

УДК 538.4:532.54

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ПЛАЗМЫ ЗА ДВИЖУЩИМСЯ ПЕРЕДНИМ ФРОНТОМ

В. А. МАРЕЕВ

(Москва)

Рассмотрено нестационарное движение проводящего и оптически прозрачного газа, отделяемого от разреженной покоящейся среды фронтом S , который проходит через зону неоднородного магнитного поля. Предложены граничные условия на S для нескольких механизмов взаимодействия S с разреженной средой. Получены решения в линейном приближении. С помощью численных методов найдены решения общей системы уравнений. Установлен резко немонотонный характер движения S в неоднородном магнитном поле.

1. Моделирование движущегося плазменного фронта S ударной волной (см., например, [1]) при достаточно высоком разрежении покоящегося перед S газа, когда параметр Кнудсена $K_n = \lambda/h \geq 1$ (h — характерный размер, λ — длина свободного пробега молекул покоящегося газа), оказывается невозможным.

Будем считать, что поверхность S , отделяющая плазму I от покоящегося разреженного газа 2 , невесома, непроницаема и ее скорость V намного больше хаотической скорости молекул газа 2 . В этом случае влияние газа 2 на течение газа 1 осуществляется только посредством возникающей силы сопротивления, которая действует на движущуюся поверхность S и обусловлена взаимодействием S с неподвижными частицами газа 2 . Поэтому в данной постановке для описания течения газа 1 за фронтом S достаточно использовать систему уравнений магнитной газовой динамики с граничными условиями на S , полученными из рассмотрения механизмов взаимодействия газа 2 с S .

В настоящей работе исследуется случай абсолютно неупругих соударений молекул газа 2 с S , т. е. частицы «налипают» на S , случай абсолютно упругих соударений, а также течения, при которых сила сопротивления P , действующая на единицу поверхности, не зависит от скорости.

Силовое воздействие со стороны газа 1 на поверхность S представляет собой газодинамическое давление p_s , так как скорость направленного движения плазмы вблизи S совпадает с V .

Таким образом, уравнение движения невесомой поверхности принимает вид $p_s = P$ или для перечисленных выше случаев соответственно

$$(1.1) \quad p_s = \rho_\infty (V^2 + \dot{V}S(t))$$

$$(1.2) \quad p_s = 2\rho_\infty V^2$$

$$(1.3) \quad p_s = k = \text{const}$$

Здесь ρ_∞ — плотность газа 2 , $S(t)$ — закон движения S , $\dot{V} = dV/dt$.

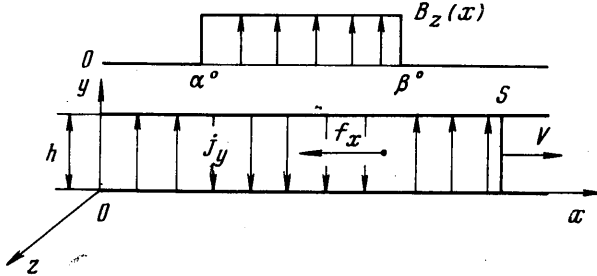
В дальнейшем одно из соотношений (1.1)–(1.3) совместно с условием непротекания

$$(1.4) \quad u_s = V$$

будут играть роль граничных условий на переднем фронте плазмы при $x = S(t)$. Индексом s отмечены параметры газа 1 непосредственно за передним фронтом.

2. Наиболее простое течение с условиями (1.1)—(1.3) и (1.4) осуществляется при следующих обстоятельствах. Пусть бесконечно тонкая перегородка S отделяет газ с параметрами $p_1, \rho_1, u_1 = 0$ (газ 1) от пространства, заполненного разреженным газом 2. В момент времени $t = 0$ эта поверхность, на которой выполняются условия (1.1)—(1.3), (1.4), освобождается от закрепления и начинает двигаться в сторону области с меньшим давлением.

Нетрудно убедиться, что поставленная таким образом задача автомодельна и совпадает с задачей о выдвигении поршня из заполненного газом полупространства



Фиг. 1

с постоянной скоростью [2]. Действительно, поверхность S невесома и в систему определяющих параметров входят только две константы с независимыми размерностями — давление и плотность. Следовательно, единственная безразмерная переменная $\lambda = x / a_1 t$ ($a_1^2 = \gamma p_1 / \rho_1$), и поверхность S движется с постоянной скоростью.

Однако в данной задаче вместо задания скорости поршня на поверхности S имеет место условие (1.4) и одно из соотношений (1.1)—(1.3).

Известно [2], что при этом по покоящемуся газу распространяется центрированная волна Римана, вблизи S образуется однородный поток и во всей области течения имеет место соотношение

$$(2.1) \quad u = \frac{2a_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/2\gamma} \right]$$

Здесь u и p — соответственно скорость и давление движущегося газа 1.

Таким образом, задача об определении скорости поверхности S , давления вблизи нее и параметров однородного потока, примыкающего к S , сводится к решению алгебраической системы уравнений, состоящей из соотношений (1.1)—(1.4) и (2.1).

3. Рассмотрим плоское нестационарное течение совершенного проводящего и излучающего как оптически прозрачное тело [3] газа по каналу, стенки которого — полубесконечные электроды (фиг. 1), за движущейся поверхностью S .

Будем считать, что в отсутствие магнитного поля по каналу распространяется однородный поток газа. Такая ситуация может возникнуть, если область однородного распределения параметров за поверхностью S достаточно велика (см. задачу п. 2) по сравнению с характерным размером h .

Предположим также, что течение в канале сверхзвуковое ($M > 1$) и левее $x = 0$ оказывается невозмущенным в присутствии магнитного поля (токи замыкаются только в электродной части канала).

Пусть движение осуществляется в магнитном поле следующей структуры:

$$(3.1) \quad \mathbf{B} = (0, 0, B(x)) \quad B(x) = B_* [H(x - \alpha^0) - H(x - \beta^0)]$$

Здесь $H(x)$ — функция Хевисайда.

Рассматриваемая конфигурация канала и магнитного поля (фиг. 1) при $R_m \ll 1$ обеспечивает одномерный характер протекающих токов [4].

При этом

$$(3.2) \quad \mathbf{j} = (0, j_y(x, t), 0), \quad j_y = \sigma(\Delta\varphi - uBc^{-1}) \\ \mathbf{f} = (f_x(x, t), 0, 0), \quad f_x = j_y Bc^{-1}, \quad Q = j_y^2 / \sigma$$

Все обозначения общеприняты.

Вследствие отсутствия внешней нагрузки ток замыкается в электродной зоне канала через проводящий газ, и суммарный ток I в пространстве, занятом плазмой, равен нулю

$$(3.3) \quad I = \int_0^{s(t)} j_y(x, t) dx = 0$$

В силу сделанных предположений система уравнений магнитной газовой динамики с учетом (3.3) при условии, что газ излучает, как оптически прозрачное тело, и $\sigma^\circ = \text{const}$, имеет вид

$$(3.4) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = N f_x \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} = (\gamma - 1)(N q_n + N_R q_r)$$

$$(3.5) \quad \left. \begin{aligned} u &= dS(t) / dt \\ p &= d(S\dot{u} + u^2) & (d = \rho_\infty / \rho_*) \\ p &= du^2 & (d = 2\rho_\infty / \rho_*) \\ p &= d & (d = k / \rho_* D_*^2) \end{aligned} \right\} (x = S(t))$$

$$(3.6) \quad u = 1, \quad \rho = 1, \quad p = d \quad (x = 0)$$

$$\left(N = \frac{\sigma_* B_*^2 h}{c^2 \rho_* D_*}, \quad N_R = \frac{4\Sigma D_*^5 h}{R^4 l_1^* \rho_*}, \quad q_r = -\frac{p^4}{l_1 \rho_*^4}, \right.$$

$$\left. q_n = \sigma f_x^2, \quad f_x = \left(\int_0^{s(t)} u b dx - S(t) u b \right) B / S(t) \right)$$

Все величины, входящие в (3.4)–(3.6), безразмерные. Размерные (отмеченные градусом) и безразмерные (без индекса) связаны между собой соотношениями

$$(3.7) \quad x^\circ = hx, \quad t^\circ = ht / D_*, \quad V^\circ = D_* V, \quad l_1^\circ = l_1^* l_1 \\ \rho^\circ = \rho_* \rho, \quad p^\circ = \rho_* D_*^2 p, \quad B^\circ = B_* b \\ \mathbf{j}^\circ = \frac{\sigma_*}{c} B_* D_* \mathbf{j}, \quad \varphi^\circ = \frac{h}{c} B_* D_* \varphi, \quad \sigma^\circ = \sigma_* \sigma$$

Здесь все обозначения общеприняты. Размерные величины B_* , σ_* , l_1^* — соответственно характерные значения магнитного поля, проводимости и длины свободного пробега излучения. В качестве характерной скорости D_* и плотности ρ_* газа приняты значения этих параметров в сечении $x = 0$. Величина N является параметром магнитогидродинамического взаимодействия, N_R — «радиационный» параметр.

4. При малых значениях параметра магнитогидродинамического взаимодействия N и радиационного параметра N_R ($N \sim N_R$) решение системы (3.4)–(3.6) можно искать в виде следующих рядов:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} u &= 1 + Nu_n(x, t) + N_R u_r(x, t) + \dots \\ \rho &= 1 + N\rho_n(x, t) + N_R \rho_r(x, t) + \dots \\ p &= d + Np_n(x, t) + N_R p_r(x, t) + \dots \\ S(t) &= t - N\psi_n(t) - N_R \psi_r(t) - \dots \end{aligned}$$

Подставляя (4.1) в уравнения (3.4)–(3.6), получаем две линейные системы вида

$$(4.2) \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial p_i}{\partial x} = 0$$

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial p_i}{\partial x} &= f_i \\ \frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial p_i}{\partial x} + \gamma d \frac{\partial u_i}{\partial x} &= (\gamma - 1) q_i \end{aligned}$$

$$(4.3) \quad u_i = p_i = \rho_i = 0 \quad (x = 0)$$

$$(4.4) \quad \left. \begin{aligned} \dot{u}_i &= -\dot{\psi}_i \\ p_i &= -d(t\ddot{\psi}_i + 2\dot{\psi}_i) \\ p_i &= -2d\dot{\psi}_i \\ p_i &= 0 \end{aligned} \right\} (x = t)$$

$$\left(i = n, r, f_n = b \left(\int_0^t b dt - bt \right) / t, f_r = 0, \right.$$

$$\left. q_n = f_n^2/b, q_r = -d^2/l_1 \right)$$

Уравнения (4.2) имеют три следующие действительные семейства характеристик:

$$\frac{dx}{dt} = 1 \pm a_0$$

$$(4.5) \quad \pm dp_i + a_0 du_i = [a_0 f_i \pm (\gamma - 1) q_i] dt$$

$$(4.6) \quad \frac{dx}{dt} = 1, d\rho_i = -\frac{\partial u_i}{\partial x} dt \quad (a_0 = (\gamma d)^{1/2})$$

где a_0 — скорость звука в сечении $x = 0$, определяемая только начальным распределением параметров газов 1 и 2 (см. (3.6)).

Полученная линейная система была исследована методом характеристик аналогично [1].

5. Рассматривая течение проводящего ($q_r = 0$) газа в магнитном поле (3.1), нетрудно получить значение его параметров во всей области течения.

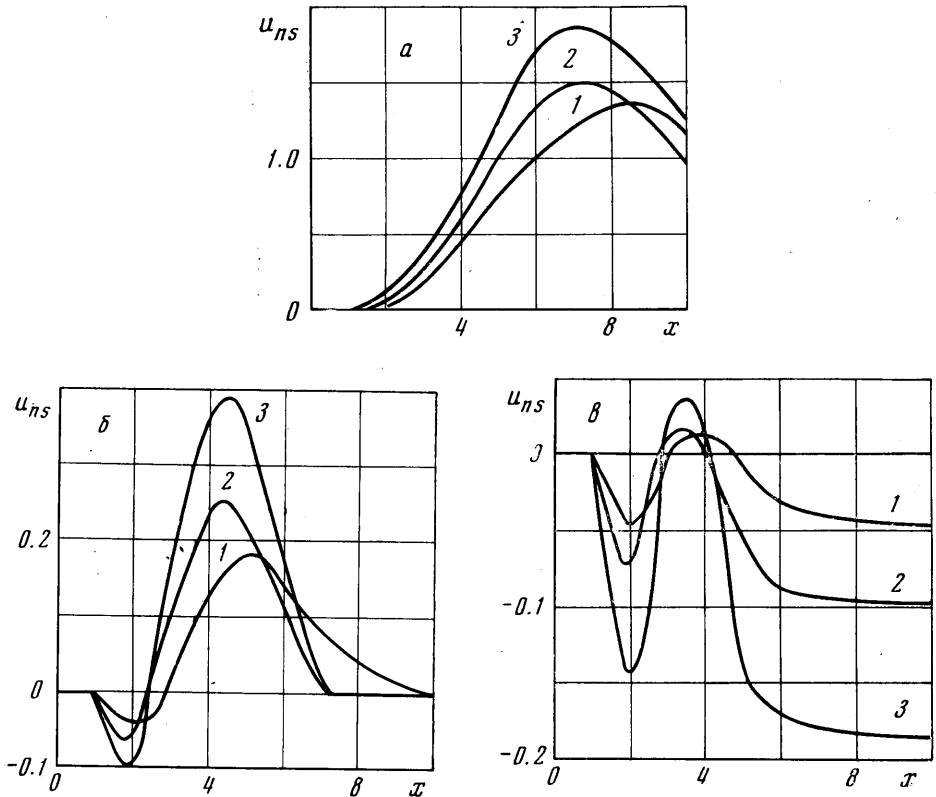
Приведем здесь только асимптотические значения возмущений скорости переднего фронта плазмы u_{ns}^* на достаточно большом расстоянии от зоны

магнитного поля вниз по потоку (при $l \rightarrow \infty$), соответствующие (1.2) и (1.3)

$$(5.1) \quad u_{ns}^* = q_{\Sigma} \frac{(\gamma - 1) - a_0}{a_0(1 + a_0)(2a_0/\gamma + 1)}$$

$$u_{ns}^* = q_{\Sigma} \frac{(\gamma - 1) - a_0}{a_0(1 + a_0)}$$

Здесь q_{Σ} — суммарная джоулева диссипация в канале. В [1] было показано, что асимптотические значения возмущений скорости фронта u_{ns}^* ,



Фиг. 2

когда в качестве модели переднего фронта использовалась ударная волна, отрицательны, что приводит к его замедлению после выхода из зоны магнитного поля. В данном случае получен качественно новый результат о возможности ускорения переднего фронта при $a_0 < \gamma - 1$ (5.1), так как при этом интеграл, взятый от правой части (4.5) вдоль характеристики первого семейства, положителен.

В качестве примера рассмотрим распространение переднего фронта при $\alpha = 1$, $\beta = 2$ и $\gamma = 1.4$.

На фиг. 2, а, б, в, соответствующих параметру $a_0 = 0.2$, $a_0 = 0.4$, $a_0 = 0.6$, показано изменение возмущений скорости поверхности в зависимости от положения фронта (кривые 1, 2, 3 соответствуют граничным условиям (1.1)–(1.3)). Скорость переднего фронта меняется крайне **немонотонно**, что качественно соответствует ранее полученным теоретическим [1] и экспериментальным [5] результатам.

При движении S в верхней по потоку концевой зоне магнитного поля наблюдается уменьшение скорости движения, что связано с возникновением тормозящей силы f_x в области $\alpha < x < S(t)$ (фиг. 1). Последующее увеличение скорости переднего фронта происходит из-за того, что работа газа по преодолению сопротивления магнитного поля в области $\alpha < x < \beta$ переходит в Джоулево тепло, выделяющееся в электродной зоне, а газ, находящийся правее сечения $x = \beta$, не испытывает никакого силового воздействия.

Нетрудно убедиться, что уменьшение параметра a_0 приводит к возрастанию скорости S из-за ослабления влияния тормозящей силы f_n по сравнению с Джоулевым тепловыделением q_n . При этом правая часть (4.5) увеличивается ($f_n < 0$).

Как следует из приведенных графиков, при использовании граничных условий (1.1) — (1.3) колебания скорости V переднего фронта плазмы увеличиваются, что объясняется следующим образом. Невесомая поверхность S , на которую налипают молекулы газа 2 в случае (1.1), более инерционна, чем при использовании граничного условия (1.2), когда имеет место абсолютно упругое отражение от поверхности S . Наибольшим колебаниям скорости V переднего фронта соответствует условие (1.3), так как при этом сила сопротивления не зависит от скорости V .

6. Исследуем влияние излучения на движение газа за передним фронтом при $l_1^c = \text{const}$.

Путем несложных преобразований можно получить значения параметров непосредственно за движущейся поверхностью S .

В этом случае будем иметь

$$(6.1) \quad \begin{aligned} u_{rs} &= -\frac{(\gamma - 1)a_0^7 t}{\gamma^5(1 + a_0)(3a_0/\gamma + 1)}, & p_{rs} &= u_{rs} 3a_0^2 \\ u_{rs} &= -\frac{(\gamma - 1)a_0^7 t}{\gamma^4(1 + a_0)(2a_0/\gamma + 1)}, & p_{rs} &= u_{rs} 2a_0^2/\gamma \\ u_{rs} &= -\frac{(\gamma - 1)a_0^7 t}{\gamma^4(1 + a_0)}, & p_{rs} &= 0 \end{aligned}$$

Уменьшение скорости переднего фронта и давления вблизи последнего объясняется высвечиванием энергии газом в области $0 < x < S(t)$. Наблюдаемое ослабление воздействия излучения при уменьшении параметра a_0 связано с уменьшением объемных потерь энергии q_r .

7. Система уравнений (3.4) — (3.6) была численно проинтегрирована при конечных значениях параметров N и N_R , когда магнитное поле определяется формулами (3.1). Проведенные расчеты показали, что сохраняется немонотонный характер изменения скорости V переднего фронта. При этом увеличение N приводит к более сильным колебаниям скорости в области, занятой магнитным полем.

Особенностью распределения параметров газа в канале является образование в нижней по потоку концевой зоне магнитного поля сжатого слоя газа, возникновение которого объясняется тормозящим действием электромагнитной силы f_x . Наблюдаемое при этом уменьшение скорости газа может привести при достаточно больших числах N к образованию области дозвукового течения и к последующему формированию ударной волны, возможность существования которой была доказана в работе [6].

При течении излучающего газа за движущимся передним фронтом уменьшение скорости V переднего фронта тем более сильное, чем больше N_R .

Полученные результаты показали, что линейная теория дает хорошее количественное совпадение с точным решением (с точностью до 5%) при $N \leq 0.25$ и $N_R \leq 10$.

Интегрирование проводилось также и для движения сильной ударной волны в зоне входа и выхода из магнитного поля с учетом излучения. Качественно результаты совпадают с приведенными.

В заключение автор благодарит А. Б. Ватажина за полезные обсуждения.

Поступила 30 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ватажин А. Б.* Распространение ударной волны в канале при взаимодействии сжатого в ней газа с неоднородным магнитным полем. ПММ, 1970, т. 34.
2. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике, Изд. 6. М., «Наука», 1970.
3. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных явлений, Изд 2. М., «Наука», 1966.
4. *Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А.* Магнитогидродинамические течения в каналах. М., «Наука», 1970.
5. *Кашкин Ю. Ф.* Исследование концевых токов при движении плазмы по каналу электроразрядной трубы через неоднородное магнитное поле. ПМТФ, 1970, № 1.
6. *Губарев А. В., Дегтярев Л. М., Фаворский И. П.* Некоторые особенности сверхзвукового течения электропроводного газа в канале. Изв. АН СССР, МЭГ, 1968, № 3.