

УДК 533.722

ПОЛЕ ТЕЧЕНИЯ И ДИФФУЗИОННОЕ ОСАЖДЕНИЕ АЭРОЗОЛЕЙ В ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ ПОЛИДИСПЕРСНОГО ВОЛОКНИСТОГО ФИЛЬТРА

А. А. КИРШ, И. Б. СТЕЧКИНА

(Москва)

Теоретически и экспериментально исследованы сопротивление, поле течения и диффузионное осаждение аэрозолей в простейшей модели полидисперсного волокнистого фильтра — в системе параллельных цилиндров разного диаметра, расположенных перпендикулярно направлению потока, при малых числах Рейнольдса. Показано, что сопротивление и диффузионное осаждение частиц в таких системах можно рассчитывать по среднему радиусу цилиндров даже в случае, когда радиусы цилиндров различаются в несколько раз.

1. Рассмотрим обтекание вязким потоком при малых числах Рейнольдса решетки параллельных цилиндров с чередующимися радиусами ρ_1 и ρ_2 , расположенной перпендикулярно потоку. Введем обозначения: w_x , w_y — компоненты скорости потока, μ — динамическая вязкость среды, p — давление, ω — завихренность.

Уравнения движения в стоксовом приближении и уравнение непрерывности имеют вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \Delta w_x, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \Delta w_y, \quad \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0$$

а завихренность ω удовлетворяет уравнению Лапласа

$$(1.2) \quad \Delta \omega = 0$$

Введем комплексные переменные и величины:

$$z = x + iy, \quad w = w_x - iw_y, \quad \omega = 2idw / \partial \bar{z}, \quad \zeta = \pi z / 2h$$

h — расстояние между осями соседних цилиндров, $t_1 = \pi \rho_1 / 2h$, $t_2 = \pi \rho_2 / 2h$, u_0 — скорость потока на бесконечности.

Скорость w должна удовлетворять следующим граничным условиям на поверхностях цилиндров и на бесконечности

$$(1.3) \quad \begin{aligned} w / u_0 &= -1 & \text{при } |\zeta_1| &= t_1 \\ w / u_0 &= -1 & \text{при } |\zeta_2| &= t_2 \\ w / u_0 &\rightarrow 0 & \text{при } |\zeta| &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

Здесь принято, что среда на бесконечности покоится, а решетка движется со скоростью $-u_0$; ζ_1 , ζ_2 — координаты с началом в центре первого и второго цилиндров соответственно, так что $\zeta_2 = \zeta_1 - i\pi / 2$.

Решение поставленной задачи будем искать в виде суперпозиции решений для решеток, состоящих из цилиндров радиусов ρ_1 и ρ_2 . Комплексная скорость w для потока, обтекающего решетку из цилиндров одинако-

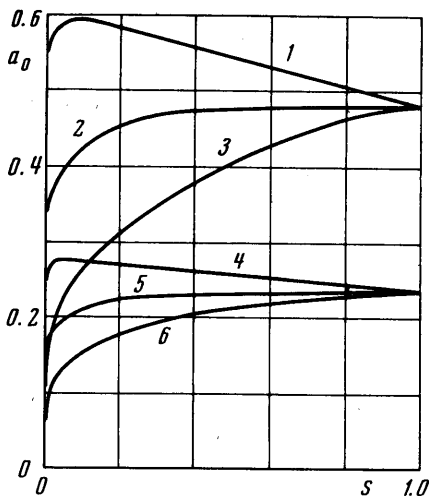
вого радиуса, может быть записана в виде ряда [1]

$$(1.4) \quad w/u_0 = a_0[\ln 2 \operatorname{sh} \zeta + \ln 2 \operatorname{sh} \xi - (\zeta + \xi) \operatorname{cth} \zeta] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \left[\frac{d^{2n-1}}{d\xi^{2n-1}} \operatorname{cth} \xi - (\zeta + \xi) \frac{d^{2n}}{d\zeta^{2n}} \operatorname{cth} \zeta \right] + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \frac{d^{2n-1}}{d\zeta^{2n-1}} \operatorname{cth} \zeta$$

где коэффициенты a_0 , a_{2n} , b_{2n} определяются из граничных условий на цилиндре. Так как поле течения через решетку из цилиндров с радиусами ρ_1 и ρ_2 имеет такую же симметрию и периодичность, то решение для нее представим в виде суммы решений для двух монодисперсных решеток

$$(1.5) \quad w/u_0 = w_1/u_0 + w_2/u_0$$

где w_1/u_0 и w_2/u_0 представляются в виде рядов (1.4) как функции ζ_1 и ζ_2 соответственно с различными коэффициентами $a_0(1)$, $a_{2n}(1)$, $b_{2n}(1)$ и $a_0(2)$, $a_{2n}(2)$, $b_{2n}(2)$. Эти коэффициенты находятся из граничных условий на поверхностях цилиндров. Для этого разложим w в ряды Лорана по ζ_1 и по ζ_2 около первого и второго цилиндров и подставим в граничные условия (1.3), причем на поверхности первого цилиндра $\zeta_1 = t_1^2 / \zeta_1$, а на поверхности второго цилиндра $\zeta_2 = t_2^2 / \zeta_2$. В силу симметрии поля течения все коэффициенты a_{2n} , b_{2n} будут действительными. Для первых



Фиг. 1

четырёх коэффициентов с точностью до t_1^2 , t_2^2 получим

$$(1.6) \quad a_0(1) = \frac{\kappa - \Omega_2}{\Omega_1 \Omega_2 - \kappa_2}, \quad a_0(2) = \frac{\kappa - \Omega_1}{\Omega_1 \Omega_2 - \kappa^2}$$

$$b_2(1) = -a_0(1)t_1^2, \quad b_2(2) = -a_0(2)t_2^2$$

Здесь

$$(1.7) \quad \Omega_1 = 2 \ln 2t_1 - 1 - 2t_1^2/3, \quad \Omega_2 = 2 \ln 2t_2 - 1 - 2t_2^2/3, \\ \kappa = 2 \ln 2 - t_1^2 - t_2^2$$

Сила, действующая на единицу длины цилиндра [1], равна

$$(1.8) \quad F' = 8\pi\mu_0 a_0$$

Поэтому безразмерные силы $F = F' / \mu_0$, действующие на единицу длины первого и второго цилиндров, будут соответственно равны

$$(1.9) \quad F_1 = 8\pi a_0(1), \quad F_2 = 8\pi a_0(2)$$

На цилиндр большего радиуса будет действовать большая сила.

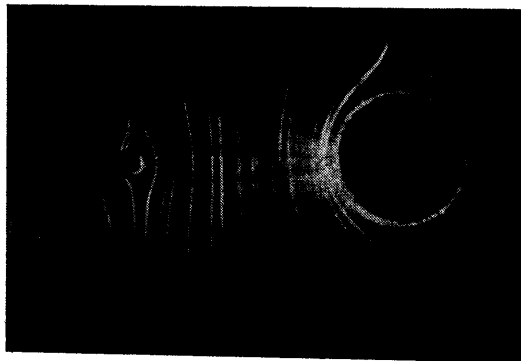
На фиг. 1 показано изменение $a_0(1)$ (кривые 1 и 4), $a_0(2)$ (кривые 3 и 6), $\langle a_0 \rangle = [a_0(1) + a_0(2)] / 2$ (кривые 2 и 5), в зависимости от отношения радиусов цилиндров $s = \rho_2 / \rho_1$ при фиксированных значениях $t = t_1 + t_2$. Кривые 1, 2, 3 относятся к $t = 0.3$, а кривые 4, 5, 6 — к $t = 0.1$. В точке $s = 1$ $\langle a_0 \rangle = a_0(t)$ для монодисперсной решетки, состоящей из

цилиндров радиуса $\langle \rho \rangle = (\rho_1 + \rho_2) / 2$, расположенных на расстоянии h . Сила, действующая на единицу длины цилиндра в такой решетке, равна [1]

$$(1.10) \quad F = 8\pi a_0(t) = 8\pi(1 - 2 \ln 2t - 2t^2/3)^{-1}$$

Как видно из фигур, средние силы, действующие в полидисперсных решетках и пропорциональные $\langle a_0 \rangle$, мало отличаются от сил, действующих в монодисперсных решетках для $s > 0.1$ при $t = 0.1$ и для $s > 0.2$ при $t = 0.3$. Таким образом, сопротивление не очень сильно полидисперсных решеток мало отличается от сопротивления соответствующей монодисперсной решетки, причем чем меньше t , тем меньше сказывается полидисперсность.

Экспериментальное изучение сопротивления в полидисперсных решетках проводилось в модельных фильтрах, состоящих из рамок с намотанными на них капроновыми нитями разного диаметра в чередующемся порядке. Расстояние между осями нитей в ряду $h = 1$ мм, расстояние между рядами цилиндров $h_1 = 1.3$ мм, при этом ряды не оказывали взаимного гидродинамического влияния, так как $h_1/h > 1$ [2]. Безразмерная сила F рассчитывалась по результатам измерения перепада давления в модельных фильтрах при течении 95%-ного глицерина, причем число Рейнольдса во всех опытах не превышало 0.05. Параметры решеток и результаты измерений представлены в табл. 1, где даны значения силы F_1 , полученные экспериментально, а также значения $\langle F \rangle = 8\pi \langle a_0 \rangle$, вычисленные по формулам (1.6) и (1.9), и значения $F(t)$ в монодисперсной решетке, вычисленные по формуле (1.10).



Фиг. 2

Таблица 1

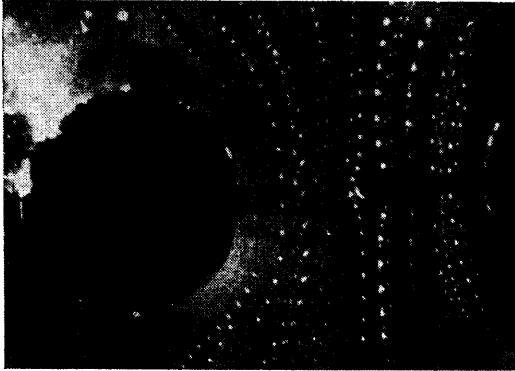
№№	ρ_1 , мм	ρ_2 , мм	h , мм	t_1	t_2	$a_0(1)$	$a_0(2)$	$\langle F \rangle$	$F(t)$	F_1
1	0.079	0.022	1	0.124	0.0346	0.347	0.233	7.4	7.6	7.5
2	0.16	0.022	1	0.2515	0.0346	0.503	0.245	9.4	11.5	11.5

Экспериментальные значения F_1 хорошо согласуются с теоретическими и с $F(t)$, откуда следует, что среднюю силу, действующую в полидисперсной решетке при не очень большой степени полидисперсности, можно рассчитывать по среднему значению t .

Следует заметить, что при $t \sim 1$ экспериментальные значения F оказались больше, чем рассчитанные по формулам (1.6), (1.9). Это связано с тем, что в расчетах учитывались только члены порядка t_1^2, t_2^2 . Сопротивление решеток с большой степенью полидисперсности ($s < 0.1$) изучалось лишь при больших t ($t = 1.3$), так как изучение течения в системах с малым t связано с большими экспериментальными трудностями. В опытах с решеткой из цилиндров с $2\rho_1 = 0.8$ см, $2h = 0.925$ см было получено, что

при введении между большими цилиндрами тонких проволочек ($2\rho_2 = 0.0022$ см, $s = 0.00275$) перепад давления в системе увеличился в 1.4 раза, тогда как теоретическая оценка дает увеличение в 1.1 раза. Это означает, что зависимость $\langle a_0 \rangle$ от s еще более резкая, чем это следует из фиг. 1, и поэтому сопротивление полидисперсной решетки можно рассчитывать по среднему радиусу до меньших значений s .

2. Поле течения в системах параллельных цилиндров разного диаметра изучалось путем фотографирования траекторий мелких полистироловых посеребренных частиц, взвешенных в глицерине. Фотографирование производилось в медианной плоскости плоскопараллельной кюветы, которая



Фиг. 3

заполнена рядами параллельных цилиндров, методом, описанным в работе [3]. Цилиндры меньшего диаметра были сделаны из металла, а большего — из оргстекла.

На фиг. 2, 3 даны фотографии поля течения в системе цилиндров со следующими параметрами: $\rho_1 = 3.5$ мм, $\rho_2 = 0.5$ мм, $h = 15$ мм (фиг. 2); $\rho_1 = 7$ мм, $\rho_2 = 0.5$ мм, $h = 15$ мм (фиг. 3); последнее фото получено при стробоскопическом освещении. Из фиг. 2, 3 видно, что даже в случае большой разницы в радиусах цилинд-

ров возмущающее влияние малого цилиндра весьма велико. Его легко оценить из профиля скорости на оси, соединяющей центры цилиндров ($x = 0$). Теоретический профиль скоростей можно получить из формул (1.4) и (1.5). В системе координат, связанной с цилиндрами, скорость с точностью до членов t_1^2 , t_2^2 выражается в виде

$$(2.1) \quad w/u_0 = a_0(1) (\ln 2 \operatorname{sh} \xi_1 + \ln 2 \operatorname{sh} \xi_1 - (\xi_1 + \bar{\xi}_1) \operatorname{cth} \xi_1) + \\ + b_2(1) \frac{d}{d\xi_1} \operatorname{cth} \xi_1 + a_0(2) [\ln 2 \operatorname{sh} \xi_2 + \ln 2 \operatorname{sh} \xi_2 - (\xi_2 + \bar{\xi}_2) \operatorname{cth} \xi_2] + \\ + b_2(2) \frac{d}{d\xi_2} \operatorname{cth} \xi_2 + 1$$

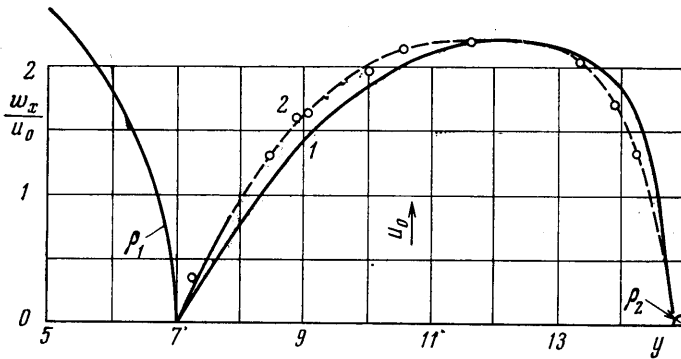
На мнимой оси $w_y = 0$

$$(2.2) \quad w_x/u_0 = a_0(1) 2 \ln |2 \sin \xi_1| + a_0(2) 2 \ln |2 \sin \xi_2| + \\ + b_2(1) (\sin \xi_1)^{-2} + b_2(2) (\sin \xi_2)^{-2} + 1 \\ (\xi_1 = \pi y / 2h, \quad \xi_2 = \pi(y/h - 1) / 2)$$

На фиг. 4 дан профиль скорости течения в системе с $s = 0.019$ и $t = 0.748$, $\rho_1 = 7$ мм, $\rho_2 = 0.135$ мм, $h = 15$ мм (кривая 1 рассчитана теоретически, кривая 2 получена из фотографии траекторий частиц при стробоскопическом освещении).

Скорости отложены в условных единицах, причем соответствие между кривыми было установлено по точке, где скорости достигают своего максимального значения. Как видно из фиг. 4, максимум скорости на экспериментальной кривой находится почти посередине просвета между цилиндра-

ми. Теоретическая кривая более асимметрична и экспериментально найденный градиент скорости около большого цилиндра больше теоретического. Вероятно, это связано с тем, что в расчете учитывались только члены порядка t_1^2, t_2^2 , что в данном случае недостаточно. При $t = 0.419$ наблюдалось гораздо лучшее совпадение теоретического и экспериментального профилей скоростей.



Фиг. 4

Для определения осаждения частиц из потока на цилиндры в решетке необходимо знать поле течения вблизи цилиндров. Разложив скорость течения (2.1) около первого цилиндра и отбросив члены порядка t_1^2, t_2^2 и выше, получим

$$(2.3) \quad w/u_0 = a_0(1) [2 \ln r_1 - (1 - r_1^{-2}) e^{-2i\varphi}]$$

где r, φ — полярные координаты с началом в центре первого цилиндра. Аналогичное выражение получается для скорости около второго цилиндра, только $a_0(1)$ нужно заменить на $a_0(2)$. Заметим, что (2.3) справедливо только при $t_1 \ll 1$. Выражение (2.3) совпадает с выражением для поля скоростей около изолированного цилиндра, обтекаемого вязким потоком, с точностью до коэффициента a_0 . В случае изолированного цилиндра $a_0 = 1/2(2 - \ln \text{Re})^{-1}$.

Фотографии траекторий мелких частиц (аналогичные тем, которые представлены на фиг. 2, 3) проектировались на густую сетку линий тока, вычерченных по формуле (2.3), так, что совпадали контуры цилиндров и направление потока. Было получено, что при $t = 0.419$ линии тока совпадают с траекториями частиц около малого цилиндра до $r_2 \sim 2$ и около большого до $r_1 \sim 1.2$; при $t = 0.748$ совпадение наблюдалось только около малого цилиндра, траектории около большого цилиндра в этом случае искажены из-за сильного возмущающего действия малого цилиндра.

3. Так как поле течения вблизи цилиндров при малых t_1, t_2 совпадает по форме с лембовским полем течения, то диффузионное осаждение частиц на каждом из цилиндров при больших числах Пекле $\text{Pe} = 2u_0\rho/D$ (D — коэффициент диффузии частиц) будет определяться формулой, полученной на основе лембовского поля течения с соответствующим гидродинамическим коэффициентом [5, 6]

$$(3.1) \quad \eta = 3.65a_0^{1/2} \text{Pe}^{-2/3} + 0.623 \text{Pe}^{-1}$$

где η — коэффициент захвата частиц.

Проскок частиц через модельный фильтр, состоящий из волокон двух разных диаметров, будет равен

$$(3.2) \quad N/N_0 = e^{-2(\eta_1\rho_1L_1 + \eta_2\rho_2L_2)}$$

где N_0 , N — концентрация частиц перед и за фильтром; η_1 , η_2 — коэффициенты захвата на волокнах радиуса ρ_1 , ρ_2 ; L_1 , L_2 — длина этих волокон, приходящаяся на 1 см^2 площади фильтра.

В случае модельных фильтров, состоящих из чередующихся нитей разного диаметра, $L_1 = L_2 = L/2$ и усредняется величина $\eta\rho$, т. е. проскок частиц можно записать в виде

$$(3.3) \quad N/N_0 = e^{-2\langle\eta\rho\rangle L}$$

$$\langle\eta\rho\rangle = (\eta_1\rho_1 + \eta_2\rho_2)/2$$

Подставив в выражение для $\langle\eta\rho\rangle$ коэффициенты захвата по формуле (3.1), получим

$$(3.4) \quad \langle\eta\rho\rangle = 3.65\langle\rho\rangle\langle\text{Pe}\rangle^{-2/3}g(t, s) + 0.623\langle\rho\rangle\langle\text{Pe}\rangle^{-1}$$

$$g(t, s) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1+s} \right)^{1/2} [a_0^{1/2}(1) + s^{1/2}a_0^{1/2}(2)]$$

$$(3.5)$$

Сравним эффективности полидисперсного модельного фильтра и монодисперсного с радиусом волокон $\rho = \langle\rho\rangle$. Если учесть, что полная длина волокон в этих фильтрах

одинакова, то сравнивать нужно величины $\langle\eta\rho\rangle$ и $\eta(\langle\rho\rangle)\langle\rho\rangle$ для монодисперсного фильтра

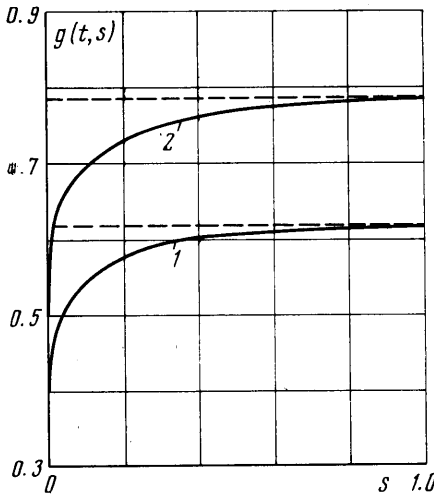
$$(3.6) \quad \eta(\langle\rho\rangle)\langle\rho\rangle = 3.65\langle\rho\rangle\langle\text{Pe}\rangle^{-2/3}a_0^{1/2}(t) + 0.623\langle\rho\rangle\langle\text{Pe}\rangle^{-1}$$

где $a_0(t)$ вычисляется по формуле (1.10) для монодисперсной решетки с $t = t_1 + t_2$. На фиг. 5 дана зависимость $g(t, s)$ от отношения радиусов цилиндров для $t = 0.1$ (кривая 1) и $t = 0.3$ (кривая 2). Из графиков видно, что полидисперсность начинает заметно влиять при $s < 0.3$.

Экспериментальное измерение диффузионного осаждения мелких частиц хлористого натрия проводилось в модельных фильтрах при малых скоростях течения. Частицы получались при

спонтанной конденсации пересыщенных паров NaCl при смешении потока сухого фильтрованного воздуха, содержащего пары NaCl при $t^\circ \sim 400^\circ \text{C}$ с большим по объему потоком воздуха при нормальных условиях.

Средний D частиц определялся по проскоку аэрозоля через диффузионные батареи с помощью конденсационного укрупнения этих частиц в парах дибутылфталата в приборе Куст [7] и последующего нефелометрирования тумана прибором ФЭН-58 [7]. При определении исходной концентрации частиц аэрозоль параллельно пропусклся через корпус без модельного фильтра для компенсации диффузионных потерь частиц на стен-



Фиг. 5

Таблица 2

№№	Pe	η_1	$\langle\eta\rho\rangle/\langle\rho\rangle$	$\eta(\langle\rho\rangle)$
1	10.5	0.56	0.55	0.57
2	12.8	0.47	0.48	0.50
3	15.2	0.45	0.42	0.44
4	17.5	0.39	0.39	0.40
5	24	0.39	0.32	0.37
6	48	0.23	0.21	0.23

ках корпуса модельного фильтра. Опыты проводились при различных скоростях фильтрации u_0 .

В табл. 2 приведены результаты, пересчитанные на средний коэффициент захвата η , а также величины $\langle \eta \rho \rangle / \langle \rho \rangle$, вычисленные по формуле (3.4), и коэффициенты захвата $\eta(\langle \rho \rangle)$, рассчитанные по среднему значению ρ . Опыты 1—4 проведены с фильтром 1; 5, 6 — с фильтром 2, параметры этих фильтров даны в табл. 1.

Как видно из табл. 2, совпадение экспериментальных значений η с $\eta(\langle \rho \rangle)$ достаточно хорошее, так что при небольшой степени полидисперсности диффузионное осаждение частиц можно считать по среднему радиусу волокон. Сильная полидисперсность ведет к уменьшению диффузионного осаждения частиц по сравнению с осаждением в решетке с радиусом цилиндров, равным $\langle \rho \rangle$.

Авторы благодарят Н. А. Фукса за обсуждение работы.

Поступила 20 I 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Miyagi T. Viscous flow at low Reynolds numbers past an infinite row equal circular cylinders. J. Phys. Soc. Japan, 1958, vol. 13, № 5.
2. Кири А. А., Фукс Н. А. Сопротивление систем параллельных цилиндров. Коллоидн. ж., 1967, т. 29, стр. 682.
3. Кири А. А., Фукс Н. А. Течение жидкости в системе параллельных цилиндров, расположенных перпендикулярно потоку, при малых числах Рейнольдса. ПМТФ, 1966, № 6, стр. 101.
4. Ламб Г. Гидродинамика М.—Л., Гостехиздат, 1947, стр. 343.
5. Фукс Н. А., Стечкина И. Б. К теории волокнистых аэрозольных фильтров. Докл. АН СССР, 1962, т. 147, № 5.
6. Стечкина И. Б. Диффузионное осаждение аэрозолей в волокнистых фильтрах. Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 6.
7. Коган Я. И., Бурнашева З. А. Укрупнение и измерение ядер конденсации в непрерывном потоке. Ж. физ. химии, 1960, т. 34, № 12.