

УДК 533.6.011.72:533.7

## КИНЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЗАДАЧА О СТРУКТУРЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

В. И. ЖУК, В. А. РЫКОВ, Е. М. ШАХОВ

(Москва)

В последнее время широкое распространение получили модельные кинетические уравнения, которые, отличаясь от уравнения Больцмана своей простотой, сохраняют основные его черты [1-4]. Оценить теоретически величину ошибок, допускаемых при замене точного уравнения модельным, не удастся. В такой ситуации всестороннее исследование задачи о структуре ударной волны может дать значительную информацию о возможностях применения кинетических моделей.

В работе построены решения задачи о структуре ударной волны для нескольких моделей. Сравнением с решениями, полученными на основе других подходов к решению уравнения Больцмана, установлено преимущество обобщенной модели Крука (S-модель) перед остальными модельными уравнениями. Обнаружено, что профиль плотности, вычисленный с помощью S-модели, хорошо согласуется с экспериментальными данными для аргона [5].

Самостоятельный интерес представляют результаты исследования структуры ударной волны.

**1. Постановка задачи.** При исследовании структуры плоского скачка уплотнения будем исходить из приближенного кинетического уравнения

$$(1.1) \quad \xi_x \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\tau} (f^+ - f)$$

Здесь  $f(\xi, x)$  — функция распределения,  $\xi$  — скорость частиц газа,  $x$  — координата расстояния.

Частота столкновений  $\tau^{-1}$  и интеграл обратных столкновений  $f^+$  зависят от моментов функции распределения и молекулярных скоростей. Их конкретное представление определяет ту или иную модель уравнения Больцмана.

В работе [2] разработан метод получения кинетического уравнения (эллипсоидальной модели) на основе принципа максимальной вероятности. При переходе к сплошной среде эллипсоидальная модель приводит к уравнениям Навье — Стокса с правильным числом Прандтля. В работе [1] предложен способ построения кинетических уравнений, основанный на аппроксимации столкновительного члена в уравнении Больцмана. Полученное в [6] обобщенное уравнение Крука имеет следующие выражения для  $f^+$  и  $\tau^{-1}$ :

$$(1.2) \quad f^+ = f^{(0)} \left\{ 1 + \frac{P_{11}}{p} (1 - \gamma) \left( c_x^2 - \frac{\xi_v^2 + \xi_z^2}{2} \right) + \frac{4}{5} S_x c_x \left( c^2 - \frac{5}{2} \right) (1 - \text{Pr } \gamma) \right\}$$

$$f^{(0)} = n (2\pi RT)^{-3/2} \exp(-c^2), \quad c_x = (\xi_x - U) (2RT)^{-1/2},$$

$$\tau^{-1} = p / \mu,$$

$$c^2 = [(\xi_x - U)^2 + \xi_v^2 + \xi_z^2] / 2RT, \quad S_x = \frac{1}{n} \int c_x c^2 f d\xi$$

$$P_{11} = P_{11} - p, \quad P_{11} = m \int (\xi_x - U)^2 f d\xi, \quad \gamma = p\tau / \mu = \text{const}$$

Здесь  $n$  — плотность газа,  $U$  — скорость,  $T$  — температура,  $p$  — давление,  $R$  — газовая постоянная,  $\mu$  — вязкость,  $P_{11}$  — продольное напряжение,  $S_x$  — тепловой поток,  $m$  — масса молекулы,  $\text{Pr}$  — число Прандтля.

Уравнение (1.1) с функциями  $f^+$  и  $\tau^{-1}$  в виде (1.2) и  $\gamma = 1$  назовем S-моделью. Если  $\gamma = 3/2$ , то представление  $f^+$  в виде (1.2) совпадает с представлением  $f^+$  по эллипсоидальной модели, линеаризованным около максвелловского распределения.

В задаче о структуре скачка уплотнения функция распределения должна удовлетворять уравнению (1.1) и граничным условиям

$$f(\xi, x = \pm \infty) = n_{\pm} (2\pi RT_{\pm})^{-3/2} \exp \left[ - \frac{(\xi_x - U_{\pm})^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}{2RT_{\pm}} \right]$$

Индекс плюс относится к параметрам на  $+\infty$  и  $\xi_x \leq 0$ , индекс минус — к параметрам на  $-\infty$  и  $\xi_x \geq 0$ .

Поскольку нас интересуют макроскопические характеристики течения, введем вместо функции распределения  $f(\xi, x)$  две функции [7]

$$\varphi(\xi_x, x) = \int f d\xi_y d\xi_z, \quad \psi(\xi_x, x) = \int (\xi_y^2 + \xi_z^2) f d\xi_y d\xi_z$$

Умножая (1.1) на 1 и  $(\xi_y^2 + \xi_z^2)$  и интегрируя по  $\xi_y, \xi_z$ , в бесконечных пределах получим уравнения для  $\varphi$  и  $\psi$

$$(1.3) \quad \xi_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{\tau} (\varphi^+ - \varphi), \quad \xi_x \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{\tau} (\psi^+ - \psi)$$

$$\varphi^+ = \varphi^{(0)} \left[ 1 + \frac{P_{11}}{p} (1 - \gamma) \left( c_x^2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{4}{5} S_x c_x \left( c_x^2 - \frac{3}{2} \right) (1 - \text{Pr } \gamma) \right]$$

$$\psi^+ = \varphi^{(0)} T \left[ 1 + \frac{P_{11}}{p} (1 - \gamma) (c_x^2 - 1) + \frac{4}{5} S_x c_x \left( c_x^2 - \frac{1}{2} \right) (1 - \text{Pr } \gamma) \right]$$

$$\varphi^{(0)} = n (\pi T)^{-1/2} \exp(-c_x^2), \quad \gamma = \frac{p\tau}{\mu} = \text{const}, \quad \tau^{-1} = \frac{8}{5\sqrt{\pi}} \frac{nT}{\mu}$$

Уравнения (1.3) записаны в безразмерном виде. Переход к безразмерным переменным осуществлялся по формулам

$$n' = \frac{n}{n_-}, \quad T' = \frac{T}{T_-}, \quad \xi' = \frac{\xi}{(2RT_-)^{1/2}}, \quad U' = \frac{U}{(2RT_-)^{1/2}}, \quad x' = \frac{x}{\lambda_-}$$

$$f' = \frac{(2RT_-)^{3/2}}{n_-} f, \quad \mu' = \frac{\mu}{\mu_-}, \quad \lambda_- = (\sqrt{2} n_- \pi d_-^2)^{-1}$$

Вязкость газа  $\mu_-$  определена по температуре  $T_-$ ,  $\lambda_-$  — средняя длина свободного пробега молекул в набегающем потоке,  $d_-$  — эффективный диаметр молекул, определяемый через вязкость. Если исключить  $d_-$  из выражения для  $\lambda_-$ , используя первое приближение коэффициента вязкости по методу Энского — Чепмена, то

$$\lambda_- = \frac{16}{5n_-} \frac{\mu_-}{(2\pi m k T_-)^{1/2}}$$

В уравнениях (1.3) штрихи опущены. Граничные условия для функций  $\varphi$  и  $\psi$  имеют вид

$$(1.4) \quad \varphi = n_+ (\pi T_+)^{-1/2} \exp(-c_x^2), \quad \psi = T_+ \varphi, \quad x = +\infty$$

$$\varphi = \pi^{-1/2} \exp(-c_x^2), \quad \psi = \varphi, \quad x = -\infty$$

Макроскопические характеристики течения выражаются через функции  $\varphi$  и  $\psi$

$$n = \int \varphi d\xi_x, \quad U = \frac{1}{n} \int \xi_x \varphi d\xi_x, \quad P_{\perp} = \int \psi d\xi_x$$

$$T = \frac{2}{3} \left( \frac{P_{\perp}}{n} + \frac{1}{n} \int \xi_x^2 \varphi d\xi_x - U^2 \right), \quad S_x = \frac{1}{nT^{3/2}} \left[ \int \xi_x^3 \varphi d\xi_x + \int \xi_x \psi d\xi_x - 3U \int \xi_x^2 \varphi d\xi_x + 2U^3 n - UP_{\perp} \right]$$

Задача сводится к нахождению интегралов от функций  $\varphi$  и  $\psi$ , которые являются решениями уравнений (1.3) с граничными условиями (1.4).

Макроскопические параметры связаны уравнениями сохранения массы, импульса и энергии

$$nU = U_-, \quad nU^2 + P_{11} = U_-^2 + 1/2$$

$$U(nU^2 + 3/2 nT + 2P_{11}) + q_x = U_-(U_-^2 + 5/2) \quad (q_x = nT^{3/2} S_x)$$

2. Метод численного решения. Для решения системы уравнений (1.3) использовался итерационный процесс

$$(2.1) \quad \xi_x \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x} = \frac{1}{\tau_n} (\varphi_n^+ - \varphi_{n+1}), \quad \xi_x \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial x} = \frac{1}{\tau_n} (\psi_n^+ - \psi_{n+1})$$

Дифференциальные уравнения итерации интегрировались по  $x$  конечно-разностным методом. Граничные условия на  $-\infty$  и  $+\infty$  переносились соответственно в точки  $x_-$  и  $x_+$  и выбиралось разбиение отрезка  $[x_-, x_+]$  с постоянным шагом  $\Delta x = 0.05$ .

Для вывода разностной схемы интегрирования в уравнении (2.1) введем новую переменную  $s$  и запишем его в интегральной форме

$$(2.2) \quad \varphi(\xi_x, s) = \varphi(\xi_x, 0) e^{-s/\xi_x} + \int_0^s e^{s'/\xi_x} \varphi^+(\xi_x, s') \frac{ds'}{\xi_x} e^{-s/\xi_x}$$

$$(2.3) \quad s = \int_{x_i}^x \frac{dx'}{\tau(x')}$$

Пусть переменная  $x$  меняется в пределах  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ , тогда

$$0 \leq s \leq \Delta s = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx'}{\tau(x')}$$

На малом отрезке  $0 \leq s' \leq s$  подынтегральную функцию  $\varphi^+$  в (2.2) приблизим линейным образом

$$\varphi^+(s') = \varphi^+(0) + (\varphi^+(s) - \varphi^+(0)) s' / s$$

Выполняя в (2.2) интегрирование по  $s'$ , получим выражение для функции  $\varphi$ , имеющее второй порядок точности относительно величины шага  $\Delta s$

$$\varphi(\xi_x, s) = (\varphi(\xi_x, 0) - \varphi^+(\xi_x, 0)) e^{-s/\xi_x} + \varphi^+(\xi_x, s) + \frac{\varphi^+(\xi_x, s) - \varphi^+(\xi_x, 0)}{s} \xi_x (e^{-s/\xi_x} - 1)$$

Возвращаясь к переменной  $x$  и полагая  $x = x_{i+1}$ , находим

$$(2.4) \quad \varphi_{i+1} = (\varphi_i - \varphi_i^+) e^{-\Delta s/\xi_x} + \varphi_{i+1}^+ + \frac{\varphi_{i+1}^+ - \varphi_i^+}{\Delta s} \xi_x (e^{-\Delta s/\xi_x} - 1)$$

Оставаясь в пределах той же точности, в (2.4) можно записать

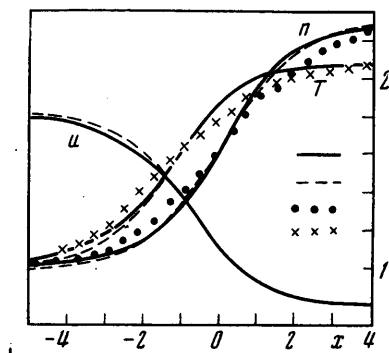
$$\Delta s = \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{1}{\tau_i} + \frac{1}{\tau_{i+1}} \right) = \frac{\Delta x}{\tau_0}$$

После чего приходим к окончательной формуле

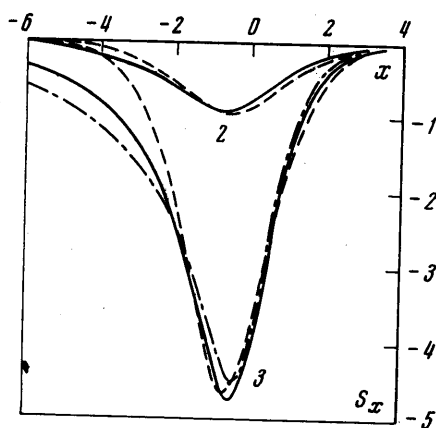
$$(2.5) \quad \varphi_{i+1} = \varphi_{i+1}^+ + (\varphi_i - \varphi_i^+) \exp \left( -\frac{\Delta x}{\xi_x \tau_0} \right) - \\ - \xi_x \tau_0 \frac{\varphi_{i+1}^+ - \varphi_i^+}{\Delta x} \left( 1 - \exp \left( -\frac{\Delta x}{\xi_x \tau_0} \right) \right)$$

Разностная схема (2.5) равномерно относительно  $\xi_x$  имеет второй порядок точности по величине шага  $\Delta x$ .

Полученные в результате решения дифференциальных уравнений (2.1) значения  $\varphi_{n+1}$  и  $\psi_{n+1}$  при каждом  $x_i$  использовались лишь для формирования вклада в инте-



Фиг. 1



Фиг. 2

гральные суммы макроскопических величин. Вычисление интегралов проводилось по формуле Симпсона с шагом  $\Delta \xi_x = 0.5$ . Пределы интегрирования по  $\xi_x$  таковы:

$$-3T_+^{1/2} \leq \xi_x \leq 3T_+^{1/2} + U_-$$

Пределы интегрирования по  $x$  зависят от числа Маха  $M$ . Для  $M = 8$  достаточно взять  $x_+ = 20$ ,  $x_- = -30$ . После вычисления  $n$ ,  $U$ ,  $P_\perp$ ,  $T$ ,  $S_x$  осуществлялась следующая итерация. В качестве нулевого приближения использовалось решение [8] с числом Прандтля  $Pr = 3/4$ .

**3. Результаты.** Для сравнения решений, полученных различными методами, профили макроскопических величин сдвигались так, чтобы профили плотности совместились в точке  $n = 1/2(n_- + n_+)$ . Наряду с макропараметрами  $n$ ,  $U$ ,  $P_\perp$ ,  $T$ ,  $S_x$  вычислялись потоки массы, импульса и энергии, которые не должны зависеть от  $x$ . Отклонение потоков от их истинных значений позволяет контролировать сходимость итераций и дает некоторое представление о точности метода вычислений. Следует отметить, что точность выполнения законов сохранения не может служить критерием точности вычисления макроскопических величин. Для  $M = 3$  точность выполнения законов сохранения по  $S$ -модели составляет 0.2%, в то время как точность вычисления макропараметров приближительно на порядок ниже.

Рассмотрим результаты расчетов, выполненных по  $S$ -модели для твердых шарообразных молекул ( $\mu = T^{1/2}$ ) в случае  $Pr = 2/3$ . На фиг. 1

приведено сравнение по профилям плотности, температуры и скорости решения  $S$ -модели (сплошная линия) с решением осредненного уравнения Больцмана [9] (пунктирная линия). Представленные на фиг. 1 результаты соответствуют числу  $M = 2$ . Сравнение показывает хорошее совпадение результатов. Существенной деталью является равенство сдвигов профилей температуры относительно профиля плотности. Наиболее заметное отличие проявляется в области перед волной (в окрестности  $x = -\infty$ ), где решение по  $S$ -модели медленнее выходит на предельное значение. Легко видеть, что это свойство решения является характерным для всех моделей с частотой столкновений, не зависящей от относительных скоростей.

Действительно, для молекул шаров частота столкновений при достаточно больших скоростях пропорциональна скорости и формула  $\tau^{-1} = \rho / \mu$  дает заниженную частоту столкновений. Независимость частоты столкновений от скорости искусственно увеличивает длину пробега быстрых молекул. Это приводит к тому, что молекулы с большими отрицательными скоростями, летящие из области за ударной волной, дают повышенный вклад в температуру и плотность перед волной.

Эта же причина приводит к существенной асимметрии профиля теплового потока по  $S$ -модели в отличие от соответствующего профиля, полученного из осредненного уравнения Больцмана (фиг. 2), хотя согласование в центре волны довольно хорошее. Штрихпунктирной линией приведены на фиг. 2 профили теплового потока, рассчитанного по эллипсоидальной модели. Стоящие на фиг. 2 перед кривыми цифры показывают значение числа Маха.

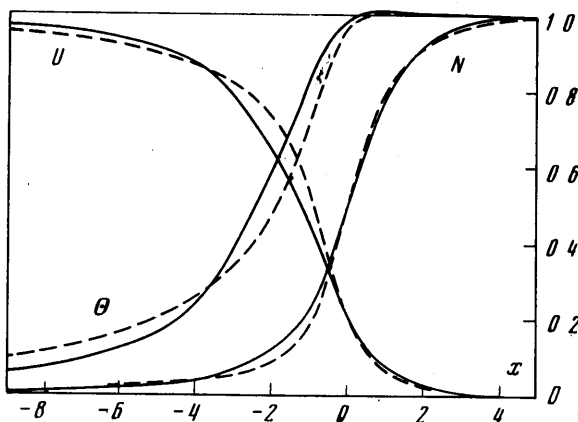
На фиг. 1 приведены для сравнения результаты [10] (данные нанесены точками и крестами), полученные для  $M = 2$  численным интегрированием уравнения Больцмана. Как видно из графика, решение [10] дает более пологий фронт плотности и температуры.

На фиг. 3 сопоставлены решения для  $M = 8$ ,  $\mu = T^{0.68}$ , полученные с помощью эллипсоидальной модели (пунктирные линии) и  $S$ -модели (сплошные линии). Медленный выход кривых на предельные значения вследствие постоянства частоты столкновений частично компенсируется у  $S$ -модели структурой функции  $f^+$ . Многочлен третьего порядка относительно молекулярных скоростей, стоящий перед  $S_x$  в  $S$ -модели, увеличивает  $f^+$  для молекул, обладающих большими отрицательными скоростями. В результате этого роль быстрых молекул, летящих из горячей области в холодную, уменьшается.

$$\Theta = (T - T_-) / (T_+ - T_-), \quad N = (n - n_-) / (n_+ - n_-).$$

Расчеты, проделанные для  $1 < \gamma < 3/2$ , приводят к профилям, которые расположены между кривыми, полученными по  $S$ -модели и по эллипсоидальной модели.

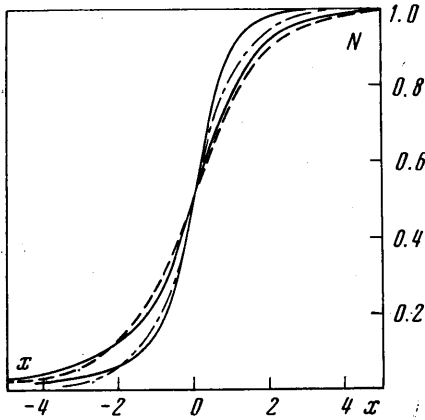
Для ответа на вопрос о пригодности модельных уравнений в случае сильных ударных волн проводилось сравнение с экспериментом. Резуль-



Фиг. 3

таты измерения профиля плотности в аргоне с использованием электронного пучка представлены в работе [5]. Сравнение с экспериментом для  $M = 8$ , изображенное на фиг. 4, показывает хорошее согласование результатов. Пунктиром нанесены данные эксперимента. Профиль плотности вычислен по  $S$ -модели для вязкости, пропорциональной температуре в степени 0.68. Такая зависимость вязкости от температуры соответствует экспериментальным данным, полученным для аргона [11].

Задача о структуре ударной волны исследовалась в [12, 13] прямым моделированием по методу Монте-Карло. При этом предполагалось, что молекулы взаимодействуют между собой с силой, обратно пропорциональной расстоянию в степени  $\nu$ . В случае  $\nu = 12$ , соответствующем изменению вязкости от температуры по закону  $\mu = T^{0.68}$ , результаты с очень хорошей точностью совпадают с экспериментальными данными Шмидта для  $M = 8$ . На фиг. 4 сравнивается решение [12, 13] для шарообразных молекул ( $\nu = \infty$ ) (штрихпунктирная линия) с аналогичными результатами по  $S$ -модели. В работе [14] получено решение о структуре ударной волны на основе полного уравнения Больцмана методом Монте-Карло. Для  $M = 2.5$  это решение сравнивалось с решением по  $S$ -модели на



Фиг. 4

плоскости плотность — температура. Согласование результатов также удовлетворительное.

В работах [4, 15] структура ударной волны изучается на основе моделей Крукса, эллипсоидальной, полиномиальной (уравнение (1.2)). Для полиномиальной модели рассматривались случаи  $\gamma = 1, 3/2, 3/5$ , причем, как и в настоящей работе, результаты по эллипсоидальной модели совпали с результатами по полиномиальной для  $\gamma = 3/2$ .

В работе [16] выполнено сравнение теоретических результатов, полученных для моделей Крукса и эллипсоидальной, с экспериментальными данными [5]. Отмечается, что при достаточно больших числах Маха ( $M \sim 8$ ) эллипсоидальная модель дает профиль плотности, заметно отличающийся от экспериментального.

Поступила 10 VII 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шахов Е. М. Метод аппроксимации кинетического уравнения Больцмана. В кн. «Численные методы в теории разреженных газов». Тр. ВЦ АН СССР, 1969.
2. Holway L. H. New statistical models for kinetic theory: methods of construction. Phys. Fluids, 1966, vol. 9, No. 9.
3. Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. Phys. Rev., 1954, vol. 94, No. 3.
4. Segal B. M., Ferziger J. H. Shock wave structure by several new modeled Boltzmann equations. Lect. Notes Phys., 1971, No. 8.
5. Schmidt B. Electron beam density measurement in shock waves in argon. J. Fluid Mech., 1969, vol. 39, pt 2.
6. Шахов Е. М. Об обобщении релаксационного кинетического уравнения Крукса. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
7. Шахов Е. М. Структура скачка уплотнения в одноатомном газе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2.

8. Кочин Н. Б., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 2. М., Физматгиз, 1963.
9. Рыков В. А. Об осреднении кинетического уравнения Больцмана по поперечной скорости для случая одномерных движений газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
10. Черемисин Ф. Г. Численное решение кинетического уравнения Больцмана для одномерных стационарных движений газа. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1970, т. 10, № 3.
11. Matula R. A. High temperature thermal conductivity of rare gases and gas mixtures. Paper Amer. Soc. Mech. Engrs, 1967, N WA/HT — 3.
12. Bird G. A. Direct simulation Monte-Carlo method — Current status and prospects. In: Rarefied Gas Dynamics, vol. 1. New York — London, Acad. Press., 1969.
13. Bird G. A. Aspects of the structure of strong shock waves. Phys. Fluids, 1970, vol. 13, No. 5.
14. Hicks B. L., Yen S. M. Solution of the non-linear Boltzmann equation for plane shock waves. In: Rarefied gas Dynamics, vol. 1. New York — London, Acad. Press., 1969.
15. Segal B. M., Ferziger J. H. Shock — wave structure using nonlinear model Boltzmann equations. Phys. Fluids, 1972, vol. 15, No. 7, pp. 1233—1247.
16. Giddens D. P., Huang A. B., Young V. Y. C. Evolution of two statistical models using the shock structure problem. Phys. Fluids, 1971, vol. 14, No. 12.