Поступила 28 III 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рейнер М.* Реология. М., «Наука», 1965.
2. *Yang W. J., Yeh H. C.* Approximate method for the determining of bubble dynamics in non — Newtonan fluids. Phys. Fluids, 1965, vol. 8, No. 4, p. 758.
3. *Tanasawa I, Yang W. J.* Dinamic behavior of a gas bubble in viscoelastic liquids. J. Appl. Phys., 1970, vol. 41, No. 11, p. 4526.
4. *Fogler H. S., Goddard J. D.* Collapse of spherical cavities in viscoelastic fluids. Phys. Fluids, 1970, vol. 13, No. 5, p. 1135.
5. *Fogler H. S., Goddard J. D.* Oscillations of a gas bubble in viscoelastic liquids subject to acoustic and impulsive pressure variations. J. Appl. Phys., 1971, vol. 42, No. 1, p. 259.

УДК 532.546

ПЛОСКАЯ СТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В ПЛАСТЕ, РАЗДЕЛЕННОМ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ТРЕЩИНОЙ

И. М. АБДУРАХМАНОВ, М. Г. АЛИШАЕВ

(*Махачкала*)

Рассматривается задача о комплексном потенциале для плоской стационарной фильтрации однородной жидкости в однородном бесконечном пласте, разделенном на две полуплоскости прямолинейной трещиной или же плохо проницаемой завесой.

Сформулирована и решена соответствующая краевая задача теории функций. В качестве примера исследуется влияние трещины на фильтрационное поле, образуемое источником.

Указывается общий принцип, при помощи которого, имея решение задачи для трещины, можно получить решение в случае, когда трещина заменяется плохо проницаемой завесой.

1. Пусть бесконечный однородный пласт разделен на две полуплоскости D^+ и D^- трещиной или же плохо проницаемой завесой Γ, которую примем за действительную ось x. В каждой из этих полуплоскостей течение определяется соответственно комплексным потенциалом

$$W^{\pm}(z) = F(z) + \Phi^{\pm}(z), \qquad z = x + iy$$

Здесь $F(z)$ — аналитическая на всей плоскости, за исключением изолированных особых точек, функция — комплексный потенциал при отсутствии трещины (или завесы), $\Phi^{\pm}(z)$ — искомые аналитические соответственно в верхней (D^+) и нижней (D^-) полуплоскостях функции, характеризующие возмущение фильтрационного поля трещиной. Функции $\Phi^{\pm}(z)$ определяются из условий, которым должны удовлетворять потенциалы $W^{\pm}$ вдоль трещины (или завесы) Γ.

Если линия Γ представляет собой трещину, то давление P (следовательно, и потенциал скорости φ) по обе стороны от Γ имеет одно и то же предельное значение, а разность предельных значений функции тока $(\psi^+ - \psi^-)$ представляет собой количество жидкости, протекающей через трещину в данном сечении x. Оно пропорционально изменению давления вдоль трещины, т. е.

$$\varphi^+ - \varphi^- = 0, \qquad \psi^+ - \psi^- = 2\delta(\partial\varphi / \partial x) \tag{1.1}$$

В [1, 2] в качестве δ предлагаются соответственно выражения

$$\delta = \frac{hk_1}{k}, \qquad \delta = \frac{h(h^2 + 3k)}{3k} \tag{1.2}$$

где $2h$ — ширина трещины, k — проницаемость пласта, k_1 — проницаемость забитой крупным песком трещины, $k_1 \gg k$. Вторая формула выведена в предположениях теории смазочного слоя вязкой жидкости. Как видно из (1.2), δ представляет собой линейную величину, изменяющуюся в достаточно широких пределах: если $k \sim 10^{-12}$ *м*^{2}, $h \sim 10^{-5} - 10^{-3}$ *м*, то $2\delta \sim 10^{-3} - 10^3$ *м*.

Умножив второе из равенств в (1.1) на мнимую единицу i и складывая с первым, запишем условия (1.1) в комплексной форме

$$W^+ - W^- = 2\delta i \operatorname{Re}(dW^\pm / dx) \tag{1.3}$$

Если же линия Г представляет собой плохо проницаемую завесу, то по обе стороны от Г функция тока ψ имеет одно и то же предельное значение, а разность предельных значений давления $P^+ - P^-$ пропорциональна скорости перетока жидкости q_n через завесу

$$q_n = -\frac{k_1}{2h\mu}(P^+ - P^-) = \frac{k_1}{2hk}(\varphi^+ - \varphi^-) = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1.4}$$

Следовательно, вдоль завесы имеем условия

$$\psi^+ - \psi^- = 0, \quad \varphi^+ - \varphi^- = -2\delta\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \delta = \frac{kh}{k_1}, \quad k_1 \ll k \tag{1.5}$$

Умножив первое из условий (1.5) на мнимую единицу i и складывая со вторым, получим

$$W^+ - W^- = 2\delta \operatorname{Re} idW^\pm / dx \tag{1.6}$$

Задача состоит в отыскании аналитических функций $W^\pm(z)$, удовлетворяющих вдоль действительной оси Г условиям (1.3) или (1.6) и совпадающих на бесконечности с заданной аналитической функцией $F(z)$.

Если умножить последнее условие на i, то оно превратится в условие (1.3) для функций $iW^\pm$. Это указывает на возможность сведения одной задачи к другой. Умножив комплексный потенциал исходного невозмущенного течения $F(z)$ на i, решив задачу для трещины и разделив найденные функции $W^\pm(z)$ на i, получается решение задачи для завесы.

Кроме того, в силу линейности условий (1.3) и (1.6) к решениям рассматриваемой задачи применим принцип суперпозиции.

2. Пусть трещина Г имеет постоянную ширину, так что $\delta = \text{const}$. Если заданная функция $F(z)$ принимает на действительной оси чисто мнимые значения, то она и будет решением задачи, так как граничные условия (1.3) выполняются для такой функции автоматически. Это означает, что если поток перпендикулярен к трещине, то возмущения отсутствуют.

Пусть функция $F(z)$ такова, что производная $F'(z)$ не имеет точечных особенностей на действительной оси и обращается в нуль на бесконечности. Подставляя функции

$$W^\pm(z) = F(z) + \Phi^\pm(z) \tag{2.1}$$

в граничные условия (1.3), для определения неизвестных функций $\Phi^\pm(z)$ получаются условия

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = 2\delta i \operatorname{Re}[\Phi^{\pm\prime}(x) + F'(x)] \tag{2.2}$$

Применяя к обеим частям равенств (2.2) оператор Шварца [3, 4] и воспользовавшись формулой и теоремой Коши, находим

$$\delta\Phi^{\pm\prime}(z) \pm i\Phi^\pm(z) = \mp\frac{\delta}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}F'(x)}{x-z}\,dx + iC^\pm \tag{2.3}$$

Здесь $C^\pm$ — произвольные действия постоянные, а интеграл по бесконечной прямой понимается в смысле главного значения.

Решения дифференциальных уравнений (2.3), ограниченные на бесконечности, можно представить в виде

$$\Phi^\pm(z) = \mp\frac{1}{\pi i}\int_{\pm i\infty}^{z}\exp\left(\pm\frac{i(\zeta - z)}{\delta}\right)d\zeta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}F'(x)}{x-\zeta}\,dx \tag{2.4}$$

Здесь путь интегрирования следует выбрать соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, а общая для функций $\Phi^\pm(z)$ действительная постоянная $C^+ = -C^-$ опущена.

Функции $W^{\pm}(z)$ можно записать в более удобном для приложений виде, когда заданная функция представима в виде $F(z) = F^{+}(z) + F^{-}(z)$, причем производные $F^{\pm\prime}(z)$ — функции аналитические соответственно в верхней и нижней полуплоскостях и обращающиеся в нуль на бесконечности. Действительно, введем в рассмотрение аналитические соответственно в нижней и верхней полуплоскостях [5] $\bar{F}^{\pm\prime}(z) = \overline{F^{\pm\prime}(z)}$. Тогда, учитывая равенство

$$2\operatorname{Re} F^{\pm\prime}(x) = F^{\pm\prime}(x) + \bar{F}^{\pm\prime}(x) \qquad (-\infty<x<\infty)$$

можно вычислить внутренний интеграл в (2.4) при помощи формулы и теоремы Коши. Подставляя затем полученные выражения в (2.1), будем иметь

$$W^{\pm}(z) = F(z) - \int\limits_{\pm i\infty}^{z} \exp\left(\pm\frac{i(\zeta - z)}{\delta}\right) [F^{\pm\prime}(\zeta) + \bar{F}^{\mp\prime}(\zeta)]\, d\zeta \tag{2.5}$$

Формулам (2.5) можно дать геометрическую интерпретацию, аналогичную данной в работе [6]. Как известно, аналитическая функция $F(z)$ определяется своими особыми точками. Для построения комплексного потенциала в верхней (нижней) полуплоскости D^{+} (D^{-}) следует внести в плоскость z дополнительные особенности, расположение и характер которых соответствуют зеркальному изображению относительно действительной оси особых точек заданной функции $F(z)$, и отнять от функции $F(z)$ интегральный член, содержащий производные от особенностей, расположенных в другой полуплоскости D^{-} (D^{+}).

В случае, если особенности функции $F'(z) = F_0'(z)$ расположены на действительной оси, то выражения для потенциалов можно получить также из формул (2.5) предельным переходом. Действительно, пусть точечные особенности функции $F_0'(z)$ расположены в действительных конечных точках a_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$. Рассмотрим аналитические соответственно в нижней и верхней полуплоскостях функции $F^{\mp}(z) = {}^{1}/{}_{2}F_0^{\mp}(z)$, где $F_0^{\mp}(z)$ имеют аналогичные особенности соответственно в точках $b_k^{\pm} = a_k \pm ia_k'$, a_k' — произвольные положительные числа. Подставляя в формулу (2.5) функции $F^{\mp}(z) = {}^{1}/{}_{2}F_0^{\mp}(z)$ и переходя затем к пределу при $b_k^{\pm} \to a_k$ (что возможно в силу равномерной сходимости интегралов по параметрам $b_k^{\pm}$ вне любых, сколь угодно малых окрестностей $D_k^{\pm}$ точек a_k, лежащих соответственно в верхней и нижней полуплоскостях), получается для любого $z \neq a_k$

$$W^{\pm}(z) = F_0(z) - \frac{1}{2}\int\limits_{\pm i\infty}^{z} \exp\left(\pm\frac{i(\zeta - z)}{\delta}\right) [F_0'(\zeta) + \bar{F}_0'(\zeta)]\, d\zeta \tag{2.6}$$

Наконец, если функция $F(z)$ имеет в бесконечно удаленной точке полюс порядка n, т. е. $F(z) = G(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$, c_k — заданные числа, то, очевидно, добавочные члены $\Phi^{\pm}(z)$ в формуле (2.1) будут многочленами $(n-1)$-й степени и условия для применения оператора Шварца к равенству (2.2) при $n > 1$ не выполняются. Но функции $\Phi^{\pm}(z)$ можно получить в виде разложений по целым положительным степеням соответственно $(\pm\delta i)$

$$W^{\pm}(z) = G(z) + {}^{1}/{}_{2} \sum_{k=1}^{n} (\pm\delta i)^{k} [G^{(k)}(z) + \bar{G}^{(k)}(z)] \tag{2.7}$$

Для плохо проницаемой завесы решение задачи можно получить так, как это указано в п. 1. Например, если особенности функции $F'(z)$ расположены вне действительной оси, то

$$W_1^{\pm}(z) = F(z) - \int\limits_{\pm i\infty}^{z} \exp\left(\pm\frac{i(\zeta - z)}{\delta}\right) [F^{\pm\prime}(\zeta) - \bar{F}^{\mp\prime}(\zeta)]\, d\zeta$$

Из этой формулы видно, что комплексные потенциалы течения при наличии завесы получаются из соответствующих потенциалов для трещины, если изменить в них знак перед функцией $\bar{F}'(z)$ на противоположный.

3. Если невозмущенный поток — поступательный, т. е. $F(z) = Ve^{i\alpha}z$, то из (2.7) имеем

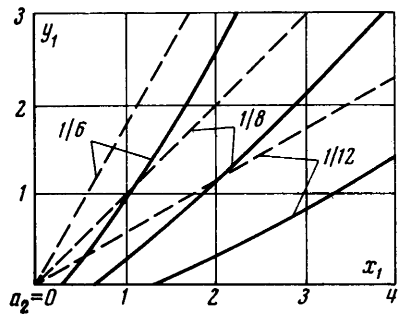
$$W^{\pm}(z) = Ve^{i\alpha}z \pm iV\delta\cos\alpha \tag{3.1}$$

Если невозмущенный поток представляет собой течение типа источника (стока) интенсивности q, расположенного в точке $z = ai$ верхней полуплоскости, то

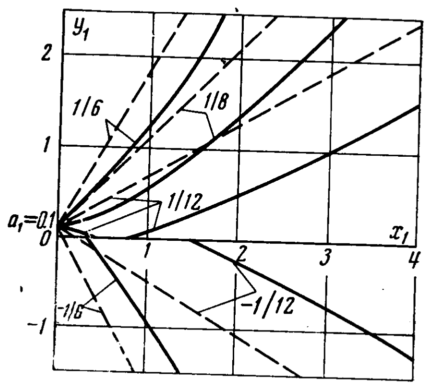
$$F^+(z) \equiv 0, \quad F^-(z) = \frac{q}{2\pi}\ln(z - ai) \quad (a>0)$$

и из (2.5) имеем

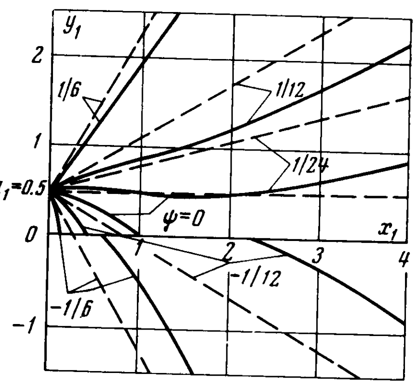
$$W^\pm(z) = \frac{q}{2\pi}\left[\ln(z - ai) - \exp\frac{a \mp iz}{\delta}\operatorname{Ei}\left(\frac{\pm iz - a}{\delta}\right)\right] \tag{3.2}$$



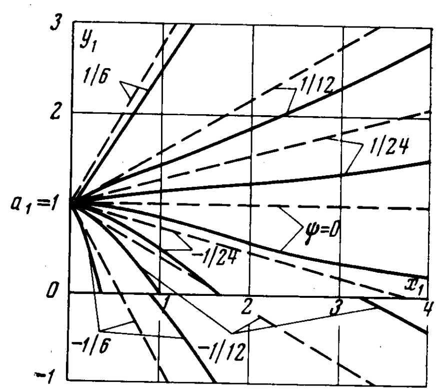
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Для малых и больших значений δ и конечных z, интегрируя по частям (3.2), получим

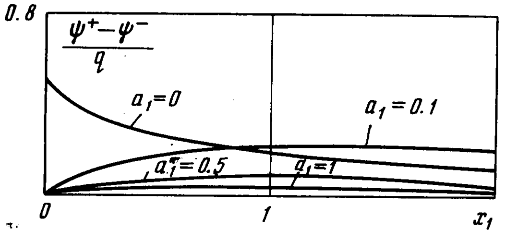
$$W^\pm(z) \approx \frac{q}{2\pi}\left[\ln(z - ai) \pm \frac{\delta i}{z \pm ai}\right] \quad (\delta \ll 1) \tag{3.3}$$

$$W^\pm(z) \approx \frac{q}{2\pi}\left[\ln\frac{z - ai}{z \pm ai} - \frac{a \mp iz}{\delta}(\ln(z \pm ai) - 1)\right] \quad (\delta \gg 1) \tag{3.4}$$

Линии тока $\psi_1 = \mathrm{const}$ (в долях от q) в плоскости $z_1 = z / \delta$, соответствующие значениям безразмерного параметра $a_1 = a / \delta = 0$, 0.1, 0.5, 1, приведены на фиг. 1—4. Расчеты проводились на ЭВМ в соответствии с формулой (3.5), с использованием разложения в ряд интегральной показательной функции, ее асимптотического представления для больших значений z [7] и итерационного процесса для определения полярных координат фиксированной линии тока. Соответствующие линии тока при отсутствии трещины приведены пунктиром.

На фиг. 5 приведены графики для расхода жидкости через трещину (в долях от q) при тех же значениях параметра a_1.

4. Указанный способ отыскания комплексного потенциала применим с некоторыми изменениями и в том случае, когда проводимость трещины δ есть функция от x. Например, если $\delta(z)$ — дробно-рациональная функция, то к правой части равенства (2.3) добавляются дробно-рациональные функции $Q^{\pm}(z)$ с произвольными коэффициентами, имеющими те же полюсы, что и функция $\delta(z)$ и принимающие на действительной оси чисто мнимые значения. После нахождения функций $\Phi^{\pm}(z)$ произвольные постоянные, входящие в $Q^{\pm}(z)$, можно определить из условия аналитичности функций $\delta(z)\Phi^{\pm\prime}\cdot(z) - Q^{\pm}(z)$ в соответствующих полюсах функции $\delta(z)$.



Фиг. 5

Если же $\delta(x)$ — произвольная непрерывная функция, то она может быть с любой точностью приближена рациональными функциями и указанный метод может служить основой для приближенного решения рассматриваемой задачи в общем случае.

Результаты работы могут быть непосредственно перенесены и на задачи теплопроводности.

Поступила 14 II 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пилатовский В. П.* Основы гидромеханики тонкого пласта. М., «Наука», 1966.
2. *Абдурахманов И. М.* О возмущении фильтрационного потока одиночной трещиной. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., Гостехиздат, 1951.
4. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
6. *Голубева О. В.* Обобщение теоремы об окружности на фильтрационные течения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 1.
7. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М., Гостехиздат, 1953.

УДК 532.546.013.03

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ФИЛЬТРАЦИИ С ПРЕДЕЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ

С. В. ПАНЬКО

(*Томск*)

В работе вводится новый нелинейный закон фильтрации, аналогичный закону, использованному в [1]. Аналитическое решение исходной системы уравнений в плоскости годографа выражается через решение системы Коши — Римана, что позволяет находить точное решение задач, сформулированных в [1], в случае произвольного положения конца разреза. Существенно также, что для рассматриваемого закона геометрические характеристики определяются без сложных квадратур.

1. Рассмотрим плоское течение несжимаемой жидкости, подчиняющееся нелинейному закону фильтрации в форме [2]

$$\operatorname{grad} H = -\Phi(w)_{\mathrm{w}} / w \tag{1.1}$$

Вводя угол, образуемый вектором скорости с осью x, и функцию тока ψ из уравнения неразрывности, можно показать, что уравнения движения равносильны дифференциальному соотношению

$$dz = e^{i\theta}\left[-\frac{dH}{\Phi(w)} + i\frac{d\psi}{w}\right] \tag{1.2}$$

Здесь H — приведенный напор, w — скорость фильтрации, θ — угол наклона скорости, $z = x + iy$, x, y — координаты плоскости течения.