№ 4 МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА 1973

УДК 533.6.011.6:533.72.2

РАДИАЦИОННЫЙ СЛОЙ КНУДСЕНА

Н. К. МАКАШЕВ

(*Москва*)

Аналогия, которая существует между кинетической теорией газов и динамикой газа фотонов (см., например, [1]) позволяет перенести на последний многие качественные результаты, полученные в кинетической теории. Сюда следует отнести поведение излучающего оптически толстого газа около поверхностей тел.

Известно, что в оптически толстом газе приближение лучистой теплопроводности не годится на расстояниях порядка длины пробега излучения от поверхности тела [1,2]. Поведение газа фотонов вблизи поверхности должно описываться, исходя из полного уравнения переноса излучения.

В настоящей работе задача о таких пристеночных слоях в оптически толстом газе (которые имеют много общего с известными слоями Кнудсена) решается в приближении серого газа, находящегося в состоянии локального термодинамического равновесия. Для простоты рассмотрен лишь стационарный случай; получены выражения для скачков температуры на поверхности в широких пределах изменения температуры газа.

1. Рассмотрим излучающий газ, относительно которого будем предполагать, что распределение молекул по внутренним уровням соответствует локальному термодинамическому равновесию, а вкладом рассеяния можно пренебречь. При этих условиях для стационарного случая уравнение переноса радиации запишется в виде

$$dI_\nu / ds = K_\nu (B_\nu - I_\nu) \tag{1.1}$$

где I_ν, K_ν, B_ν и s — соответственно спектральная интенсивность излучения, спектральный коэффициент поглощения, функция Планка и координата вдоль направления луча.

Переписав (1.1) в интегральном виде и проинтегрировав полученное выражение дважды по частям, будем иметь

$$I_\nu(s) = B_\nu - \frac{1}{K_\nu}\frac{dB_\nu}{ds} + \left[I_\nu(s_0) - B_\nu(s_0) + \frac{1}{K_\nu(s_0)}\frac{dB_\nu(s_0)}{ds}\right] \times$$
$$\times \exp\left\{-\int_{s_0}^{s} K_\nu(\sigma_1)\,d\sigma_1\right\} + \int_{s_0}^{s} \frac{d}{ds}\frac{1}{K_\nu}\frac{dB_\nu}{ds} \exp\left\{-\int_{\sigma}^{s} K_\nu(\sigma_1)\,d\sigma_1\right\} d\sigma \tag{1.2}$$

Из (1.2) видно, что в оптически толстом газе, когда радиационное число Кнудсена $\varepsilon_R = (K_\nu L)^{-1} \ll 1$, L — характерный размер поля излучения, для представления решения уравнения (1.1) в виде, который известен как «приближение лучистой теплопроводности»

$$I_\nu = B_\nu \left(1 - K_\nu^{-1}\frac{d \ln B_\nu}{ds} + O(\varepsilon_R^2)\right) \tag{1.3}$$

необходимо, чтобы такое представление было справедливо во всех точках поля излучения. В противном случае, т. е. если в некоторой точке s_0 представление (1.3) несправедливо, решение уравнения (1.1) лишь асимптотически при $(s - s_0) K_\nu \to \infty$ стремится к нему. Такая ситуация возникает, например, около поверхностей тел, где имеют место слои толщиной порядка нескольких длин пробега излучения K_ν^{-1}, внутри которых решение (1.3) уравнения (1.1) непригодно [1, 2].

Аналогичные рассуждения можно провести и для нестационарного случая, в котором решение стремится к нестационарному аналогу (1.3) при $(t-t_0)K_\nu c \to \infty$, где t_0 — начальный момент времени, c — скорость света.

По аналогии с кинетической теорией газов, назовем пристеночные слои толщиной порядка K_ν^{-1}, в которых неприменимо решение (1.3), радиационными слоями Кнудсена.

Ниже будет построена асимптотическая теория радиационного слоя Кнудсена, причем в качестве основного малого параметра естественно принять газокинетическое число Кнудсена $\varepsilon = \lambda_K / L$, где λ_K и L — соответственно длина свободного пробега молекул и характерный размер течения. Число Кнудсена ε будем считать стремящимся к нулю. Радиационное число Кнудсена ε_R связано с ε очевидным соотношением

$$\varepsilon_R = \lambda_R / \lambda_K \varepsilon = \alpha^{-1}\varepsilon \tag{1.4}$$

где α для серого газа в приближении локального термодинамического равновесия является функцией лишь температуры. Обычно $\lambda_K \ll \lambda_R$ и $\alpha \ll 1$. Для всего газа при данных условиях можно определить порядок α, соотнеся ее с числом Кнудсена $\varepsilon : \alpha \sim \varepsilon^\beta$, $\beta > 0$. В оптически толстом газе, т. е. в случае, когда $\varepsilon_R \ll 1$, величина β заключается в интервале от нуля до единицы $(0 < \beta < 1)$.

Состояние оптически толстого газа над поверхностью может меняться между двумя предельными случаями, которые заключаются в том, что в одном из них газодинамические величины в радиационном слое Кнудсена обладают градиентами того же порядка, что и во внешней области, т. е. относительное изменение этих величин поперек слоя имеет порядок ε_R. В другом случае газодинамические величины меняются на свою величину в радиационном слое Кнудсена. Как будет далее показано, первый из случаев реализуется, например, в неподвижном излучающем оптически толстом газе над излучающей поверхностью, второй — в газе над сильно испаряющейся и нагретой поверхностью.

При решении газодинамических задач естественно не принимать во внимание толщину радиационного слоя Кнудсена, если $\lambda_R \ll L$. Но при этом область применимости решения (1.3) распространяется и на этот слой, где оно отличается от точного на ту или иную величину. Учет этого приводит к необходимости задавать на поверхности тела скачки температуры [1], величина которых может быть определена лишь из решения задачи о радиационном слое Кнудсена.

Задача об определении величины температурного скачка на поверхности рассматривалась Бай Ши-и [1]. Однако его решение нельзя признать правильным, так как, решая фактически обратную задачу с заданным полем температуры, он получает у поверхности тела разрыв потока энергии (что само по себе недопустимо), который совершенно непонятным образом связывает со скачком температуры.

2. Сначала рассмотрим оптически толстый неподвижный излучающий газ над поверхностью. Кроме предположения о справедливости приближения локального термодинамического равновесия, сделанного выше, предположим, что газ серый, т. е. коэффициент поглощения K_ν будем считать независящим от частоты излучения $(K_\nu = K)$; поверхость также является серой, т. е. коэффициенты излучения, отражения и излучательной способности (соответственно — a, r и e) не зависят от частоты; поверхность отражает и испускает излучение диффузно; показатель преломления газа близок к единице.

Перечисленные предположения позволяют рассматривать такую модель среды, которая существенно облегчает решение задачи, сохраняя при этом всю качественную картину явления.

Кроме того, предположим, что величина градиентов физических величин внутри слоя имеет тот же порядок, что и вне его. Последнее предположение, оправдываемое получаемым решением, соответствует конкретным физическим условиям, приведенным в начале этого пункта.

При сделанных предположениях из (1.2) следует, что если точку s_0 взять на внешней границе слоя Кнудсена, то для интенсивности падающего на поверхность излучения, проинтегрированной по всем частотам, будет справедливо выражение

$$
(2.1)\qquad I_- = B(s_w) + O\left(\varepsilon_R \frac{dB}{ds_L}\right), \quad s_L = \frac{s}{L}, \quad B = \frac{\sigma}{\pi} T^4
$$

где s_W соответствует точке у поверхности в координатах s_L, σ — постоянная Стефана — Больцмана.

Для интенсивности излучения, идущего от поверхности, имеем

$$
(2.2)\qquad \begin{aligned} & I_+ = eB_W + I_r = eB_W + rB(s_W) + O\left(\varepsilon_R \frac{dB}{ds_L}\right) \\ & B_W = B(T_W) \end{aligned}
$$

Здесь T_W — температура поверхности, I_r — интенсивность отраженного излучения. Так как коэффициенты a, r и e связаны соотношениями $a + r = 1$, $a = e$ и так как в силу сделанных предположений

$$
\begin{aligned} & B_W - B(s_W) = O(\varepsilon_R B_W) \\ (2.3)\qquad & I_+ = B(s_W)(1 + j_0) \qquad (j_0 = O(\varepsilon_R)) \end{aligned}
$$

Поэтому из (1.2) следует, что везде внутри слоя интенсивность слабо возмущена относительно некоторой B_0 при средней по толщине слоя температуре. Выберем эту температуру равной T_0, входящей в качестве граничного условия в решение внешней задачи (температура радиационного скольжения, не равная, вообще говоря, температуре поверхности), т. е. положим

$$
(2.4)\qquad I = B_0(1 + j), \quad j = O(\varepsilon_R), \quad B_0 = R(s_W)
$$

Следовательно, уравнение (1.1) может быть линеаризовано относительно возмущения интенсивности и температуры в кнудсеновском слое и в рассматриваемом плоском одномерном случае записано в виде

$$
(2.5)\qquad \frac{\cos\vartheta}{K_0} \frac{\partial j}{\partial y} = 4\tau - j
$$

где y — координата по нормали к поверхности, ϑ — угол между направлением луча света и нормалью к поверхности, τ — возмущение температуры, определенное как отклонение температуры в слое от T_0

$$
(2.6)\qquad T = T_0(1 + \tau), \quad \tau = O(\varepsilon_R)
$$

Введем внутреннюю координату в слое $\tilde{y}_1 = yK_0$. Вне радиационного слоя Кнудсена (при $y_1 \to \infty$) справедливо представление (1.3) для интенсивности I. Производя асимптотическое сращивание внутреннего решения с этим внешним, получаем внешний предел внутреннего решения равным

$$
(2.7)\qquad j \to 4\left(y - \frac{\cos\vartheta}{K_0}\right) \frac{\partial \ln T}{\partial y}\bigg|_{y=0}, \quad \tau \to y \frac{\partial \ln T}{\partial y}\bigg|_{y=0}, \quad y_1 \to \infty
$$

От газодинамических уравнений сохранения в рассматриваемой постановке остается лишь одно условие постоянства потока тепла поперек радиационного слоя Кнудсена. Так как в общем случае перенос тепла осуществляется как за счет радиации, так и за счет теплопроводности, то это условие имеет вид

$$q_K + q_R = \mathrm{const} \tag{2.8}$$

где q_K и q_R — соответственно поток энергии за счет теплопроводности и излучения. Толщиной газодинамического слоя Кнудсена при решении задачи о радиационном слое Кнудсена следует пренебречь, причем ошибка, которая делается в решении, как можно показать, имеет порядок $\alpha^2\partial \ln T / \partial y_1$. Вне газокинетического слоя Кнудсена с точностью до членов порядка $f_0\varepsilon^2$, где f_0 — максвелловская функция распределения, справедливо навье-стоксовское представление для функции распределения молекул газа, т. е. для q_K имеет место выражение

$$q_K = -\varkappa\partial T / \partial y(1 + O(\varepsilon))$$

где $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности. Поскольку $\varkappa$ является функцией от температуры, а температура меняется в слое на величину порядка ε_R, то

$$q_K = -\varkappa_0 T_0 \partial\tau / \partial y(1 + O(\varepsilon_R)), \quad \varkappa_0 = \varkappa(T_0) \tag{2.9}$$

Таким образом, выражая q_R через добавку к интенсивности излучения j и вводя безразмерный параметр

$$\delta = \frac{3}{16\pi}\frac{\varkappa_0 T_0 K_0}{B_0} \simeq \frac{\lambda_k}{\lambda_R}\varphi(T_0) \qquad \left(\varphi(T_0) = \frac{c_T}{c}\frac{P_0}{P_R}\right)$$

который определяет соотношение потоков энергии за счет теплопроводности и лучистой диффузии в суммарном потоке энергии (обратная числу δ величина обычно называется или числом потока излучения, или критерием Старка), запишем условие постоянства этого потока в виде

$$\frac{3}{2}\left[\int_0^{y_1}\tau(t)J_0(y_1 - t)\,dt - \int_{y_1}^{\infty}\tau(t)J_0(t - y_1)\,dt\right] + \tag{2.10}$$

$$+\frac{3}{8}j_0 J_1(y_1) - \delta\frac{d\tau}{dy_1} = -(1+\delta)\Gamma + O\left((\delta\varepsilon_R + \alpha^2)\frac{d\tau}{dy_1}\right)$$

$$\Gamma = \frac{1}{K_0}\frac{\partial \ln T}{\partial y}\bigg|_{y=0}, \qquad J_n(x) = \int_0^1 v^n \exp\left\{-\frac{x}{v}\right\}dv$$

$$j_0 = 4e\tau_W + 8(1-e)\int_0^{\infty}\tau(t)J_0(t)\,dt, \quad T_W = T_0(1+\tau_W)$$

Здесь c_T — тепловая скорость молекул, P_0 и P_R — давление газа над поверхностью и давление излучения.

В зависимости от температуры величина φ меняется в широких пределах: при достаточно низких температурах, когда $P_0 > P_R$ более чем в c / c_T раз, $\varphi \gg 1$. Наоборот, при высоких температурах и умеренных давлениях газа $\varphi < 1$. Определим порядок $\varphi(T_0)$ относительно числа Кнудсена ε следующим образом $\varphi \approx \varepsilon^{\omega}$. В результате порядок δ оказывается равным $\delta \sim \varepsilon^{\beta+\omega}$. Тогда если $\omega < -\beta$, то $\delta \gg 1$ и в полном потоке энергии основной вклад дает теплопроводность. Если $\omega > -\beta$, то $\delta \ll 1$ и преобладающим является вклад излучения. Первое имеет место в холодном газе, второе — при достаточно высоких температурах. Если $\omega = -\beta$, то $\delta \sim 1$ и обе составляющие в потоке энергии имеют одинаковый порядок.

3. Рассмотрим сначала случаи предельных значений δ, когда решение может быть сравнительно легко получено путем разложения по малому параметру.

Итак, пусть $\delta \gg 1$, т. е. $\omega < -\beta$. Проинтегрировав интегралы в правой части (2.10) по частям и вводя новую функцию $Q = d\tau \,/\, dy_1 - \Gamma$, получим для нее интегральное уравнение

$$(3.1)\qquad -\int_0^\infty Q(t)J_1(|y_1-t|)\,dt+\Gamma J_2(y_1)+[\tau_W-\tau(0)]J_1(y_1)+ \\ +\frac{4}{3}\frac{1-e}{e}[\Gamma-\delta Q(0)]J_1(y_1)-\frac{2}{3}\delta Q_1(y_1)=O((\delta\varepsilon_R+\alpha^2)Q)$$

Добавок к температуре τ связан с Q очевидным соотношением

$$(3.2)\qquad \tau(y_1)=\int_{y_{10}}^{y_1} Q(t)\,dt+\Gamma(y_1-y_{10})+\tau(y_{10})$$

где y_{10} — некоторая точка на оси y. Устремляя y_{10} к бесконечности, получим, что

$$\tau(0)=-\int_0^\infty Q(t)\,dt$$

Температура газа на внутренней границе радиационного слоя Кнудсена, вообще говоря, не равна температуре поверхности. Величина температурного скачка $\Delta\tau_K$, обусловленного газокинетическим слоем Кнудсена, также должна быть принята во внимание при получении решения. Для величины температурного скачка поэтому имеет место соотношение

$$(3.3)\qquad \tau_W=-\int_0^\infty Q(t)\,dt-\Delta\tau_K$$

Газокинетический скачок температуры $\Delta\tau_K$ определяется из решения уравнения Больцмана для молекул в кнудсеновском слое. В обычном решении (см., например, [3]) излучение во внимание не принимается. Условия, для которых имеющиеся выражения для $\Delta\tau_K$ можно использовать при наличии излучения, могут быть получены из следующих соображений.

В отсутствие излучения решение уравнения Больцмана для неподвижного газа над плоской поверхностью имеет интеграл $q_K = \mathrm{const}$. При излучении этот интеграл утрачивается из-за поглощения и испускания газом энергии в виде излучения, соответствующий интеграл для этого случая имеет вид $q_R + q_K = \mathrm{const}$. Если при этом относительное изменение q_K поперек слоя Кнудсена много меньше единицы, то в главном члене решение для $\Delta\tau_K$ справедливо и может быть использовано в первом приближении при наличии излучения.

Так как $\Delta q_R + \Delta q_K = 0$, то

$$(3.4)\qquad \overline{\Delta q_K}=\frac{\Delta q_K}{q_K}=O\left(\frac{B_0\varepsilon}{\varkappa_0(\partial T/\partial y)_{y_1=0}}\right)=O\left(\frac{\varepsilon_R}{\varphi\tau'(0)}\right)$$

Поэтому условие применимости обычного выражения для $\Delta\tau_K$ заключается в следующем:

$$\varepsilon_R[\varphi(T_0)\tau'(0)]^{-1} \ll 1 \tag{3.5}$$

Решение уравнения (3.1) представим в виде

$$\begin{gathered} Q = Q_0(y_1) + f_1(\varepsilon)Q_1(y_1) + f_2(\varepsilon)Q_2(y_1) + \ldots \\ Q_i(y_1) = O(\varepsilon_R), \quad f_i(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \\ f_{i+1}(\varepsilon) = o(f_i(\varepsilon)) \end{gathered} \tag{3.6}$$

Из (3.1) видно, что $Q_0 \equiv 0$, т. е. $d\tau / dy_1 = \Gamma(1 + o(1)) = O(\varepsilon_R)$. Поэтому $\overline{\Delta q_K} = O(\varepsilon^{-\infty}) \ll 1$ и с этой точностью выражения для скачков температуры в газокинетическом слое Кнудсена могут быть использованы в решении. Таким образом, $\Delta\tau_K = O(\varepsilon)$. Тогда из (3.1) следует, что $f_1(\varepsilon) = \delta^{-1}$ и Q_1 удовлетворяет уравнению

$$\Gamma J_2(y_1) + \frac{4}{3}\frac{1-e}{e}[\Gamma - Q_1(0)]J_1(y_1) - \frac{2}{3}Q_1(y_1) = 0 \tag{3.7}$$

из которого Q_1 легко находится. В результате для скачка температуры получаем выражение

$$\tau_W = \frac{T_W - T_0}{T_0} = -\Delta\tau_K - \delta^{-1}\Gamma\left(\frac{3}{8} + \frac{1-e}{3}\right) + \ldots \tag{3.8}$$

На основании (3.8) можно сделать вывод: если температура газа настолько низка, что $\delta^{-1} \ll \alpha$, то вкладом излучения в скачок температуры на поверхности следует пренебречь. В противном случае излучение дает основной вклад в величину скачка температуры.

Исследуем теперь режим, когда преобладает перенос энергии за счет радиации, т. е. когда $\delta \ll 1$. Сначала рассмотрим предельный случай нетеплопроводной среды ($\delta \equiv 0$). Здесь условия постоянства потока энергии поперек слоя выражаются в требовании постоянства потока излучения q_R. Отсюда следует, что

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (4\tau - j)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\chi = 0 \tag{3.9}$$

и для τ имеем неоднородное интегральное уравнение

$$\tau = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \tau(t)J_{-1}(|y_1 - t|)\,dt + \frac{j_0}{8}J_0(y_1) \tag{3.10}$$

решение которого при $y_1 \to \infty$ должно выходить на асимптоту $y_1\Gamma$. Представив общее решение уравнения в виде суммы общего решения однородного [1] и частного решения неоднородного уравнения, получим

$$\tau(y_1) = \tau_* \sqrt{3}\,[g(y_1) + y_1] + \tau_W + \frac{4}{3}\frac{1-e}{e}\Gamma \tag{3.11}$$

Функция $g(y_1)$ монотонно меняется по y_1 от $1/\sqrt{3}$ при $y_1 = 0$ до 0.710 при $y_1 \to \infty$, ее производная при $y_1 = 0$ имеет логарифмическую особенность.

---

[1] Это уравнение ранее исследовалось и решение его известно (см. [4, 5]).

Постоянная τ_* в (3.11) определяется из граничного условия при $y_1 \to \to \infty$ равной $\Gamma / \sqrt{3}$, из этого же условия следует:

$$\tau_W = -\left[0.710 + \frac{4}{3}\frac{1-e}{e}\right]\Gamma \tag{3.12}$$

В результате решение уравнения (3.10) окончательно представляется формулой

$$\tau(y_1) = [g(y_1) - 0.710]\Gamma + y_1\Gamma \tag{3.13}$$

При ненулевых малых δ из (2.10) следует, что на внутренней границе радиационного слоя Кнудсена это решение имеет особенность (действительно, (3.13) не является равномерно пригодным при всех y_1, так как при $y_1 \to 0$ производная от функции $g(y_1)$ имеет логарифмическую особенность), в результате чего нарушается уравнение сохранения потока энергии (2.10). Для разрешения этих трудностей воспользуемся методом внешних и внутренних разложений [6], считая (3.13) первым членом в разложении внешнего решения, который при $y_1 \to 0$ срастим с первым членом внутреннего решения.

Продифференцировав (2.10) по y_1, получим

$$\frac{3}{2}\left[2\tau - \int_0^\infty \tau(t)J_{-1}(|y_1 - t|)\,dt\right] - \frac{3}{8}j_0 J_0(y_1) = \delta\frac{d^2\tau}{dy_1^2} \tag{3.14}$$

Введем внутреннюю координату $Y = y_1\delta^{-1/2}$. Тогда для первого члена внутреннего разложения имеем уравнение

$$\frac{d^2T_{00}}{dY^2} = 3T_{00} - \frac{3}{8}j_0 - \frac{3}{2}\int_0^\infty \tau_0(t)J_{-1}(t)\,dt$$

где τ_0 представляется выражением (3.13). Из (3.10) следует, что

$$\tau_0(0) = j_0/8 + {}^1/_2\int_0^\infty \tau_0(t)J_{-1}(t)\,dt$$

и окончательно

$$\frac{d^2T_{00}}{dY^2} = 3T_{00} - 3\tau_0(0) \tag{3.15}$$

Решением этого уравнения, удовлетворяющим условию ограниченности при $Y \to \infty$ и условию сращивания с τ_0, является

$$T_{00}(Y) = T_* e^{-\sqrt{3}Y} + \tau_0(0) \tag{3.16}$$

Можно показать, что следующий член во внутреннем разложении имеет порядок $\delta^{1/2}\ln\delta$. Подстановка (3.16) в (2.10) показывает, что теплопроводность оказывается несущественной во всем поле, так что для τ_W в главном члене остается справедливым выражение (3.12). Постоянная T_* в (3.16) находится из условия при $Y = 0$, которое уже обсуждалось выше

$$T_{00}(0) = T_* + \tau_0(0) = \tau_W + \Delta\tau_K$$

Следует отметить, что проведенное решение имеет смысл, если только $\lambda_R\delta^{1/2} \gg \lambda_K$, так как в противном случае вводимый подслой будет порядка и меньше по толщине, чем газокинетический кнудсеновский слой, и в этом случае закон Фурье для теплопроводности будет не справедлив. Из этого ограничения следует, что данное решение корректно, если $\delta^{1/2} \gg \alpha$, т. е.

$\varphi \gg \alpha$. В этом случае

$$\overline{\Delta q_\kappa} = O(\alpha^{1/2}\varphi^{-1/2}) \ll 1, \qquad \Delta\tau_\kappa = O(\alpha\delta^{-1/2}\varepsilon_R) \ll \varepsilon_R$$

Поэтому в главном члене $\Delta\tau_\kappa$ можно пренебречь и

$$T_* + \tau_0(0) = \tau_W \tag{3.17}$$

Поскольку при $\varphi \gg \alpha$ выражение для τ_W уже совпадает с предельным, полученным при $\delta \equiv 0$, можно ожидать, что и при $\delta \ll \alpha^2$, когда данное решение уже непригодно, величина температурного скачка τ_W в главном члене дается тем же выражением (3.12).

4. В промежуточном случае $\delta \sim 1$ для решения воспользуемся приближенным методом, который известен как метод Шварцшильда — Шустера.

Умножая уравнение (2.5) на $\sin\vartheta d\vartheta$, интегрируя по «положительной» и «отрицательной» полусферам и заменяя в каждом случае $\cos\vartheta$ под знаком интеграла на его среднее значение в данном интервале углов, получим

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dy_1}\langle j_+\rangle = 4\tau - \langle j_+\rangle, \qquad -\frac{1}{2}\frac{d}{dy_1}\langle j_-\rangle = 4\tau - \langle j_-\rangle \\ \langle j_+\rangle = \int_0^{\pi/2} j\sin\vartheta\, d\vartheta, \quad \langle j_-\rangle = \int_{\pi/2}^{\pi} j\sin\vartheta\, d\vartheta\end{gathered} \tag{4.1}$$

Так как поток энергии за счет радиации в указанном приближении записывается как

$$q_R = \pi B_0[\langle j_+\rangle - \langle j_-\rangle] \tag{4.2}$$

то приближенный аналог уравнения (2.10) выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered}2\left[\int_0^{y_1} \tau(t)e^{-2(y_1-t)}\,dt - \int_{y_1}^{\infty}\tau(t)e^{-2(t-y_1)}\,dt + \frac{\langle j_0\rangle e^{-2y_1}}{8}\right] - \\ -\delta_1\frac{d\tau}{dy_1} + (1+\delta_1)\Gamma = 0\end{gathered} \tag{4.3}$$

$$\delta_1 = \frac{\varkappa_0 T_0 K_0}{4\pi B_0}, \quad \langle j_0\rangle = 4e\tau_W + 8(1-e)\int_0^{\infty}\tau(t)e^{-2t}\,dt \tag{4.4}$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию на бесконечности, имеет вид

$$\begin{gathered}\tau = y_1\Gamma + B_*\exp\left\{-\sqrt{4+\frac{4}{\delta_1}}\,y_1\right\}, \quad \tau_W = -\left[\frac{\Gamma}{2} + \frac{1-e}{e}\times\right. \\ \left.\times\left(\Gamma + B_*\sqrt{4+\frac{4}{\delta_1}\delta_1}\right) + 2B_*\Big/\left(\sqrt{4+\frac{4}{\delta_1}}-2\right)\right]\end{gathered} \tag{4.5}$$

Так как при $\delta \sim 1$ $\Delta\tau \sim \varepsilon$, то постоянная B_* связана с τ_W соотношением

$$B_* = \tau(0) = \tau_W + \Delta\tau_\kappa \simeq \tau_W$$

Поэтому в главном члене для τ_W получаем

$$\tau_W = -\frac{(2-e)\Gamma}{2[(1+\delta_1)e + \sqrt{\delta_1(1+\delta_1)}(2-e)]} \tag{4.6}$$

Из (4.6) видно, что при $\delta_1 \to 0$ для τ_W получается следующая величина скачка температуры в радиационном слое Кнудсена

$$\tau_W = -[0.5 + (1-e)/e]\Gamma \tag{4.7}$$

которая довольно близко совпадает с точным значением. Можно ожидать, что (4.6) дает удовлетворительную точность в определении величины скачка температуры и качественно верно описывает процесс совместного влияния теплопроводности и диффузии излучения на величину скачка температуры.

5. Рассмотрим теперь случай, когда температура газа под воздействием излучения меняется в радиационном слое Кнудсена на свою величину. В [7] установлено, что при сильном испарении материала поверхности температура газа в газокинетическом слое Кнудсена меняется на свою величину, т. е. $\Delta\tau_K = O(1)$. Поэтому если поверхность и газ излучают, то излучение, исходящее из поверхности, прогревает газ и температура его меняется. Предполагая, что имеет место локальное термодинамическое равновесие (что может быть очень грубым приближением для течений такого рода), можно показать, что масштаб изменения температуры равен

$$\Delta y \sim K^{-1}(1 + P_0 c / B_0) u / c$$

где u — скорость по нормали к поверхности.

Если температура газа настолько низка, что $P_0 u / B_0 \gg 1$, то влиянием излучения можно пренебречь. Если же $P_0 u / B_0 \sim 1$, то температура газа под действием излучения поверхности меняется на свою величину на толщине радиационного слоя.

Поэтому в этом случае $\tau_W \sim 1$, хотя и меньше газокинетического скачка температуры. Наконец, при еще более высоких температурах, когда $\Delta y \ll \lambda_R$, температура резко меняется глубоко на дне радиационного слоя Кнудсена, достигая в главном члене величины температуры поверхности T_W.

В заключение автор благодарит М. Н. Когана за идею работы и руководство при ее выполнении.

Поступила 22 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бай Ши-и.* Динамика излучающего газа. М., «Мир», 1968.
2. *Филлипов П. П.* К вопросу о переносе лучистой энергии в среде. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 1.
3. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
4. *Соболев В. В.* Диффузия излучения в полубесконечной среде. Докл. АН СССР, 1957, т. 116, № 1.
5. *Минин И. Н.* К теории диффузии излучения в полубесконечной среде. Докл. АН СССР, 1958, т. 120, № 1.
6. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
7. *Коган М. Н., Макашев Н. К.* О роли слоя Кнудсена в теории гетерогенных реакций и в течениях с реакциями на поверхности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 6.