

Пунктирные кривые соответствуют предельным случаям $\lambda \rightarrow 0$ при безотрывном обтекании и при $\sigma = 0$. Зависимость c_z^α от удлинения при $\sigma = 0$ близка к теоретическим значениям $\pi\lambda/5$, полученным в [4].

Поступила 2 IV 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Lawrence H. R. The lift distribution on low aspect ratio wings of subsonic speeds. JAS, 1951, vol. 18, No. 10.
2. Ефремов И. И., Ивченко В. М., Роман В. М., Годорашко Г. Т. Численное решение задач суперкавитации. Материалы по обмену опытом, НТО СП, 1969, вып. 125.
3. Логвинович Г. В. Гидродинамика течений со свободными границами. Киев, «Наукова думка», 1969.
4. Tulin M. P. Supercavitating flow past slender delta wings. J. Ship Res., 1959, vol. 3, No. 3.

УДК 532.528

ДИНАМИКА КАВИТАЦИОННОЙ ПОЛОСТИ В НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

А. М. АВАНЕСОВ, И. А. АВЕТИСЯН

(Сухуми)

Исследуется динамика сферической полости в неньютоновской жидкости, описываемой реологическим уравнением Рейнера — Ривлина [1].

Получено уравнение радиального движения полости, газ в полости подчиняется политропическому закону, учтено поверхностное натяжение.

Для ряда значений коэффициента поперечной вязкости уравнение движения полости решается численно. Показано влияние поперечной вязкости на процесс захлопывания паровой и газонаполненной полостей. Проведены также численные расчеты для скорости диссипации энергии и распределения давления в жидкости.

Динамика полостей в некоторых реологических средах исследовалась в работах [2-5].

1. Уравнение радиального движения полости. Пусть в неограниченной неньютоновской жидкости, описываемой моделью Рейнера — Ривлина [1], имеется сферическая полость радиуса $R(t)$. Рассматривается радиальное движение полости при изменении давления на бесконечности. Течение принимается сферически симметричным. В системе сферических координат уравнение движения жидкости в напряжениях и уравнение неразрывности можно записать в виде

$$(1.1) \quad \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{2\tau_{rr} - (\tau_{\varphi\varphi} + \tau_{\theta\theta})}{r}$$

$$(1.2) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) = 0$$

где u_r — радиальная скорость жидкости, r , t — координата и время, ρ — плотность жидкости, p — гидродинамическое давление.

Выражения τ_{rr} , $\tau_{\theta\theta}$, $\tau_{\varphi\varphi}$ определяются из тензорного уравнения состояния среды [1], которые в сферической системе координат записываются в виде

$$(1.3) \quad \tau_{ii} = 2\eta_0 e_{ii} + 4\eta_1 (e_{ii})^2, \quad e_{rr} = \partial u_r / \partial r, \quad e_{\theta\theta} = e_{\varphi\varphi} = u_r / r$$

Здесь η_0 — сдвиговая вязкость жидкости, η_1 — коэффициент поперечной вязкости.

Следуя [3], из (1.1) — (1.3) получим уравнение радиального движения полости

$$(1.4) \quad \rho \left(\dot{R}R + \frac{3}{2} R^2 \right) = p_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - p(\infty) - \frac{2\sigma}{R} - 4\eta_0 \frac{\dot{R}}{R} + 4\eta_1 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2$$

$$(\dot{R} = dR/dt, \quad \ddot{R} = d^2R/dt^2)$$

Здесь $p(\infty)$ — гидродинамическое давление на бесконечности, p_0 — начальное давление газа в полости, σ — поверхностное натяжение, R_0 — начальный радиус полости, γ — показатель политропы.

При выводе (1.4) использовались условие баланса сил на границе раздела фаз ($r = R$) и уравнение состояния газа

$$(1.5) \quad p(R) + 2\sigma R^{-1} - \tau_{rr}(R) = p_2(R)$$

$$(1.6) \quad p_2(R) = p_0 (R_0/R)^{3\gamma}$$

где $p_2(R)$ — давление газа на границе полости.

Решения уравнения (1.4) должны удовлетворять начальным условиям

$$(1.7) \quad R(0) = R_0, \quad \dot{R}(0) = 0$$

В безразмерной форме уравнение (1.4) и начальные условия (1.7) записываются в виде

$$(1.8) \quad \beta \frac{d^2\beta}{d\tau^2} + \left(\frac{3}{2} - \frac{C_1}{\beta^2} \right) \left(\frac{d\beta}{d\tau} \right)^2 + \frac{C}{\beta} \frac{d\beta}{d\tau} + \frac{2\sigma_1}{\beta} - \frac{p_{01}}{\beta^{3\gamma}} + p_1(\infty) = 0$$

$$(1.9) \quad \beta(0) = 1, \quad \dot{\beta}(0) = 0$$

$$\beta = \frac{R}{R_0}, \quad \tau = \frac{t}{R_0} \left(\frac{p(\infty) - p_0}{\rho} \right)^{1/2}, \quad C_1 = \frac{4\eta_1}{R_0^2 \rho}, \quad p_{01} = \frac{p_0}{p(\infty) - p_0}$$

$$C = \frac{4\eta_0}{R_0} (\rho(p(\infty) - p_0))^{1/2}, \quad p_1(\infty) = \frac{p(\infty)}{p(\infty) - p_0}, \quad \sigma_1 = \frac{\sigma}{R_0(p(\infty) - p_0)}$$

Формула для определения давления в жидкости вокруг газонаполненной полости определяется из (1.1) — (1.3), (1.5) и (1.6) в виде

$$(1.10) \quad p_1(\tau) = p_1(\infty) + \frac{\beta^2 \ddot{\beta}}{r_1} + \beta^2 \left(\frac{2\dot{\beta}}{r_1} - \frac{\beta^4}{2r_1^4} \right) + 3C_1 \frac{\beta^4 \dot{\beta}^2}{r_1^6}$$

$$(p_1(\tau) = p(t) / (p(\infty) - p_0), \quad r_1 = r / R_0)$$

Скорость диссипации энергии при движении границы газонаполненной полости можно получить [2] в форме

$$\Phi_1(\tau) = -4\pi [C\beta(\dot{\beta})^2 + C_1(\dot{\beta})^3]$$

$$(1.11)$$

$$\Phi_1(\tau) = \Phi(t) \rho^{1/2} R_0^{-2} (p(\infty) - p_0)^{-3/2}$$

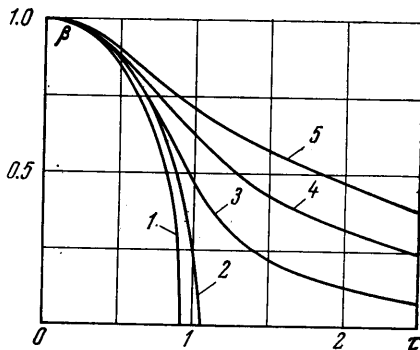
2. Результаты численных расчетов. Методом Рунге — Кутты решены уравнения (1.8), (1.10) и (1.11) на ЭЦВМ БЭСМ-6. Результаты вычислений представлены в виде графиков зависимости $\beta(\tau)$, $p_1(\tau)$, $\Phi_1(\tau)$ для различных значений η_1 . Наиболее характерные из них приведены на фиг. 1—4.

Для паровой полости давление внутри нее принимается постоянным.

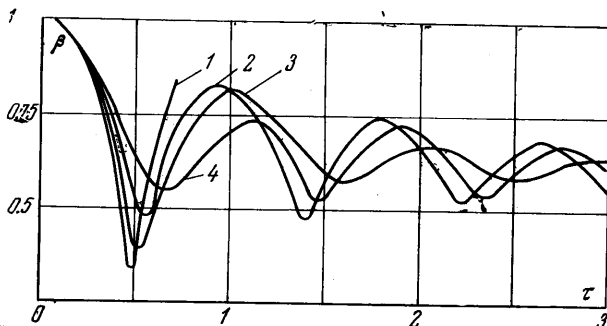
Расчеты проводились при следующих значениях гидродинамических параметров: $\rho = 1 \text{ г/см}^3$; $R_0 = 10^{-4} \text{ см}$, $\eta_0 = 0,01 \text{ г/см} \cdot \text{сек}$ $p(\infty) - p_0 = 10^6 \text{ дин/см}^2$, $\gamma = 0$, $\sigma = 0$.

Кривая 1 на фиг. 1 рассчитана в предположении $C = C_1 = 0$. Остальные кривые вычислены при значениях параметров $C = 0,4$ и $C_1 = 0, 0,5, 2,5$ (кривые 2, 3, 4, 5). Как видно, учет поперечной вязкости увеличивает время захлопывания паровой полости и в тем большей степени, чем выше значение η_1 . В случае газонаполненной полости предполагается, что

$$\sigma = 75 \text{ дин/см}, \quad \gamma = 1,4, \quad p_0 = 0,5 \cdot 10^6 \text{ дин/см}^2, \quad p(\infty) = 10^6 \text{ дин/см}^2.$$

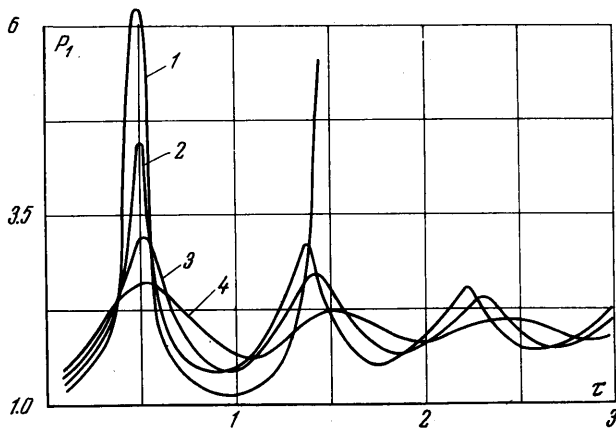


Фиг. 1

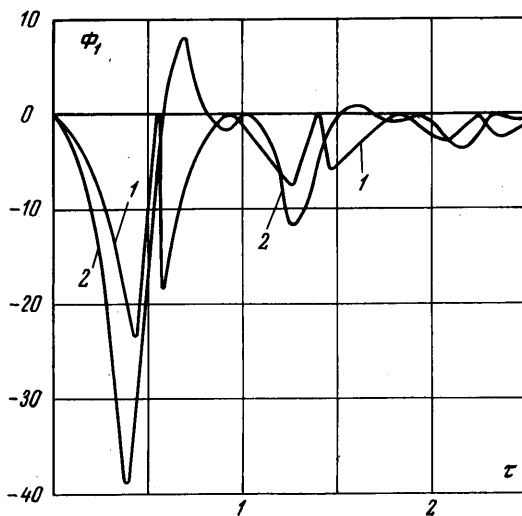


Фиг. 2

Кривая 1 на фиг. 2 вычислена при значениях параметров $C = C_1 = 0$. Кривые 2, 3, 4 получены соответственно при $C_1 = 0, 0.5, 2$ и $C = 0.57$. Можно видеть, что наряду со сдвиговой вязкостью учет коэффициента поперечной вязкости ускоряет затухание амплитуды пульсаций полости. Чем больше η_1 , тем быстрее затухает полость¹.



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 3 кривые $p_1(\tau)$ вычислены для $r/R_0 = 5$ по формуле (1.10). Нумерация кривых и значения гидродинамических параметров, при которых вычислялись они, остаются такими же, что и на фиг. 2. Из сравнения кривых на фиг. 2, 3 можно заключить, что максимумы давления достигаются в момент времени, когда полость принимает минимальные размеры. Сопоставления кривых на фиг. 3 показывают, что при учете поперечной вязкости, максимумы давления меньше, а минимумы — больше, чем в ньютоновской жидкости. Этот эффект с увеличением η_1 усиливается.

Кривые $\Phi_1(\tau)$ на фиг. 4 рассчитаны по формуле (1.11) при значениях $C = 0,57$ и $C_1 = 0, 0.5$ (кривые 1, 2).

Из приведенного анализа можно сделать вывод, что при исследовании кавитационных явлений в некоторых течениях жидкостей важно учитывать не только сдвиговую вязкость, но и коэффициент поперечной вязкости.

Авторы благодарят А. Т. Листрова за внимание к работе.

¹ На фиг. 2 для $\tau > 1.4$ продолжением кривой 3 следует считать кривую 4 и наоборот.

Поступила 28 III 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Рейнер М. Реология. М., «Наука», 1965.
2. Yang W. J., Yeh H. C. Approximate method for the determining of bubble dynamics in non-Newtonian fluids. Phys. Fluids, 1965, vol. 8, No. 4, p. 758.
3. Tanasawa I, Yang W. J. Dynamic behavior of a gas bubble in viscoelastic liquids. J. Appl. Phys., 1970, vol. 41, No. 11, p. 4526.
4. Fogler H. S., Goddard J. D. Collapse of spherical cavities in viscoelastic fluids. Phys. Fluids, 1970, vol. 13, No. 5, p. 1135.
5. Fogler H. S., Goddard J. D. Oscillations of a gas bubble in viscoelastic liquids subject to acoustic and impulsive pressure variations. J. Appl. Phys., 1971, vol. 42, No. 1, p. 259.

УДК 532.546

ПЛОСКАЯ СТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В ПЛАСТЕ, РАЗДЕЛЕННОМ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ТРЕЩИНОЙ

И. М. АБДУРАХМАНОВ, М. Г. АЛИШАЕВ

(Магачкала)

Рассматривается задача о комплексном потенциале для плоской стационарной фильтрации однородной жидкости в однородном бесконечном пласте, разделенном на две полуплоскости прямолинейной трещиной или же плохо проницаемой завесой. Сформулирована и решена соответствующая краевая задача теории функций. В качестве примера исследуется влияние трещины на фильтрационное поле, образуемое источником.

Указывается общий принцип, при помощи которого, имея решение задачи для трещины, можно получить решение в случае, когда трещина заменяется плохо проницаемой завесой.

1. Пусть бесконечный однородный пласт разделен на две полуплоскости D^+ и D^- трещиной или же плохо проницаемой завесой Γ , которую примем за действительную ось x . В каждой из этих полуплоскостей течение определяется соответственно комплексным потенциалом

$$W^\pm(z) = F(z) + \Phi^\pm(z), \quad z = x + iy$$

Здесь $F(z)$ — аналитическая на всей плоскости, за исключением изолированных особых точек, функция — комплексный потенциал при отсутствии трещины (или завесы), $\Phi^\pm(z)$ — искомые аналитические соответственно в верхней (D^+) и нижней (D^-) полуплоскостях функции, характеризующие возмущение фильтрационного поля трещиной. Функции $\Phi^\pm(z)$ определяются из условий, которым должны удовлетворять потенциалы W^\pm вдоль трещины (или завесы) Γ .

Если линия Γ представляет собой трещину, то давление P (следовательно, и потенциал скорости φ) по обе стороны от Γ имеет одно и то же предельное значение, а разность предельных значений функции тока ($\psi^+ - \psi^-$) представляет собой количество жидкости, протекающей через трещину в данном сечении x . Оно пропорционально изменению давления вдоль трещины, т. е.

$$(1.1) \quad \varphi^+ - \varphi^- = 0, \quad \psi^+ - \psi^- = 2\delta(\partial\varphi/\partial x)$$

В [1, 2] в качестве δ предлагаются соответственно выражения

$$(1.2) \quad \delta = \frac{hk_1}{k}, \quad \delta = \frac{h(h^2 + 3k)}{3k}$$

где $2h$ — ширина трещины, k — проницаемость пласта, k_1 — проницаемость забитой крупным песком трещины, $k_1 \gg k$. Вторая формула выведена в предположениях теории смазочного слоя вязкой жидкости. Как видно из (1.2), δ представляет собой линейную величину, изменяющуюся в достаточно широких пределах: если $k \sim 10^{-12}$ м², $h \sim 10^{-5} - 10^{-3}$ м, то $2\delta \sim 10^{-3} - 10^3$ м.