнений при условии полностью диффузного рассеяния молекул стенками канала приводит к следующему выражению для объемного расхода газа в плоской щели

(3) $$Q = Q_p \nu + Q_T \tau$$

где Q_p и Q_T — объемные расходы, обусловленные градиентом давления и температуры соответственно.

Аналитические выражения для Q_p и Q_T зависят от интегралов столкновений и имеют громоздкий вид.

Численные значения приведенных расходов для всех вышеупомянутых молекулярных моделей при различных числах Кнудсена (Kn — отношение среднего свободного пробега λ к расстоянию между пластинами d) даны в табл. 1.

Сопоставление полученных результатов между собой указывает на вполне удовлетворительное соответствие статистических моделей основному кинетическому уравнению по крайней мере для низших моментов функции распределения. На практике этого бывает обычно вполне достаточно, поскольку в экспериментальных исследованиях измеряются как раз низшие моменты: плотность молекул, температура и давление газа, макроскопическая скорость и поток тепла. Основным преимуществом статистических моделей является возможность применения к ним строгих математических методов при решении граничных задач кинетической теории газов.

Таблица 1

Модель	[1]		[2]		[3]		[4]	
$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\mathrm{Kn}}$	Q_p	Q_T	Q_p	Q_T	Q_p	Q_T	Q_p	Q_T
0.01	3.2000	1.0293	3.2499	1.0529	3.1990	1.0297	3.1996	1.0313
0.1	3.2139	0.9797	3.4953	1.1024	3.2133	0.9876	3.2207	1.0036
0.3	3.1818	0.8565	3.4439	0.9470	3.2079	0.8880	3.2485	0.9380
0.5	3.1259	0.7438	3.2762	0.7786	3.1820	0.7937	3.2598	0.8716
0.8	3.0632	0.6123	3.1422	0.6184	3.1467	0.6755	3.2663	0.7791
1	3.0436	0.5465	3.1119	0.5500	3.1351	0.6123	3.2316	0.6967
2	3.1283	0.3589	3.2196	0.3738	3.2169	0.4189	3.3616	0.5294
3	3.3509	0.2708	3.4546	0.2891	3.4293	0.3239	3.5502	0.4189
4	3.6216	0.2164	3.7247	0.2356	3.6938	0.2668	3.7948	0.3497
5	3.9148	0.1831	4.0120	0.1983	3.9820	0.2277	4.0692	0.3020
6	4.2199	0.1575	4.3102	0.1709	4.2827	0.1990	4.3605	0.2668
7	4.5327	0.1381	4.6159	0.1500	4.5908	0.1767	4.6620	0.2393

Таблица 2

Модель	[1]	[2]	[3]	[4]
	0.6220	0.6769	0.7672	0.7672
[4]	0.6584	0.75	0.7662	—
	—	—	0.7660	—
[5]				
[3]		0.804		

В настоящее время имеется решение задачи о плоском неизотермическом течении Пуазейля методом Монте-Карло [3], в котором не делается каких-либо упрощений уравнения Больцмана. Сравнение результатов, полученных полупространственным моментным методом в третьем приближении, с данными работы [3] указывает на слабую сходимость моментного метода в почти свободномолекулярном режиме течения при $\mathrm{Kn} \gg 1$. Однако при $\mathrm{Kn} \leqslant 1$ моментное решение хорошо согласуется с результатами работы [3]. Это позволяет надеяться, что использованная в данной работе процедура даст достаточно корректные результаты для скорости теплового скольжения, которая может быть получена из Q_T при $\mathrm{Kn} \ll 1$.

В обозначениях работы [4] среднечисловая скорость газа, обусловленная градиентом температуры, при достаточно большом удалении от границ (в смысле числа межмолекулярных соударений) записывается в следующем виде:

$$q_{asi} = \frac{1}{2} A_T \left(\frac{2kT_0}{m}\right)^{1/2} l_{tr} \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} \tag{4}$$

Значения постоянной теплового скольжения A_T, полученные в данной работе, сравниваются с данными работ [3–5] (табл. 2).

Интересно отметить, что q_{asi}, полученная для БГК и эллипсоидальной статистической моделей, отличается на 19 и 12% от решений для твердых сферических и максвелловских молекул соответственно.

Поступила 23 X 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. *Породнов Б. Т., Суетин П. Е.* Течение разреженного газа между двумя параллельными плоскостями. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.
2. *Породнов Б. Т., Суетин П. Е.* Плоское течение максвелловского газа. Ж. техн. физ., 1969, т. 39, № 4.
3. *Горелов С. Л., Коган М. Н.* Течение разреженного газа между двумя параллельными пластинами. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 6.
4. *Loyalka S. K.* Slip in the thermal creep flow. Phys. Fluids, 1971, vol. 14, № 1.
5. *Sone Y., Yamamoto K.* Flow of rarefied gas throungh a circular pipe. Phys. Fluids, 1968, vol. 11, № 8.