

в этом случае при изменении нагрузки p_{00} практически не меняется, оставаясь близким к p_0 , а подъемная сила изменяется только за счет изменения K . Использование микроканалов в аэростатических опорах позволяет добиться существенного увеличения подъемной силы опор. Например, для рассмотренной прямоугольной опоры с $L/B = 4$ при $m = 100$ подъемная сила при $K = \infty$ примерно в 3,5 раза больше, чем при $K = 0$.

В заключение отметим, что используемый итерационный метод решения линейной системы (7) сходится для любых ω , $0 < \omega < 2$, так как матрица коэффициентов имеет диагональное преобладание, т. е. имеет место соотношение

$$|a_{ij}| \geq |b_{ij}| + |c_{ij}| + |d_{ij}| + |e_{ij}|$$

со строгим неравенством для соседних с границей узлов, и неразложима [4].

Поступила 6 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Шейнберг С. А., Жедь В. П., Шишеев М. Д. Опоры скольжения с газовой смазкой. М., «Машиностроение», 1969.
2. Богачева А. В. Пневматические элементы систем автоматического управления. М., «Машиностроение», 1966.
3. Степаняц Л. Г. Некоторые методы газодинамической теории смазки. Аэротермодинамика. Л., «Машиностроение», 1967. (Тр. Ленингр. политехн. ин-та, № 280.)
4. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1963.

УДК 532. 528

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ КАВИТАЦИОННОГО ОБТЕКАНИЯ КРЫЛЬЕВ МАЛОГО УДЛИНЕНИЯ

И. И. ЕФРЕМОВ, Р. А. СОРОКА

(Киев)

Рассмотрена линеаризованная задача о полностью кавитирующем крыле малого удлинения λ . Система сингулярных интегральных уравнений кавитирующей несущей поверхности приводится к одномерным уравнениям путем применения аппроксимации Лоуренса. Для численного решения этой системы использован метод дискретных особенностей. Приведены зависимости коэффициента подъемной силы и длины каверны от числа кавитации для прямоугольных крыльев при $0.25 \leq \lambda \leq 4$.

1. Для вывода интегральных уравнений теории кавитирующей несущей поверхности воспользуемся методом особенностей. Для этого определим скорость, возмущенную элементарным П-образным вихрем интенсивности $\gamma(\xi, \eta)$. Составляющую скорости по оси z в точке (x, y, z) от несущего вихря, лежащего в плоскости xu и параллельного оси y , определим из закона Био — Савара

$$dw_1 = \frac{\gamma(\xi, \eta) d\xi d\eta}{4\pi} \frac{x - \xi}{r^3}, \quad r = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{1/2}$$

Вертикальные составляющие скорости dw_2 от полубесконечной вихревой нити с началом в точке $(\xi, \eta, 0)$ и точке $(\xi, \eta + d\eta, 0)$ соответственно будут

$$dw_2' = \frac{\gamma(\xi, \eta) d\xi}{4\pi} \frac{y - \eta}{(y - \eta)^2 + z^2} \left(1 + \frac{x - \xi}{r} \right)$$

$$dw_2'' = - \frac{\gamma(\xi, \eta) d\xi}{4\pi} \frac{y - \eta - d\eta}{(y - \eta - d\eta)^2 + z^2} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{x - \xi}{\gamma(x - \xi)^2 + (y - \eta - d\eta)^2 + z^2} \right)$$

Легко видеть, что

$$dw_2' + dw_2'' = - \frac{\gamma(\xi, \eta) d\xi d\eta}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{y - \eta}{(y - \eta)^2 + z^2} \left(1 + \frac{x - \xi}{r} \right) \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = - \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{x - \xi}{r^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{(x - \xi)(y - \eta)}{[(x - \xi)^2 + z^2]r} \right\}$$

Учитывая два последних соотношения, получим после некоторых преобразований суммарную составляющую проекцию скорости по оси z от П-образного вихря в виде

$$dw(x, y, z) = \frac{\gamma(\xi, \eta) d\xi d\eta}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{y - \eta}{(y - \eta)^2 + z^2} \left[1 + \frac{(x - \xi)(r^2 + z^2)}{r[(x - \xi)^2 + z^2]} \right] \right\}$$

Если в точке $(\xi, \eta, 0)$ расположен источник интенсивности $q(\xi, \eta)$, то индуцируемая им радикальная скорость и ее составляющая вдоль оси x будут

$$v_r = \frac{1}{4\pi} \frac{q(\xi, \eta)}{r^2},$$

$$u = (v_r)_x = \frac{1}{4\pi} \frac{x - \xi}{r^3} q(\xi, \eta)$$

2. Обозначим через S проекцию несущей поверхности $z = z(x, y)$ на плоскость xy , а через Σ — проекцию каверны, начинающейся у передней кромки, на ту же плоскость. Тогда кавитирующую несущую поверхность можно представить в виде непрерывного вихревого слоя и слоя источников-стоков, покрывающих соответственно области S и Σ .

Запишем известные соотношения для скачка нормальной и касательной составляющей возмущенной скорости при переходе через поверхности S и Σ

$$u(x, y, +0) - u(x, y, -0) = 1/2\gamma(x, y)$$

$$w(x, y, +0) - w(x, y, 0) = 1/2q(x, y)$$

Тогда условия непроницаемости на крыле, постоянства давления в каверне и замыкания каверны

$$V_0 \frac{dz_-(x, y)}{dx} = w(x, y), \quad \sigma = \frac{p - p_k}{1/2\rho V_0^2} = 2u, \quad \iint_{\Sigma} q(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0$$

после подстановки в них $u(x, y)$ и $w(x, y)$ приводят к следующей системе интегральных уравнений:

$$\frac{dz_-(x, y)}{dx} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \iint_S \frac{\gamma(\xi, \eta)}{V_0} \left(1 + \frac{r}{x - \xi} \right) \frac{d\xi d\eta}{y - \eta} - \frac{1}{2V_0} q(x, y)$$

$$(2.1) \quad \sigma = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{q(\xi, \eta)}{V_0} \right] \frac{y - \eta}{(x - \xi)r} d\xi d\eta + \frac{\gamma(x, y)}{V_0}$$

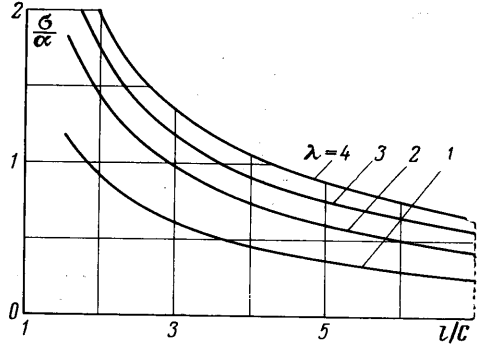
$$\iint_{\Sigma} q(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0$$

3. Как показал Лоуренс [1], для крыльев малых удлинений применение аппроксимации

$$(3.1) \quad [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{1/2} = 1/2\{ |x - \xi| + [(x - \xi)^2 + b^2]^{1/2} \}$$

позволяет свести двумерное интегральное уравнение несущей поверхности к одномерному с переменной интегрирования по направлению хорды. Расчеты по указанной аппроксимации хорошо согласуются с экспериментальными данными и другими известными решениями для $\lambda \leq 4$. Воспользуемся аппроксимацией Лоуренса (3.1) для приведения системы двумерных сингулярных интегральных уравнений к одномерным, причем для простоты ограничимся крыльями прямоугольной формы в плане.

Умножим первое из уравнений (2.1) на $(b^2 - y^2)^{1/2}$ и проинтегрируем обе части по y для $|y| \leq b$. Получим



Фиг. 1

$$\int_{-b}^b \frac{dz_-(x, y)}{dx} \sqrt{b^2 - y^2} dy \equiv K(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \sqrt{b^2 - y^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \iint_s \frac{\gamma(\xi, \eta)}{V_0} \left(1 + \frac{r}{x - \xi} \right) \frac{d\xi d\eta}{y - \eta} \right\} dy - \frac{1}{2} \int_{-b}^b \frac{q(x, y)}{V_0} \sqrt{b^2 - y^2} dy$$

Преобразуя выражение в правой части, получаем

$$K(x) = -\frac{1}{4} \int_0^c \left[1 + \frac{|x - \xi|}{2(x - \xi)} + \frac{\sqrt{(x - \xi)^2 + b^2}}{2(x - \xi)} \right] d\xi \int_{-b}^b \frac{\gamma(\xi, \eta)}{V_0} d\eta - \frac{1}{2} \int_{-b}^b \frac{q(x, y)}{V_0} \sqrt{b^2 - y^2} dy$$

Подобным же образом, преобразуя второе уравнение (2.1), имеем

$$\frac{\sigma l b^2}{2} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\sqrt{(x - \xi)^2 + b^2} - |x - \xi|}{x - \xi} d\xi \int_{-b}^b \frac{q(\xi, \eta)}{V_0} d\eta + \int_{-b}^b \frac{\gamma(x, y)}{V_0} \sqrt{b^2 - y^2} dy$$

Здесь b, c — размах и хорда крыла, l — длина каверны. Кроме того, предполагается, что $q(\xi, \pm b) = 0$, а ширина каверны постоянна и равна ширине крыла. Допустим, что интенсивность вихрей и источников-стоков изменяется вдоль размаха по эллиптическому закону, т. е.

$$\gamma(\xi, \eta) = \gamma(\xi) [1 - (\eta/b)^2]^{1/2}, \quad q(\xi, \eta) = q(\xi) [1 - (\eta/b)^2]^{1/2}$$

Кроме того, ограничимся случаем плоского крыла ($dz_-/dx = \alpha$). Приводя (2.1) к безразмерному виду, получим окончательно

$$\begin{aligned} \frac{3\pi}{8\lambda} \int_0^1 K_1(x, \xi) \gamma(\xi) d\xi + q(x) &= \frac{3\pi}{4} \\ \frac{8}{3\pi} \gamma(x) + \frac{1}{\lambda} \int_0^s K_2(x, \xi) q(\xi) d\xi &= \sigma, \quad \int_0^s q(\xi) d\xi = 0 \\ (3.2) \quad K_1(x, \xi) &= 1 + \frac{|x - \xi|}{2(x - \xi)} + \frac{\sqrt{(x - \xi)^2 + \lambda^2/4}}{2(x - \xi)} \\ K_2(x, \xi) &= \frac{\sqrt{(x - \xi)^2 + \lambda^2/4}}{x - \xi} - \frac{|x - \xi|}{x - \xi}, \quad \lambda = \frac{2b}{c}, \quad s = \frac{1}{c} \end{aligned}$$

4. Как показано в [2], сходимость численного решения системы сингулярных интегральных уравнений (3.2) существенно ускорится в новых переменных $\tau = \sqrt{\xi}$, $t = \sqrt{x}$, в которых систему (3.2) после некоторых преобразований запишем в виде

$$\begin{aligned} (4.1) \quad \int_0^1 K_1(t, \tau) \gamma(\tau) \tau d\tau + \frac{4\lambda}{3\pi} q(t) &= 4\lambda \\ \frac{4\lambda}{3\pi} \gamma(t) + \int_0^{\sqrt{s}} K_2(t, \tau) q(\tau) \tau d\tau &= 1/2 \sigma \lambda, \quad \int_0^{\sqrt{s}} q(\tau) \tau d\tau = 0 \end{aligned}$$

Применив метод дискретных особенностей к системе (4.1), получим систему $2N + M + 1$ линейных алгебраических уравнений

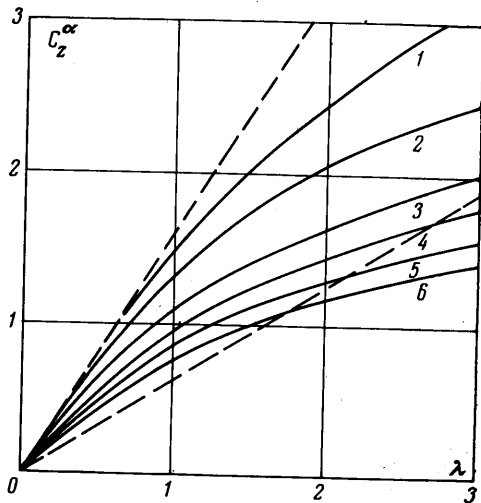
$$\begin{aligned} & \frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} K_1 \left[\frac{4i+3}{4N}, \frac{4j+1}{4N} \right] \left(j + \frac{1}{4} \right) \gamma_j + \frac{4\lambda}{3\pi} q_i = \lambda \quad (i=0,1,\dots,N-1) \\ & \frac{4\lambda}{3\pi} \gamma_i + \frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} K_2 \left[\frac{4i+1}{4N}, \frac{4j+3}{4N} \right] \left(j + \frac{3}{4} \right) q_j + \\ & + \frac{(\sqrt{s}-1)}{M} \sum_{r=0}^{M-1} K_2 \left[\frac{4i+1}{4N}, 1 + \frac{(4r+3)(\sqrt{s}-1)}{4M} \right] \times \\ & \times \left[1 + \frac{(\sqrt{s}-1)(4r+3)}{4M} \right] q_{N+r} - \frac{1}{2} \sigma \lambda = 0 \quad (i=0,1,\dots,N-1) \\ & \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} K_2 \left[1 + \frac{\sqrt{s}-1}{M} \left(i - N + \frac{1}{4} \right), \frac{4j+3}{4N} \right] \left(j + \frac{3}{4} \right) q_j + \\ & + \frac{\sqrt{s}-1}{M} \sum_{r=0}^{M-1} K_2 \left[1 + \frac{\sqrt{s}-1}{M} \left(i - N + \frac{1}{4} \right), 1 + \frac{\sqrt{s}-1}{M} \left(r + \frac{3}{4} \right) \right] \times \\ & \times \left[1 + \frac{\sqrt{s}-1}{M} \left(r + \frac{3}{4} \right) \right] q_{N+r} - \frac{1}{2} \sigma \lambda = 0 \quad (i=N,N+1,\dots,N+M-1) \\ & \frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} \left(j + \frac{3}{4} \right) q_j + \frac{\sqrt{s}-1}{M} \sum_{r=0}^{M-1} \left[1 + \frac{(\sqrt{s}-1)(j+3/4)}{M} \right] q_{N+r} = 0 \end{aligned}$$

По известным значениям γ_j коэффициент подъемной силы определяется из соотношения

$$c_z^\alpha = \frac{\pi}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(j + \frac{1}{4} \right) \gamma_j$$

Для конкретного примера при численном решении хорда крыла разбивалась на 10, а длина каверны на 20 частей, т. е. принималось $N = 10$, $M = 20$. Значения интенсивности вихрей и источников-стоков, а также числа кавитации σ/a определялись для значений l/c , равных 1.56, 2.25, 3.06, 4.00, 5.06, 6.25, 7.56.

На фиг. 1 приведен график зависимости числа кавитации от длины каверны для различных удлинений. Отметим, что при фиксированном λ имеет место соотношение $\sigma l = \text{const}$, что согласуется с выводами Г. В. Логвиновича [3], полученными на основе применения теоремы импульсов к пространственным кавитационным течениям. Значение коэффициента подъемной силы как функции удлинения при различных σ/a приведено на фиг. 2. Кривая 1 соответствует безотрывному [1], а кривые 2-6 — кавитационному обтеканию при $\sigma/a = 1.96, 1.35, 1.02, 0.64, 0.45$.



Фиг. 2

Пунктирные кривые соответствуют предельным случаям $\lambda \rightarrow 0$ при безотрывном обтекании и при $\sigma = 0$. Зависимость c_z^α от удлинения при $\sigma = 0$ близка к теоретическим значениям $\pi\lambda/5$, полученным в [4].

Поступила 2 IV 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Lawrence H. R. The lift distribution on low aspect ratio wings of subsonic speeds. JAS, 1951, vol. 18, No. 10.
2. Ефремов И. И., Ивченко В. М., Роман В. М., Годорашко Г. Т. Численное решение задач суперкавитации. Материалы по обмену опытом, НТО СП, 1969, вып. 125.
3. Логвинович Г. В. Гидродинамика течений со свободными границами. Киев, «Наукова думка», 1969.
4. Tulin M. P. Supercavitating flow past slender delta wings. J. Ship Res., 1959, vol. 3, No. 3.

УДК 532.528

ДИНАМИКА КАВИТАЦИОННОЙ ПОЛОСТИ В НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

А. М. АВАНЕСОВ, И. А. АВЕТИСЯН

(Сухуми)

Исследуется динамика сферической полости в неньютоновской жидкости, описываемой реологическим уравнением Рейнера — Ривлина [1].

Получено уравнение радиального движения полости, газ в полости подчиняется политропическому закону, учтено поверхностное натяжение.

Для ряда значений коэффициента поперечной вязкости уравнение движения полости решается численно. Показано влияние поперечной вязкости на процесс захлопывания паровой и газонаполненной полостей. Проведены также численные расчеты для скорости диссипации энергии и распределения давления в жидкости.

Динамика полостей в некоторых реологических средах исследовалась в работах [2-5].

1. Уравнение радиального движения полости. Пусть в неограниченной неньютоновской жидкости, описываемой моделью Рейнера — Ривлина [1], имеется сферическая полость радиуса $R(t)$. Рассматривается радиальное движение полости при изменении давления на бесконечности. Течение принимается сферически симметричным. В системе сферических координат уравнение движения жидкости в напряжениях и уравнение неразрывности можно записать в виде

$$(1.1) \quad \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{2\tau_{rr} - (\tau_{\varphi\varphi} + \tau_{\theta\theta})}{r}$$

$$(1.2) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) = 0$$

где u_r — радиальная скорость жидкости, r , t — координата и время, ρ — плотность жидкости, p — гидродинамическое давление.

Выражения τ_{rr} , $\tau_{\theta\theta}$, $\tau_{\varphi\varphi}$ определяются из тензорного уравнения состояния среды [1], которые в сферической системе координат записываются в виде

$$(1.3) \quad \tau_{ii} = 2\eta_0 e_{ii} + 4\eta_1 (e_{ii})^2, \quad e_{rr} = \partial u_r / \partial r, \quad e_{\theta\theta} = e_{\varphi\varphi} = u_r / r$$

Здесь η_0 — сдвиговая вязкость жидкости, η_1 — коэффициент поперечной вязкости.

Следуя [3], из (1.1) — (1.3) получим уравнение радиального движения полости

$$(1.4) \quad \rho \left(\dot{R}R + \frac{3}{2} R^2 \right) = p_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - p(\infty) - \frac{2\sigma}{R} - 4\eta_0 \frac{\dot{R}}{R} + 4\eta_1 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2$$

$$(\dot{R} = dR/dt, \quad \ddot{R} = d^2R/dt^2)$$

Здесь $p(\infty)$ — гидродинамическое давление на бесконечности, p_0 — начальное давление газа в полости, σ — поверхностное натяжение, R_0 — начальный радиус полости, γ — показатель политропы.

При выводе (1.4) использовались условие баланса сил на границе раздела фаз ($r = R$) и уравнение состояния газа

$$(1.5) \quad p(R) + 2\sigma R^{-1} - \tau_{rr}(R) = p_2(R)$$

$$(1.6) \quad p_2(R) = p_0 (R_0/R)^{3\gamma}$$

где $p_2(R)$ — давление газа на границе полости.