УДК 532.516

СДВИГОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ СО СТЕПЕННЫМ РЕОЛОГИЧЕСКИМ ЗАКОНОМ ПРИ НАЛИЧИИ ПОСТОЯННОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ СКОРОСТИ

Л. К. МАРТИНСОН, К. Б. ПАВЛОВ

(*Москва*)

В работе рассматриваются некоторые плоские сдвиговые течения дилатантных жидкостей при наличии постоянной поперечной составляющей скорости жидкости, обеспечиваемой за счет равномерного вдува (или отсоса) на граничных поверхностях.

Показано, что наличие поперечного сноса жидкости влияет на скорость распространения фронта сдвиговых волн, что приводит к ряду эффектов в таких течениях.

Как показано в [1, 2], в неньютоновских средах со степенным реологически законом

$$s_{ij} = 2k\,|2f_{ij}f_{ij}|^{(n-1)/2} f_{ij} \tag{1}$$

где s_{ij} — девиатор тензора напряжений, f_{ij} — тензор скоростей деформации, k и n — реологические константы, при $n > 1$ (дилатантные жидкости) сдвиговые возмущения распространяются с конечной скоростью в отличие от ньютоновских и псевдопластических жидкостей ($n \leqslant 1$), для которых скорость распространения сдвиговых возмущений бесконечна.

Уравнение движения для плоских безградиентных течений при наличии поперечного сноса может быть записано в виде

$$u_t = L_1 u, \quad L_1 = a\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^n - v_0\frac{\partial}{\partial y} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} > 0,\ n > 1\right) \tag{2}$$

Здесь $u(y,\ t)$ — составляющая скорости жидкости по оси x, $v_0 = \mathrm{const}$ — составляющая скорости по оси y (поперечная), $a = k/\rho = \mathrm{const}$, ρ — плотность жидкости.

Заметим, что с помощью замены переменных $\xi = y - v_0 t$, $\eta = t$ уравнение (2) можно преобразовать к виду

$$u_\eta = L_2 u, \qquad L_2 = a\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^n \tag{3}$$

а после дифференцирования по ξ и замены $w = \partial u / \partial \xi$ можно свести к квазилинейному уравнению

$$w_\eta = L_3 w, \qquad L_3 w = a\partial^2 w^n / \partial \xi^2 \tag{4}$$

К уравнению типа (4) приводит рассмотрение нестационарных процессов нелинейной теплопроводности и фильтрации. Оно подробно исследовалось в работах [3, 4], в которых на примерах точных обобщенных автомодельных решений впервые показано, что квазилинейное уравнение (4) допускает решения в виде плоских волн, перемещающихся с конечной скоростью.

В [5–7] вывод о конечной скорости распространения возмущений обобщен для широкого класса начальных и граничных условий и доказаны

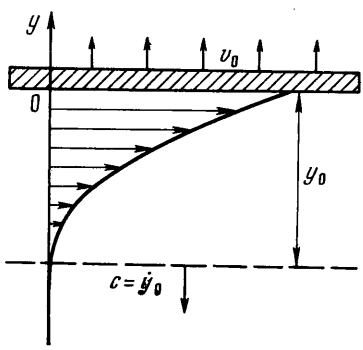
теоремы единственности таких решений, монотонной зависимости решений от начальных и граничных условий.

Уравнение вида (3) рассматривалось в работе [1], где также были найдены автомодельные волновые решения в нестационарных задачах гидродинамики неньютоновских жидкостей.

Основываясь на результатах упомянутых работ, можно ожидать наличия решений уравнения (2) в виде плоских сдвиговых волн. Подтверждением этому служит точное решение следующей задачи:

$$(5)\qquad \begin{cases} u_t = L_1 u \ (-\infty < y < 0,\ 0 < t < T < \infty) \\ u(y,\ 0) = 0,\ u(0,\ t) = At^{n/(n-1)},\ u(-\infty,\ t) = 0,\ A = \mathrm{const} \end{cases}$$

описывающей развитие сдвигового течения дилатантной жидкости, занимающей полупространство $y < 0$, возникающего при движении пористой пластины ($y = 0$), через которую осуществляется равномерный отсос ($v_0 > 0$) или вдув ($v_0 < 0$) жидкости (фиг. 1).



Фиг. 1

Задача (5) имеет точное автомодельное обобщенное решение

$$(6)\qquad u(y,t) = \begin{cases} A(t + y/c)^{n/(n-1)} & (|y| < ct = y_0(t)) \\ 0 & (|y| \geqslant ct) \end{cases}$$

соответствующее плоской сдвиговой волне, фронт которой распространяется в жидкости с постоянной скоростью c, причем величина c зависит от амплитуды сдвиговых возмущений A и поперечной составляющей скорости жидкости v_0, так что

$$(7)\qquad A^{n-1} = a((n-1)/n)^n c^n (c + v_0)$$

Проанализируем влияние поперечной составляющей скорости жидкости v_0 на скорость распространения фронта сдвиговой волны.

Из (7) следует, что для равномерного вдува через пластину ($v_0 < 0$) скорость распространения фронта сдвиговой волны увеличивается с ростом $|v_0|$, причем скорость фронта не может быть меньше поперечной составляющей скорости жидкости ($c > |v_0|$). Физически это следует из того, что при равномерном вдуве через пластину сдвиговые возмущения сносятся вместе с жидкостью (конвективный перенос) и скорость распространения возмущений, естественно, не может быть меньше скорости перемещения жидких частиц в этом направлении.

При наличии равномерного отсоса жидкости на пластине ($v_0 > 0$) скорость распространения сдвиговых возмущений c уменьшается с увеличением поперечной составляющей скорости жидкости.

Полученное автомодельное решение позволяет сделать вывод о том, что и в более общей постановке, соответствующей произвольному закону движения пластины

$$(8)\qquad \begin{cases} u_t = L_1 u \ (-\infty < y < 0,\ 0 < t < T) \\ u(y,0) = 0,\ u(0,t) = f(t),\ u(-\infty,t) = 0 \end{cases}$$

где $f(t)$ — произвольная положительная функция, ограниченная на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$, решение задачи соответствует сдвиговой волне, фронт которой перемещается в жидкости с конечной скоростью.

Для этого, используя метод, предложенный в [5], докажем предварительно свойство монотонной зависимости решений (8) от граничных условий.

Пусть $u_1(y, t)$ и $u_2(y, t)$ — решения задачи (8), соответствующие различным граничным условиям $f_1(t)$ и $f_2(t)$, причем $f_2(t) \geqslant f_1(t)$. Покажем, что в этом случае $u_2(y, t) \geqslant u_1(y, t)$.

Для доказательства рассмотрим решение задачи (8) $u_\alpha(y, t)$, соответствующее $f(t) = (1-\alpha)f_1(t) + \alpha f_2(t)$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Дифференцируя (8) по параметру α и обозначая $\partial u_\alpha / \partial \alpha$ через q, имеем

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial t} = n(n-1)a\left(\dfrac{\partial u_\alpha}{\partial y}\right)^{n-2}\dfrac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y^2}\dfrac{\partial q}{\partial y} + na\left(\dfrac{\partial u_\alpha}{\partial y}\right)^{n-1}\dfrac{\partial^2 q}{\partial y^2} - v_0\dfrac{\partial q}{\partial y} \\ q(y,0)=0, \quad q(0,t)=f_2(t)-f_1(t)\geqslant 0, \quad q(-\infty,t)=0 \end{cases}$$

Предположим, что в некоторой области $G(y, t)$ функция q отрицательна. Тогда в некоторой точке (y_*, t_*) q будет принимать наименьшее отрицательное значение. Очевидно, что в точке (y_*, t_*)

$$\frac{\partial^2 q}{\partial y^2} > 0, \quad \frac{\partial q}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial t} \leqslant 0.$$

Тогда приходим к противоречию с уравнением (9). Действительно, левая часть этого уравнения в точке (y_*, t_*) не положительна, а правая часть строго положительна. Следовательно, $q \geqslant 0$ всюду в полосе $-\infty < y < 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$. С другой стороны, так как $q = \partial u_\alpha / \partial \alpha$ и

$$(10)\qquad u_2(y,t) = u_1(y,t) + \int_0^1 \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha}\, d\alpha$$

из положительности q следует, что

$$(11)\qquad u_2(y,t) - u_1(y,t) = \int_0^1 q\, d\alpha \geqslant 0$$

при любых значениях y и t, что и требовалось доказать.

Неравенство (11) можно использовать для оценки решений задачи (8) с помощью автомодельного решения (6) задачи (5).

Очевидно, что для любой ограниченной на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ функции $f(t)$ всегда можно выбрать константу A в (5) столь большой, чтобы на всем интервале $f(t) \leqslant At^{n/(n-1)}$. Но так как решение задачи (5) тождественно равно нулю при $|y| \geqslant ct$ для $0 \leqslant t \leqslant T$, то и решение задачи (8) тождественно равно нулю при $|y| \geqslant ct$ для $0 \leqslant t \leqslant T$.

Таким образом, конечная скорость распространения сдвиговых возмущений не связана с характером движения пластины (источника возмущений), а является следствием свойств квазилинейного дифференциального уравнения (2), описывающего рассматриваемые физические процессы.

Учитывая отмеченный выше факт уменьшения скорости распространения фронта сдвиговых волн при наличии поперечного сноса жидкости навстречу направлению распространения фронта, можно ожидать, что в ряде случаев этот поперечный снос приведет к остановке фронта сдвиговой волны. При этом сдвиговые возмущения от пластины проникнут в жидкость лишь на конечное расстояние.

Наличие такого эффекта пространственной локализации сдвиговых возмущений рассмотрим на примере задачи, описывающей движение жид-

кости под пористой пластиной (фиг. 1), если в начальный момент времени пластина приводится в движение с постоянной скоростью U_0

$$(12)\qquad \begin{cases} u_t = L_1 u \ (y<0,\ 0<t<T) \\ u(y,0)=0,\ u(0,t)=U_0=\text{const},\ u(-\infty,t)=0 \end{cases}$$

Точное аналитическое решение задачи найти не удается. Однако приближенный закон движения фронта сдвиговой волны $y_0(t)$ можно найти, используя квазистационарное приближение. Будем искать решение (12) в виде сдвиговой волны $u=u[y+y_0(t)]$ для $|y|\leqslant y_0(t)$. Считая, что скорость фронта есть медленно меняющаяся функция времени и что в системе координат, связанной с фронтом, распределение скорости квазистационарное, из (12) получим

$$(13)\qquad (\dot y_0+v_0)\frac{\partial u}{\partial y}=a\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^n \qquad \left(\dot y_0\equiv\frac{dy_0}{dt}\right)$$

Интегрируя (13) с граничными условиями на фронте волны

$$u(y_0)=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=y_0}=0,$$

соответствующими физическим условиям непрерывности скорости и касательных напряжений, получим решение (12) в квазистационарном приближении

$$(14)\qquad u(y,t)=\begin{cases} \left\{\left(\dfrac{\dot y_0+v_0}{a}\right)^{1/n}\dfrac{n-1}{n}[y+y_0(t)]\right\}^{n/(n-1)} & (|y|<y_0(t)) \\ 0 & (|y|\geqslant y_0(t)) \end{cases}$$

С учетом граничного условия на стенке и (14) получим дифференциальное уравнение относительно функции $y_0(t)$

$$(15)\qquad (\dot y_0+v_0)y_0^n=a\left(\frac{n}{n-1}\right)^n U_0^{n-1}$$

Уравнение (15) можно проинтегрировать с учетом условия $y_0(0)=0$. При этом в квадратурах можно найти неявную зависимость $t=t(y_0)$. Не выписывая соответствующего выражения, сформулируем ряд выводов, следующих из его анализа. Отметим, что эти выводы можно получить и непосредственно из анализа соотношения (15).

При наличии равномерного вдува через пористую пластину ($v_0<0$) скорость распространения сдвиговых возмущений в жидкости не может быть меньше поперечной составляющей скорости жидкости ($\dot y_0>|v_0|$). Сдвиговые возмущения в этом случае проникают в жидкость неограниченно далеко ($y_0\to\infty$ при $t\to\infty$), причем скорость фронта волны уменьшается по мере распространения сдвиговой волны и имеет асимптотическое значение $|v_0|$, которое достигается при $t\to\infty$, когда фронт волны уходит на бесконечность.

В случае равномерного отсоса жидкости на пластине ($v_0>0$), сдвиговые возмущения от пластины не выходят за пределы области $|y|<y_{\max}<\infty$, т. е. $y_0\to y_{\max}$, а $\dot y_0\to 0$ при $t\to\infty$. Размер области пространственной локализации сдвиговых возмущений можно определить из (15), положив $\dot y_0=0$.

Отсюда имеем

$$y_{\max} = \left(\frac{a}{v_0}\right)^{1/n} \frac{n}{n-1} U_0^{(n-1)/n} \tag{16}$$

Как видно из (16), глубина проникновения сдвиговых возмущений в жидкость зависит от величины скорости движения пластины U_0 и поперечной составляющей скорости жидкости v_0 (интенсивности отсоса), увеличиваясь с возрастанием U_0 или с уменьшением v_0. Эффект пространственной локализации сдвиговых возмущений не имеет места ($y_{\max} \to \infty$), если $n \to 1$ или $v_0 \to 0$.

Из (14) следует, что $u(y, t) \to u^*(y)$ при $t \to \infty$, причем стационарное распределение скорости $u^*(y)$ имеет вид

$$u^*(y) = \begin{cases} U_0(1 + y/y_{\max})^{n/(n-1)} & (|y| < y_{\max}) \\ 0 & (|y| \geqslant y_{\max}) \end{cases} \tag{17}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что (17) удовлетворяет стационарному уравнению $L_1 u^* = 0$, граничному условию $u^*(0) = U_0$ и условию непрерывности скорости и касательных напряжений в любой точке.

Эффект пространственной локализации сдвиговых возмущений может приводить к появлению в канальных течениях со вдувом зон с нулевыми сдвиговыми напряжениями. Рассмотрим, например, задачу о сдвиговом течении Куэтта дилатантной жидкости в плоском канале при наличии равномерного вдува жидкости через одну из стенок канала и отсоса через другую. Одна из стенок канала ($y = 0$) при этом считается неподвижной, а другая ($y = h$) в начальный момент времени приводится в движение с постоянной скоростью $U_0 > 0$.

Принимая за характерные параметры задачи h, U_0 и $T = h / U_0$, запишем безразмерное уравнение движения с соответствующими начальным и граничным условиями

$$\begin{cases} u_t = Lu, \quad L = \dfrac{1}{R_n}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^n - \theta\dfrac{\partial}{\partial y}, \quad \left(R_n = a^{-1}h^n U_0^{2-n}, \ \theta = \dfrac{v_0}{U_0}\right) \\ u(y, 0) = 0, \quad u(1, t) = 1, \quad u(y, 0) = 0 \end{cases} \tag{18}$$

Здесь R_n — обобщенное число Рейнольдса, а θ — параметр вдува.

Ограничимся рассмотрением случая $\theta > 0 (v_0 > 0)$, соответствующего вдуву жидкости через неподвижную стенку.

Учитывая размер области пространственной локализации сдвиговых возмущений (16), введем критическое значение параметра вдува

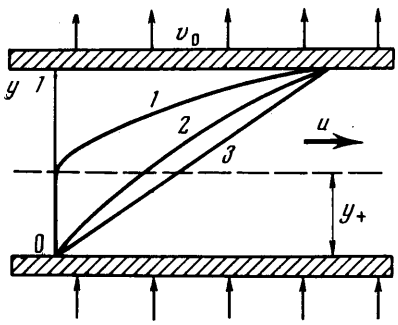
$$\theta_k = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \frac{1}{R_n} \tag{19}$$

Если $\theta > \theta_k$, то сдвиговые возмущения от движущейся стенки проникают в жидкость лишь на конечное расстояние и не достигают неподвижной стенки. Распределение скорости жидкости в любой момент времени в этом случае не отличается от соответствующего распределения, когда жидкость занимает все полупространство под пластиной (см. предыдущую задачу). Развитие течения во времени сопровождается перемещением фронта сдвиговой волны, распространяющейся от движущейся стенки. При $t \to \infty$ фронт сдвиговой волны останавливается в некоторой точке y_+ и соответствующее стационарное распределение скорости в канале

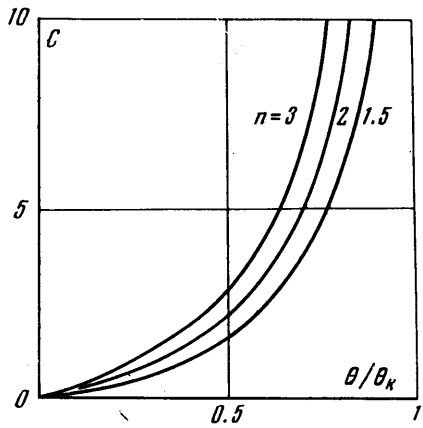
имеет вид (кривая *1* на фиг. 2)

$$u(y)=\begin{cases}\left[\dfrac{\theta}{\theta_k}(y-y_+)^n\right]^{1/(n-1)} & \left(y>y_+=1-\left(\dfrac{\theta_k}{\theta}\right)^{1/n}\right)\\ 0 & (y\leqslant y_+)\end{cases} \tag{20}$$

При малой интенсивности вдува ($\theta<\theta_k$) первая фаза развития течения качественно не отличается от случая $\theta>\theta_k$ и соответствует сдвиговой



Фиг. 2



Фиг. 3

волне, фронт которой распространяется от движущейся стенки к неподвижной. Однако в случае $\theta<\theta_k$ фронт сдвиговой волны достигает неподвижной стенки и поэтому стационарное распределение скорости в канале (кривая *2* на фиг. 2)

$$u(y)=\frac{(Cy+1)^{n/(n-1)}-1}{(C+1)^{n/(n-1)}-1}\qquad(0\leqslant y\leqslant 1) \tag{21}$$

не имеет зон, где сдвиговые напряжения равны нулю. Линейный профиль *3* на фиг. 2 соответствует случаю $\theta=0$. Распределение (21) легко получить, интегрируя стационарное уравнение $Lu=0$ с граничными условиями $u(0)=0$ и $u(1)=1$. При этом постоянная интегрирования C зависит от величины отношения θ/θ_k. Эта зависимость может быть представлена в неявном виде

$$\left(\frac{\theta}{\theta_k}\right)^{1/(n-1)}=\frac{C^{n/(n-1)}}{(C+1)^{n/(n-1)}-1}\qquad\left(\frac{\theta}{\theta_k}<1\right) \tag{22}$$

Ее характер показан на фиг. 3 для $n=1{,}5$; 2 и 3.

В заключение отметим, что наличие стационарных распределений с пространственно-локализованными слоями, где сдвиговые напряжения отличны от нуля, для течений дилатантных жидкостей впервые отмечалось в работе [8], в которой исследовались течения в пограничных слоях со вдувом. Однако в этой работе не была установлена связь между образованием таких слоев и особенностями распространения сдвиговых возмущений в процессах развития течений.

Впервые наличие такой связи было указано в работе [1], где обсуждался эффект пространственной локализации сдвиговых возмущений в проводящих дилатантных жидкостях в поперечном магнитном поле [9].

Поступила 3 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мартинсон Л. К., Павлов К. Б.* Нестационарные сдвиговые течения проводящей жидкости со степенным реологическим законом. Магнитная гидродинамика, 1971, № 2, стр. 50.
2. *Сапунков Я. Г.* Задача Рэлея для неньютоновской электропроводной жидкости. ПМТФ, 1970, № 2, стр. 50.
3. *Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.* К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе. М., Изд-во АН СССР, 1950.
4. *Баренблатт Г. И.* О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. ПММ, 1952, т. 16, вып. 1, стр. 67.
5. *Баренблатт Г. И., Вишик М. И.* О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа. ПММ, 1956, т. 20, № 3, стр. 411.
6. *Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-линь.* Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации. Изв. АН СССР, Сер. матем., 1958, т. 22, № 5, стр. 667.
7. *Самарский А. А., Соболь И. М.* Примеры численного расчета температурных волн. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 4, стр. 702.
8. *Берковский Б. М.* Одно точное решение уравнения пограничного слоя. Докл. АН БССР, 1965, т. 9, № 1, стр. 51.
9. *Мартинсон Л. К., Павлов К. Б.* Эффект магнитной пластичности в неньютоновских жидкостях. Магнитная гидродинамика, 1966, № 3, стр. 69.