

4. Указанный способ отыскания комплексного потенциала применим с некоторыми изменениями и в том случае, когда проводимость трещины δ есть функция от x . Например, если $\delta(z)$ — дробно-рациональная функция, то к правой части равенства (2.3), добавляются дробно-рациональные функции $Q^\pm(z)$ с произвольными коэффициентами, имеющими те же полюсы, что и функция $\delta(z)$ и принимающие на действительной оси чисто мнимые значения. После нахождения функций $\Phi^\pm(z)$ произвольные постоянные, входящие в $Q^\pm(z)$, можно определить из условия аналитичности функций $\delta(z)\Phi^\pm(z) - Q^\pm(z)$ в соответствующих полюсах функции $\delta(z)$.

Если же $\delta(x)$ — произвольная непрерывная функция, то она может быть с любой точностью приближена рациональными функциями и указанный метод может служить основой для приближенного решения рассматриваемой задачи в общем случае.

Результаты работы могут быть непосредственно перенесены и на задачи теплопроводности.

Поступила 14 II 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Пилатовский В. П. Основы гидромеханики тонкого пластиа. М., «Наука», 1966.
2. Абдурахманов И. М. О возмущении фильтрационного потока одиночной трещиной. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Гостехиздат, 1951.
4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
6. Голубева О. В. Обобщение теоремы об окружности на фильтрационные течения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 1.
7. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М., Гостехиздат, 1953.

УДК 532.546.013.03

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ФИЛЬТРАЦИИ С ПРЕДЕЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ

С. В. ПАНЬКО

(Томск)

В работе вводится новый нелинейный закон фильтрации, аналогичный закону, использованному в [1]. Аналитическое решение исходной системы уравнений в плоскости годографа выражается через решение системы Коши — Римана, что позволяет находить точное решение задач, сформулированных в [1], в случае произвольного положения конца разреза. Существенно также, что для рассматриваемого закона геометрические характеристики определяются без сложных квадратур.

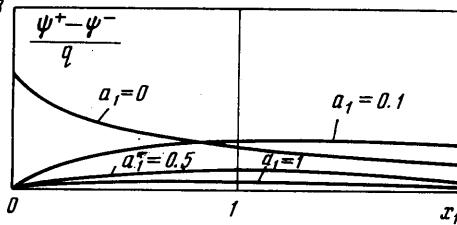
1. Рассмотрим плоское течение несжимаемой жидкости, подчиняющееся нелинейному закону фильтрации в форме [2]

$$(1.1) \quad \text{grad } H = -\Phi(w)_w / w$$

Вводя угол, образуемый вектором скорости с осью x , и функцию тока ψ из уравнения неразрывности, можно показать, что уравнения движения равносильны дифференциальному соотношению

$$(1.2) \quad dz = e^{i\theta} \left[-\frac{dH}{\Phi(w)} + i \frac{d\psi}{w} \right]$$

Здесь H — приведенный напор, w — скорость фильтрации, θ — угол наклона скорости, $z = x + iy$, x, y — координаты плоскости течения.



Фиг. 5

Выберем в качестве независимых переменных w и θ , тогда из условий интегрируемости (1.2) получим в плоскости годографа линейную систему для определения $\psi(w, \theta)$ и $H(w, \theta)$ [3] (гл. 2, § 10)

$$(1.3) \quad \frac{\partial H}{\partial \theta} = - \frac{\Phi^2(w)}{w \Phi'(w)} \frac{\partial \psi}{\partial w}, \quad \frac{\partial H}{\partial w} = \frac{\Phi(w)}{w^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

Среди нелинейных законов фильтрации наибольший интерес представляет закон фильтрации с предельным градиентом. К числу их принадлежит и закон

$$(1.4) \quad \Phi(w) = \sqrt{w^2 + \lambda^2}, \quad \Phi(0) = \lambda$$

который, как и закон фильтрации [1], предполагает возможность образования застойных зон, где $w = 0$.

Для дальнейшего удобнее представить (1.4) в параметрическом виде

$$(1.5) \quad \Phi(w) = \lambda \operatorname{ch} \sigma, \quad w = \lambda \operatorname{sh} \sigma$$

Если теперь в уравнениях (1.3) перейти к переменной σ , то получим каноническую систему

$$(1.6) \quad \frac{\partial H}{\partial \theta} = - \operatorname{cth}^2 \sigma \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial H}{\partial \sigma} = \operatorname{cth}^2 \sigma \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

После исключения $H(\theta, \sigma)$ для функции $\psi(\theta, \sigma)$ получим одно уравнение

$$(1.7) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{2}{\operatorname{ch} \sigma \operatorname{sh} \sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = 0$$

Известно [4], что решение системы (1.6) допускает следующее простое представление:

$$(1.8) \quad H = T - \operatorname{cth} \sigma \partial T / \partial \sigma, \quad \psi = S - \operatorname{th} \sigma \partial S / \partial \sigma$$

где $T(\theta, \sigma)$ и $S(\theta, \sigma)$ — сопряженные гармонические функции.

Физические координаты можно найти путем интегрирования выражения (1.2). Подставляя в него соотношения (1.5) и (1.8) и учитывая условия Коши — Римана для $S(\theta, \sigma)$ и $T(\theta, \sigma)$, получим [4]

$$(1.9) \quad \lambda(z - z_0) = e^{i\theta} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} \sigma} \frac{\partial S}{\partial \theta} - \frac{i}{\operatorname{ch} \sigma} \frac{\partial S}{\partial \sigma} \right)$$

Так как функция тока и физические координаты выражаются только через $S(\theta, \sigma)$, то желательно по известным граничным значениям $\psi(\theta, \sigma)$ построить соответствующие значения $S(\theta, \sigma)$. Далее будет показано, что в случае задач фильтрации, предложенных в [1] с законом (1.4), эти значения просто связаны между собой.

2. Преобразованием годографа удобно пользоваться в тех случаях, когда область течения допускает отображение на достаточно простую область в плоскости годографа. К таким течениям относятся течения в симметричных областях при фильтрации с предельным градиентом. Характерная особенность этих течений — возможность образования застойных зон, определение положения и размера составляет основную задачу фильтрации с предельным градиентом. Граница застойной зоны одновременно является и линией тока и линией нулевой скорости w .

Примеры, приведенные в [1] (см. фиг. 1—5), показывают, что ряд важных для приложений задач сводится к определению функции $\psi(\theta, \sigma)$ в полуполосе $0 < \theta < \theta_0$, $0 < \sigma < \infty$ (задача I), в полубесконечной полосе $0 < \theta < \theta_0$ с выброшенным лучом $\theta = \theta_1$, $\sigma_1 < \sigma < \infty$ (задача II) или отрезком $\theta = \theta_1$, $0 < \sigma < \sigma_1$ (задача III) с заданными условиями на границах полуполосы и берегах разреза.

Чтобы найти граничные значения $S(\theta, \sigma)$, обратимся к (1.8). Очевидно

$$(2.1) \quad S(\theta, 0) = \psi(\theta, 0), \quad \frac{\partial S(\theta, \sigma)}{\partial \sigma} \frac{\operatorname{sh} \sigma}{\operatorname{sh}^2 \sigma} = - \frac{\operatorname{ch} \sigma}{\operatorname{sh}^2 \sigma} \psi(\theta, \sigma)$$

Из второго соотношения (2.1) следует, что по известным значениям $\psi(\theta_k, \sigma)$, $\theta_k = \text{const}$ значения $S(\theta_k, \sigma)$ найдутся в результате интегрирования линейного уравнения. В частности, для задач, сформулированных в [1], сразу можно записать

$$(2.2) \quad S(\theta_k, \sigma) = R_k \operatorname{sh} \sigma + \psi(\theta_k, \sigma)$$

где R_k ($k = 1, 2, 3$) — произвольные постоянные интегрирования.

Первое соотношение (2.2) будет состоять из трех или двух равенств в зависимости от того, имеется ли разрез вдоль $\theta = \theta_1$. Постоянны R_k (кроме одной) определяются из условий ограниченности и симметрии как $\psi(\theta, \sigma)$, так и $S(\theta, \sigma)$. Оставшаяся постоянная, связанная с положением конца разреза, отыскивается в ходе решения конкретной задачи.

Таким образом, решение краевых задач в плоскости годографа при фильтрации с предельным градиентом для закона (1.4) сводится к решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа с условиями (2.2). Это позволяет рассматривать течения и с более сложной геометрией [5].

Перейдем к определению положения той линии тока, на которой одновременно $\psi = 0$, $w = 0$ ($\sigma = 0$). Используя результаты [6], легко установить, что

$$\psi(\theta, \sigma) \approx \operatorname{sh}^3 \sigma, \quad S(\theta, \sigma) \approx \operatorname{sh} \sigma \quad \text{при } \sigma \rightarrow 0.$$

Тогда, устремляя σ к нулю в соотношениях (1.9) и раскрывая неопределенность в первом слагаемом, найдем параметрическое представление границы застойной зоны

$$(2.3) \quad \lambda[z(\theta) - z_0] = e^{i\theta} \left[\frac{\partial^2 S(0, 0)}{\partial \sigma \partial \theta} - i \frac{\partial S(0, 0)}{\partial \sigma} \right]$$

Получим теперь формулу для расстояния от источника до острия застойной зоны. Вдоль линии тока $\psi = \text{const}$ соотношения (1.2) с учетом (1.5) и (1.6) обратятся в следующие:

$$(2.4) \quad \lambda dz = e^{i\theta} \frac{\operatorname{ch} \sigma}{\operatorname{sh}^2 \sigma} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\sigma + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} d\theta \right)$$

Если источник расположен в точке $A(x_A, 0)$, то из (2.4) следует:

$$(2.5) \quad \lambda(x_B - x_A) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} \sigma}{\operatorname{sh}^2 \sigma} \frac{\partial \psi(0, \sigma)}{\partial \theta} d\sigma$$

так как отрезку AB соответствует полуось $\theta = 0$, имеющая отрицательное направление. Приняв во внимание (2.1), получим

$$(2.6) \quad \lambda(x_B - x_A) = \frac{1}{\operatorname{sh} \sigma} \frac{\partial S(0, \sigma)}{\partial \theta} \Big|_{\infty}^0 \quad y_B = 0$$

Как видно из (2.3), (2.6), для данного закона фильтрации геометрические характеристики определяются без квадратур.

3. Рассмотрим задачу о течении, которое создает источник, расположенный между параллельными стенками, точное решение которой было получено в [7], хотя качественное изучение его затруднительно. Интерес к этой задаче обусловлен еще и тем, что, зная ее решение, легко можно получить решения ряда других задач [8].

В силу симметрии течения на плоскости годографа приходим к задаче I ($\theta_0 = \pi/2$) для уравнения (1.7)

$$\begin{aligned} \psi(0, \sigma) &= \psi(\theta, 0) = 0, & \psi(\pi/2, \sigma) &= Q \quad (\sigma_1 < \sigma < \infty) \\ \psi(\pi/2, \sigma) &= 0 & 0 < \sigma < \sigma_1 \end{aligned}$$

где значение σ_1 характеризует длину выброшенного отрезка CD (см. фиг. 1) [7]. Соотношения (2.2) позволяют перейти к следующей краевой задаче для $S(\theta, \sigma)$:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} S(\theta, 0) &= S(0, \sigma) = 0, & S(\pi/2, \sigma) &= Q \quad (\sigma_1 < \sigma < \infty) \\ \Delta S &= 0, & S(\pi/2, \sigma) &= R \operatorname{sh} \sigma \quad (0 < \sigma < \sigma_1) \end{aligned}$$

с произвольной пока постоянной R .

Будем отыскивать решение задачи (3.1) методом [9], разбивая полуполосу на две области — D_1 и D_2 . В области D_1 представим $S(\theta, \sigma)$ в виде

$$(3.2) \quad S_1 = \frac{2Q}{\pi} \left(\theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-2n\sigma} \sin 2n\theta \right)$$

в области D_2

$$(3.3) \quad S_2 = R \operatorname{sh} \sigma \sin \theta + \frac{2Q}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sh} 2n\sigma \sin 2n\theta$$

Непосредственно убеждаемся, что все граничные условия удовлетворены, а условия аналитического продолжения

$$\psi_1 = \psi_2, \quad \partial\psi_1 / \partial\sigma = \partial\psi_2 / \partial\sigma, \quad \sigma = \sigma_1$$

приводят к системе уравнений для определения A_n и B_n , решение которой задается выражениями

$$A_n = \frac{(-1)^n}{n(4n^2 - 1)} (2n \operatorname{cth} \sigma_1 \operatorname{sh} 2n\sigma_1 - \operatorname{ch} 2n\sigma_1)$$

$$B_n = \frac{(-1)^n}{n(4n^2 - 1)} (1 + 2n \operatorname{cth} \sigma_1) e^{-2n\sigma_1}$$

Так как формулы для геометрических характеристик содержат лишь производные от $S(\theta, \sigma)$, то подставляя A_n и B_n соответственно в (3.2) и (3.3) и дифференцируя, получим ряды, суммы которых легко можно подсчитать. В результате

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial \theta} + i \frac{\partial S_1}{\partial \sigma} &= \frac{2Q}{\pi} \frac{\operatorname{sh}(\sigma + i\theta)}{\operatorname{sh} \sigma_1} (\operatorname{arc tg} \xi - \operatorname{arc tg} \eta) \\ \frac{\partial S_2}{\partial \theta} + i \frac{\partial S_2}{\partial \sigma} &= \left[R - \frac{2Q}{\pi \operatorname{sh} \sigma_1} (\operatorname{arc tg} \eta_1 + \operatorname{arc tg} \xi) \right] \operatorname{sh}(\sigma + i\theta) \\ \eta_1 &= 1, \quad \eta \xi = \exp - (\sigma + i\theta)_2, \quad \xi = \exp(\sigma_1 - \sigma - i\theta) \end{aligned}$$

Целесообразно сначала найти расстояние источника, считая его расположенным в начале координат, до остряя застойной зоны

$$\lambda x_B = \frac{1}{\operatorname{sh} \sigma} \frac{\partial S(0, \sigma)}{\partial \theta} \Big|_{\infty}^0 = \frac{1}{\operatorname{sh} \sigma} \frac{\partial S_2(0, \sigma)}{\partial \theta} \Big|_{\sigma_1}^0 + \frac{1}{\operatorname{sh} \sigma} \frac{\partial S_1(0, \sigma)}{\partial \theta} \Big|_{\infty}^{\sigma_1}$$

Воспользовавшись (3.4) и производя упрощения, получим

$$(3.5) \quad x_B = \frac{2Q}{\pi \lambda} \frac{\operatorname{arc tg}(\operatorname{sh} \sigma_1)}{\operatorname{sh} \sigma_1}, \quad y_B = 0$$

Формула (3.5) показывает, что расстояние от источника до остряя застойной зоны монотонно увеличивается с уменьшением параметра $\sigma_1(a_0)$ и достигает максимума при $\sigma_1 = 0$ ($a_0 = 0$), т. е. для предельного случая [1].

Аналогично найдем координаты границы застойной зоны

$$(3.6) \quad z(\theta) = \frac{2Q}{\pi \lambda} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} \sigma_1} \operatorname{arc tg} \frac{\operatorname{sh} \sigma_1}{\cos \theta} + e^{i\theta} \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \operatorname{sh}^2 \sigma_1} \right)$$

$$R = \frac{Q}{\lambda \operatorname{sh} \sigma_1}$$

Здесь постоянная R определялась из условия $x = x_B$ при $\theta = 0$, а условие $x = L$, $\theta = \pi/2$ устанавливает связь между σ_1 и L (L — расстояние от источника до стенки)

$$L = \frac{Q}{\lambda \operatorname{sh} \sigma_1} = \frac{Q}{\lambda a_0} \quad (a_0 = \frac{w}{\lambda})$$

Используя (3.6) найдем площадь застойной зоны

$$s = \frac{4Q^2}{(\pi \lambda)^2} (\operatorname{cth} \sigma_1 - 1) (\operatorname{cth}^2 \sigma_1 + 2)$$

Видно, что в предельном случае ($\sigma_1 \rightarrow 0$) застойная зона будет неограниченной.

Для определения перепада давления между скважиной и удаленными частями пласта выберем на оси $\theta = \pi/2$ две точки ($\sigma_0 \ll \sigma_1$, и $\sigma_2 \gg \sigma_1$). Тогда для закона фильтрации (1.5) получим

$$dH = -\lambda \operatorname{ch} \sigma dy, \quad d(H + \lambda y \operatorname{ch} \sigma) = \lambda y \operatorname{sh} \sigma d\sigma$$

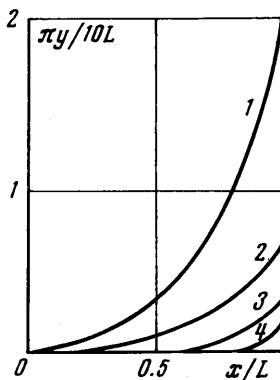
Но из (1.9) следует, что

$$y \left(\frac{\pi}{2}, \sigma \right) = \frac{1}{\lambda \operatorname{sh} \sigma} \frac{\partial S(\pi/2, \sigma)}{\partial \theta}$$

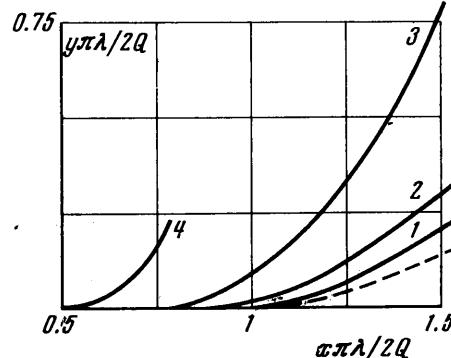
Подставляя найденное значение y в (3.7) и интегрируя от σ_0 до σ_2 , находим

$$\left[H + \operatorname{cth} \sigma \frac{\partial S(\pi/2, \sigma)}{\partial \theta} \right] \Big|_{\sigma_0}^{\sigma_2} = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{\partial S_2}{\partial \theta} d\sigma + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\partial S_1}{\partial \theta} d\sigma$$

К аналогичному результату можно прийти более простым путем, если с помощью (3.4) вычислить $T(\theta, \sigma)$ и воспользоваться (1.8).



Фиг. 1



Фиг. 2

Для построения предельного решения, т. е. решения, соответствующего $\sigma_1 = 0$ ($a_0 = 0$), в формулах (3.5) и (3.6) нужно перейти к пределу при $\sigma_1 \rightarrow 0$

$$(3.8) \quad x_B = \frac{2Q}{\pi \lambda}, \quad z(\theta) = \frac{2Q}{\pi \lambda} \left(\frac{1}{\cos \theta} + e^{i\theta} \operatorname{tg}^2 \theta \right)$$

Вид границы застойной зоны, рассчитанный по формулам (3.6), показан на фиг. 1 (кривые 1—4 соответствуют значениям параметра $a_0 = 0.1, 0.5, 1.2$).

На фиг. 2 пунктиром нанесена предельная конфигурация застойной зоны, определяемая выражениями (3.8), и для сопоставления приведены кривые фиг. 1, но с величиной $2Q/\pi \lambda$ в качестве масштаба.

Поступила 9 XI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Ентов В. М. О некоторых двумерных задачах фильтрации с предельным градиентом. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
2. Христианович С. А. Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси. ПММ, 1940, т. 4, вып. 1.
3. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917—1967). М., «Наука», 1969.
4. Домбровский Г. А. Метод аппроксимации адиабаты в теории плоских течений газа. М., «Наука», 1964.
5. Ентов В. М., Салганик Р. Л. О решении плоских задач фильтрации с предельным градиентом методом малого параметра. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
6. Алишаев М. Г., Ентов В. М., Сегалов А. Е. Элементарные решения плоских задач нелинейной фильтрации. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 3.
7. Ентов В. М. Об одной задаче фильтрации с предельным градиентом, допускающей точное решение. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
8. Бернадинер М. Г., Ентов В. М. Некоторые точные решения плоских задач фильтрации с предельным градиентом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
9. Фалькович С. В. К теории газовых струй. ПММ, 1957, т. 21, вып. 4.