УДК 533.6.011.55

# ОБТЕКАНИЕ СТЕПЕННЫХ ТЕЛ ПРИ СИЛЬНОМ СЖАТИИ В УДАРНОМ СЛОЕ

**В. В. МИХАЙЛОВ**

(*Москва*)

Рассматриваются плоское и осесимметричное течения невязкого совершенного газа около тел со степенной формой образующей при числе $M_\infty = \infty$ и показателе адиабаты $\varkappa \to 1$. Главное внимание уделяется случаю, когда не существует ньютоновского свободного слоя, но ударный слой является неприсоединенным на больших расстояниях от носика тела.

В работе [1] было показано, что для достаточно тонких затупленных тел при $M_\infty = \infty$ и $\varkappa \to 1$ известная схема течения Ньютона — Буземана со свободным ударным слоем [2] не применима на достаточном удалении от носика тела, где оторвавшийся ударный слой взаимодействует с поверхностью тела через давление. Однако имеется целый класс тонких тел, когда при указанном предельном переходе присоединенный в окрестности носика тела слой сильно сжатого газа переходит не в свободный, а непосредственно в оторвавшийся, но взаимодействующий с телом ударный слой. Сюда относятся, в частности, тела со степенной формой образующей $r = Cx^n$ ($C$ и $n = \mathrm{const}$) при $1 / (1 + \nu) \leqslant n \leqslant 2 / (2 + \nu)$, где $\nu = 1$ и 2 соответственно для плоского и осесимметричного течений.

Изучение обтекания степенных тел с $n \leqslant 2 / (2 + \nu)$ представляет интерес также и потому, что для таких тел нельзя получить решение с помощью классической нестационарной аналогии.

Введем прямоугольную или цилиндрическую систему координат $x$, $r$ с осью $x$, направленной вдоль направления скорости невозмущенного потока, и примем следующие обозначения: $\rho\rho_\infty$ — плотность, $p\rho_\infty u_\infty^2$ — давление, $uu_\infty$, $vu_\infty$ — составляющие скорости вдоль $x$ и $r$ соответственно, $\rho_\infty$, $u_\infty$ — плотность и скорость равномерного набегающего потока, $R(x)$, $r_b(x)$ — безразмерные ординаты ударного слоя и поверхности тела, $\varkappa$ — показатель адиабаты, $\psi$ — функция тока ($\partial\psi / \partial r = \nu\rho u r^{\nu-1}$), $L$ — характерная длина, выбранная таким образом, что форма тела в безразмерном виде записывается как $r_b = x^n$, $c_x = X / (\rho_\infty u_\infty^2 \pi^{\nu-1} L^\nu)$ — коэффициент сопротивления тела ($X$ — сопротивление), $m = n(2 + \nu) - 2$, $\varepsilon = \varkappa - 1$.

1. Найдем диапазоны значений $n$, определяющие различные схемы течения при $M_\infty = \infty$, $\varkappa - 1 \ll 1$ и $0 < n < 1$.

Распределение давления за присоединенным ударным слоем определяется формулой Ньютона — Буземана

$$(1.1)\qquad (1 + R'^2)p = R'^2 + \frac{R''}{R^{\nu-1}(1 + R'^2)^{1/2}} \int\limits_0^R \frac{R^{\nu-1}\,dR}{(1 + R'^2)^{1/2}}$$

Здесь штрихами обозначены производные по $x$.

В точке образования свободного ударного слоя давление на теле $p = 0$. Второе слагаемое правой части (1.1) может быть оценено сверху по модулю выражением $RR'' / \nu$. Отсюда следует, что при $R'^2 \geqslant |RR'' / \nu|$ давление на поверхности тела обратиться в нуль не может, т. е. свободного слоя не существует, если $n \geqslant 1 / (1 + \nu)$.

С другой стороны, оценка $RR'' / \nu$ для второго слагаемого (1.1) становится как угодно точной при $x \to \infty$. Поэтому в случае, когда $n < 1 / (1 + \nu)$ на любую конечную величину, значение $R'^2 < -RR'' / \nu$ также на конечную величину и, следовательно, существует значение $x$, при котором $p = 0$.

Таким образом, течение со свободным ударным слоем для степенных тел определяется значениями

$$(1.2)\qquad 0 < n < 1 / (1 + \nu)$$

Рассмотрим $n \geqslant 1 / (1 + \nu)$ и покажем, что ударный слой может отрываться от поверхности тела, не образуя свободный слой.

Для доказательства предположим, что ударный слой является присоединенным ($R = r_b$), и рассмотрим течение за степенными скачками уплотнения $R = x^n$, определив порядок относительной толщины возмущенного слоя $\Delta r / R$.

Из уравнения сохранения расхода

$$\frac{\Delta r}{R} \sim R^{-\nu} \int_0^{R^\nu} \frac{d\psi}{\rho u} \tag{1.3}$$

Из условий за скачком уплотнения, уравнений изэнтропы и сохранения энергии

$$\rho \sim \varepsilon^{-1} (1 + \psi^{(1-n)/(\nu n)})^{1/\varkappa} x^{2(n-1)/\varkappa}$$

$$1 \geqslant O(u) \geqslant (1 + \psi^{2(n-1)/(\nu n)})^{-1/2}$$

Отсюда и из соотношения (1.3) при $n > 1 / (1 + \nu)$ имеем

$$\frac{\Delta r}{R} \sim \varepsilon x^{2/\varkappa - n(2+\nu\varkappa)/\varkappa} + \frac{\varepsilon\varkappa}{n(2+\nu\varkappa) - 2}, \qquad n \neq \frac{2}{2+\nu\varkappa}$$

$$\Delta r / R \sim \varepsilon \ln x, \qquad n = 2 / (2 + \nu\varkappa) \tag{1.4}$$

При $n = 1 / (1 + \nu)$ порядок величины $\Delta r / R$ во всяком случае не меньше полученной оценки.

Из (1.4) следует, что ударный слой может быть присоединенным ($\Delta r / R < O$ (1)) только при выполнении условия

$$m > 0, \quad m > O(\varepsilon), \quad n > 2 / (2 + \nu) + |\beta\varepsilon|, \quad \beta = O\,(1)$$

Окончательно, предполагая значения $n$ фиксированными (при $\varepsilon \to 0$), имеем следующую классификацию схем течения: а) $n < 1 / (1 + \nu)$ — существует свободный ударный слой, б) $1 / (1 + \nu) \leqslant n \leqslant 2 / (2 + \nu)$ — ударный слой отрывается от тела, не являясь свободным, в) $n > 2 / (2 + \nu)$ — течение с присоединенным ударным слоем.

Известный класс автомодельных течений около тел $r_b = x^n$, полученный применением нестационарной аналогии, относится к случаю в). Отметим, что существование ударного слоя, в котором сосредоточена основная масса газа, может быть доказано для случая б) с помощью оценок, аналогичных проведенным в работе [1].

2. Исследуем решение задачи при $1 / (1 + \nu) < n < 2 / (2 + \nu)$.

Выпишем уравнения, полученные для течений на тонких телах с отошедшем ударным слоем в работе [1]

$$\frac{p}{\varepsilon}(R^\nu - r_b^{\,\nu}) - \frac{p}{\varepsilon} \int_{r^\nu}^{R^\nu} \frac{1-u}{1+u}\, dr^\nu = \nu \int_0^x p r_b^{\,\nu-1} \frac{dr_b}{dx}\, dx \tag{2.1}$$

$$p = R'^2 + RR''/\nu$$

Правая часть первого уравнения представляет собой коэффициент сопротивления тела. При этом из полного сопротивления не выделена часть, соответствующая сопротивлению затупления, как это делалось в работе [1], поскольку для случая б) не существует фиксированной точки отрыва ударного слоя, разделяющей тело на затупление и боковую поверхность.

Область применимости уравнений (2.1) согласно оценке (1.4) при $1 / (1 + \nu) < n < 2 / (2 + \nu)$ соответствует условию $\Delta r / R \geqslant O(1)$ или

$$O(x) \geqslant \varepsilon^{1/m} = x_0 \qquad (O(1) = m < 0) \tag{2.2}$$

Отрыв ударного слоя может произойти только тогда, когда давление будет меньше давления в области присоединенного ударного слоя. Поэтому в области оторвавшегося ударного слоя

$$p(x) < O[p(x_0)] = O(\varepsilon^{2(n-1)/m}) \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0)$$

Отсюда следует, что на линиях тока прошедших через оторвавшийся скачок уплотнения

$$1 - u \leqslant O(R_s'^2) \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0)$$

($R_s'$ — наклон скачка уплотнения при $R^\nu = \psi$).

Таким образом, интеграл в левой части первого уравнения (2.1) можно вычислять только для значений $r$, соответствующих линиям тока, прошедшим через присоединенный скачок уплотнения. На этих линиях тока $\psi_{\max} \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$.

Поэтому аналогично работе [1]

$$\frac{p}{\varepsilon}\int\limits_{r^\nu}^{R^\nu}\frac{1-u}{1+u}dr^\nu = \frac{1}{2}\int\limits_0^\psi \frac{(1-u)^2}{u}d\psi = Q \qquad (\psi\to\infty) \tag{2.3}$$

$$u = [1+n^2(1-g)\psi^{2(n-1)/(\nu n)}]^{1/2}[1+n^2\psi^{2(n-1)/(\nu n)}]^{-1/2}, \quad g = p^\varepsilon$$

Здесь $u$ получено из уравнений изэнтропы и энергии, а значение $p$ в области интегрирования положено постоянным и равным давлению за ударным слоем.

Для $0 \leqslant g \leqslant 1$ интеграл (2.3) сходится при $\psi \to \infty$, если $n > 1/(1+\nu)$, и при $\psi \to \infty$, если $n < 2/(2+\nu)$. Таким образом, параметр $Q$ можно считать величиной порядка единицы.

Интеграл в правой части первого уравнения (2.1) (коэффициент сопротивления тела) будем вычислять, используя распределение давления, даваемое формулой Ньютона — Буземана (1.1), и считая верхний предел стремящимся к бесконечности. Вклад давления в области отошедшего ударного слоя в полное сопротивление не учитываем, так как он является внепорядковой величиной, поскольку из решения (2.1)

$$p \sim \varepsilon^{2/(2+\nu)}x^{-2\nu/(2+\nu)}$$

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} pr_b^{\nu-1}\frac{dr_b}{dx}dx \sim \varepsilon^{2/(2+\nu)}\, x_0^{m\nu/(2+\nu)}\,\frac{1}{m}$$

Если $O(1) = m < 0$, а $x_0 \to \infty$, то записанный интеграл стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Перенося интеграл $Q$ в правую часть (2.1) и обозначая сумму интегралов через $c_e(g)$ («эффективный коэффициент сопротивления» [1]), полулучим

$$p(R^\nu - r_b^\nu) = \varepsilon c_e, \quad p = R'^2 + RR''/\nu, \quad r_b = x^n \tag{2.4}$$

Система (2.4) выведена для случая течения с оторвавшимся ударным слоем. Однако когда все входящие в (2.4) параметры по порядку величины равны единице, то (2.4) дает решение для присоединенного ударного слоя при $R'^2 \ll 1$ $(\varepsilon \to 0)$.

В области отошедшего ударного слоя необходимо ввести новые безразмерные функции, позволяющие исключить из системы малый параметр $\varepsilon$. При $r_b \sim R$ $(R^\nu - r_b^\nu \sim R^\nu)$ такую замену можно произвести следующим образом:

$$\begin{gathered} N = \varepsilon c_e, \quad x = \xi N^{1/m}, \quad R = R^\circ N^{n/m} \\ p = p^\circ N^{2(n-1)/m}, \quad d/dx = N^{-1/m}d/d\xi \end{gathered} \tag{2.5}$$

Согласно (2.5) параметр $N(g)$ при переходе от $d/dx$ к $d/d\xi$ принят постоянным. Относительная погрешность, допускаемая при этом, как будет показано ниже, стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, произведя замену (2.5), для решения задачи обтекания тела $r^\circ = \xi^n$ получим

$$p^\circ(R^{\circ\nu} - \xi^{n\nu}) = 1, \quad p^\circ = R_\xi^{\circ 2} + R^\circ R_{\xi\xi}^\circ/\nu \tag{2.6}$$

Здесь индексами $\xi$ и $\xi\xi$ обозначены однократные и двукратные производные по $\xi$.

Начальное условие для решения системы (2.6) выбираем, используя требование асимптотического сращивания с решением при $x = O(1)$, т. е. $R^\circ \to r^\circ = \xi^n$ $(\xi \to 0)$.

В отличие от случая течения со свободным ударным слоем выбранное условие обеспечивает сопряжение не только формы ударного слоя, но и давления на поверхности тела (при течении со свободным ударным слоем величина давления за ним неизвестна, так как является в главном приближении величиной высшего порядка малости).

Для перехода к «физическим» переменным $x$, $R$, $p$ необходимо знать зависимость $N(g) = \varepsilon c_e$

$$c_e = \nu \int\limits_0^c p r_b^{\nu-1} \frac{dr_b}{dx} dx + \frac{1}{2} \int\limits_0^\psi \frac{(1-u)^2}{u} d\psi \qquad (x, \psi \to \infty) \tag{2.7}$$

Первый интеграл в записанном выражении вычисляется с помощью схемы течения Ньютона — Буземана с присоединенным ударным слоем. Для $r_b^\nu = x^{\nu n} = \psi$ этот интеграл может быть записан как

$$\int^\psi [1 - (1 + n^2 \psi^{2(n-1)/(\nu n)})^{-1/2}] d\psi \qquad (\psi \to \infty)$$

Окончательно, используя зависимость $u = u(\psi, g)$ (2.3), для расчета $c_e$ будем иметь

$$c_e = \frac{\nu}{2(1-n)n^{2k+1}} \int\limits_0^\infty \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+s}{1+(1-g)s}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+(1-g)s}{1+s}} - \frac{1}{\sqrt{1+s}} \right) s^k \, ds \tag{2.8}$$

Здесь

$s = n^2 \psi^{2(n-1)/(\nu n)}$, $k = -1 - \nu n / (2 - 2n)$, $-2 < k < -3/2$ при $2/(2+\nu) > n > 1/(1+\nu)$,

что обеспечивает сходимость несобственного интеграла (2.8).

Значение $g = p^\varepsilon$ меняется при $\varepsilon \to 0$ и $O(1) \geqslant p \geqslant 0$ от 1 до 0. Значение $g = 1$ соответствует течению, когда $u = \text{const}$ при $\psi = \text{const}$ (так же как и в течении Ньютона — Буземана); $g \approx 0$ означает, что $u \approx 1$, т. е. применима теория плоских сечений (нестационарная аналогия). Естественно, что $c_e(0) = c_x$.

Когда в (2.6) все параметры считаются равными по порядку величины единице, $g = p^\varepsilon \to p^{\overset{\varepsilon}{\circ}} \to 1$ при $\varepsilon \to 0$. Однако при любом фиксированном значении $\varepsilon$ и $\xi \to \infty$ значение $p^{\circ\varepsilon} \approx g$ может стать как угодно малым, так как при $\xi \to \infty$ из (2.6) следует:

$$R^\circ \sim \xi^{2/(2+\nu)}, \qquad p^\circ \sim \xi^{-2\nu/(2+\nu)}$$

Последние соотношения справедливы в той области, где членом $\xi^{n\nu}$ в (2.6), т. е. влиянием формы тела, можно пренебречь.

Течение в этой области описывается решением, соответствующим сильному взрыву. При этом энергия взрыва (на единицу площади при $\nu = 1$ и единицу длины при $\nu = 2$) должна равняться эффективному сопротивлению тела $c_e \pi^{\nu-1} L^\nu \rho_\infty u_\infty^2$.

При $g = 1$ из (2.8) следует:

$$c_e(1) = \frac{\nu}{4(1-n)n^{2k+1}} \int_0^\infty \frac{s^{k+1}}{\sqrt{1+s}} ds = \tag{2.9}$$

$$= \frac{\nu}{4(1-n)n^{2k+1}} \frac{\Gamma(k+2)\Gamma(-k-{}^3/_2)}{\Gamma({}^1/_2)}$$

Здесь $\Gamma$ — гамма-функция.
При $g = 0$

$$c_e(0) = \frac{\nu}{2(1-n)n^{2k+1}} \int_0^\infty \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+s}}\right) s^k ds = \tag{2.10}$$

$$= \frac{\nu}{2(1-n)n^{2k+1}} \frac{3+2k}{2(k+1)} \int_0^\infty \frac{s^{k+1}}{\sqrt{1+s}} ds = \frac{3+2k}{k+1} c_e(1)$$

Имея соотношение (2.8), можно оценить и относительную погрешность замены $d/dx = N^{-1/m} d/d\xi$ (2.5). Согласно [1] эта погрешность равна $\varepsilon d \ln c_e / d \ln g$. Дифференцируя (2.8) параметрически [1], получим

$$\max \varepsilon d \ln c_e / d \ln g \sim (-\varepsilon \ln \varepsilon)^{-k-{}^3/_2} (\ln \varepsilon)^{-1}$$

$$(g \approx 1 + \varepsilon \ln p = 1 + O(\varepsilon \ln \varepsilon))$$

3. Чтобы выяснить картину перехода от течения с полностью присоединенным ударным слоем ($n > 2/(2+\nu) + |\beta\varepsilon|$, $\beta = O(1)$), рассмотрим случай $n = 2/(2+\nu) + \beta\varepsilon$, когда согласно оценке (1.4) применима схема с оторвавшимся ударным слоем.

В рассматриваемом случае, как и ранее, область оторвавшегося ударного слоя уходит на бесконечность при $\varepsilon \to 0$. Это означает, что на длинах $0 \leqslant x \leqslant x_0$ ($\varepsilon \ln x_0 < O(1)$ при $\varepsilon \to 0$) справедливо течение Ньютона — Буземана с присоединенным ударным слоем.

При этом сопротивление по крайней мере этой части тела стремится к бесконечности при $\varepsilon \to 0$, что следует из соотношения (2.10).

Поскольку $Q = O(1)$ при $n = 2/(2+\nu) + \beta\varepsilon$, значением $Q$ можно пренебречь в соотношениях (2.1) и исследовать решение системы

$$p(R^\nu - r_b^\nu) = \varepsilon\nu \int_0^x p r_b^{\nu-1} \frac{dr_b}{dx} dx \tag{3.1}$$

$$p = R'^2 + RR''/\nu, \qquad r_b = x^{2/(2+\nu)+\beta\varepsilon}$$

Введем в (3.1) замену

$$R = R_* x^{2/(2+\nu)+\beta\varepsilon}, \qquad p = p_* x^{-2\nu/(2+\nu)+2\beta\varepsilon}$$

[1] Достаточные условия для такого дифференцирования выполняются.

Тогда из (3.1) при $\varepsilon \to 0$ следует:

$$p_* x^{\beta\varepsilon(2+\nu)} (R_*^{\nu} - 1) = \frac{2\nu}{2+\nu} \varepsilon \int_0^x p_* x^{\beta\varepsilon(2+\nu)-1} dx$$

$$p_* = x^2 \left( R_*'^2 + \frac{R_*'' R_*}{\nu} \right) + \frac{4(\nu+1)}{\nu(\nu+2)} x R_*' R_* + \frac{2}{(\nu+2)^2} R_*^2$$

Продифференцировав первое из полученных соотношений по $x$ и введя переменную $\zeta = \varepsilon \ln x$, при $\varepsilon \to 0$ будем иметь

$$\begin{aligned}(3.2) \qquad & p_{*\zeta}(R_*^{\nu} - 1) + \nu p_* R_*^{\nu-1} R_{*\zeta} + p_*[-2\nu/(2+\nu) + \\ & + (R_*^{\nu} - 1)\beta(2+\nu)] = 0 \\ & p_* = 2R_*^2 (2+\nu)^{-2}\end{aligned}$$

или, исключив $p_*$,

$$(3.3) \qquad R_{*\zeta}[R_*^{\nu} - 2/(2+\nu)] = R_*[\beta(1 - R_*^{\nu}) + 2\nu(2+\nu)^{-2}]$$

Здесь индексом $\zeta$ обозначены производные по $\zeta$.

Начальные условия для (3.3) следуют из требования асимптотического сращивания с решением для присоединенного ударного слоя, т. е. $R_* \to 1$ при $\zeta \to 0$.

Решение (3.3) с указанными начальными условиями дает

$$\begin{aligned}(3.4) \qquad \zeta = -\frac{1}{2\nu + \beta(2+\nu)^2} \Big\{ & 2(2+\nu) \ln R_* + \\ & + \frac{2 + (2+\nu)\beta}{\beta} \ln \left[ 1 + \frac{(2+\nu)^2}{2\nu} \beta (1 - R_*^{\nu}) \right] \Big\}\end{aligned}$$

Рассмотрим вид решения для различных значений $\beta$.

Пусть $\beta > 0$. Тогда при $\zeta \to \infty$ из (3.4) следует, что значение $R_*$, увеличиваясь, стремится к некоторой постоянной величине, определяемой равенством

$$(3.5) \qquad R_*(\infty) = R(\infty) / r_b(\infty) = [1 + 2\nu(2+\nu)^{-2}\beta^{-1}]^{1/\nu}$$

Таким образом, при $\beta > 0$ и $\zeta \to \infty$ значение $R / r_b \to \text{const}$, и рассматриваемое течение соответствует в пределе известным автомодельным решениям для $n = 2 / (2+\nu) + \beta\varepsilon$ и $\varepsilon \to 0$.

Ударный слой присоединяется к поверхности тела при $\beta \to \infty$.

Пусть $\beta = 0$. Этот случай особенно интересен тем, что является границей значений $n$, на которой автомодельные решения становятся неприменимыми. Из (3.5) следует, что при $\beta \to 0$ $(\beta > 0)$ скачок отходит от тела на все большее расстояние и при $\beta = 0$ значение $R / r_b \to \infty$, если $\zeta \to \infty$. Соотношение (3.4) при $\beta = 0$ принимает вид

$$(3.6) \qquad \zeta = -\frac{2+\nu}{\nu} \ln R_* + \left( \frac{2+\nu}{\nu} \right)^2 \frac{R_*^{\nu} - 1}{2}$$

Отсюда при $\zeta \to \infty$

$$R \to x^{2/(2+\nu)} [\nu^2 (2+\nu)^{-2} 2\varepsilon \ln x]^{1/\nu}$$

Пусть $\beta < 0$. В этом случае при $\zeta \to \infty$ из соотношения (3.4) следует:

$$R \to Cx^{2/(2+\nu)} \qquad (C = C(\beta, \nu))$$

Последнее означает, что геометрия скачка соответствует решению, полученному из аналогии с сильным взрывом, если $\zeta \to \infty$. Иначе говоря, сопротивление полубесконечного тела при $\beta < 0$ и $\varepsilon = \mathrm{const}$ постоянно. Из (3.1), (3.2) при $\zeta \to \infty$ имеем

$$\varepsilon c_x \to pR^\nu = 2(2+\nu)^{-2} x^{(2+\nu)\beta\varepsilon} R_*^{2+\nu}$$

Согласно (3.4) при $\zeta \to \infty$

$$R_* \to \left(-\frac{2\nu}{\beta(2+\nu)^2}\right)^{\lambda/(2+\nu)} x^{-\varepsilon\beta}, \qquad \lambda = \frac{2(2+\nu)^{-1}+\beta}{2\nu(2+\nu)^{-2}+\beta} \tag{3.7}$$

$$\varepsilon c_x \to \frac{2}{(2+\nu)^2}\left(-\frac{2\nu}{\beta(2+\nu)^2}\right)^{\lambda} \tag{3.8}$$

(если $\lambda = \infty$, т. е. $\beta = -2\nu(2+\nu)^{-2}$, то $\varepsilon c_x \to 2(2+\nu)^{-2}\exp(2/\nu)$).

Естественно, что при $\beta \to \infty$ полученное выражение для $c_x$ должно переходить в соотношение (2.10), в котором $n = 2/(2+\nu) + \beta\varepsilon$ и $\beta\varepsilon \to 0$. Иначе говоря, при $\beta \to \infty$ сопротивление полубесконечного тела, подчиняясь соотношению (2.10), может быть вычислено по теории Ньютона — Буземана. Действительно, полагая, что в (3.8) $\beta \to \infty$, а в (2.10) $n - 2(2+\nu)^{-1} = \beta\varepsilon \to 0$, получаем в обоих случаях соотношение

$$\varepsilon c_x = -4\nu\beta^{-1}(2+\nu)^{-4} \tag{3.9}$$

Интересно отметить и особые свойства решения при $\beta = -2/(2+\nu)$, когда для всех значений $\zeta$ (или $x$) из (3.4) имеем

$$R = x^{2/(2+\nu)} \tag{3.10}$$

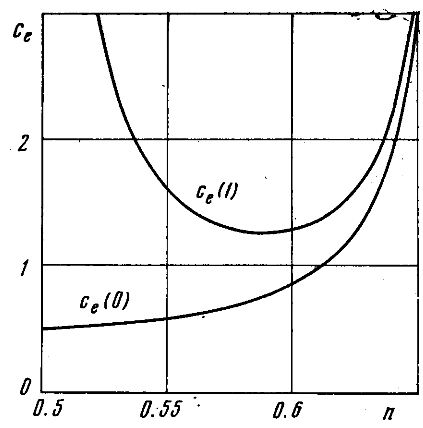
Последний результат соответствует решению с учетом энтропийного эффекта, полученному в работе [3] при $\varepsilon = O(1)$ и $x \to \infty$. Соотношение (3.10) означает, что это решение [3] при $\varepsilon \to 0$ становится справедливым для всех значений $x$, а не только для $x \to \infty$.

4. Согласно изложенному для достаточно тонких тел классическая схема течения Ньютона — Буземана со свободным [1] или присоединенным ударным слоем может оказаться неприменимой, если малый параметр $\varepsilon = \varkappa - 1$ не равен строго нулю. В этом случае на теле образуется оторвавшийся ударный слой, но давлением между этим слоем и телом пренебрегать нельзя. Решение для формы указанного слоя может быть асимптотически сопряжено с решением для свободного или присоединенного слоя. При этом сопряжение с решением для присоединенного ударного слоя уже в главном приближении позволяет асимптотически срастить и величину давления на теле.

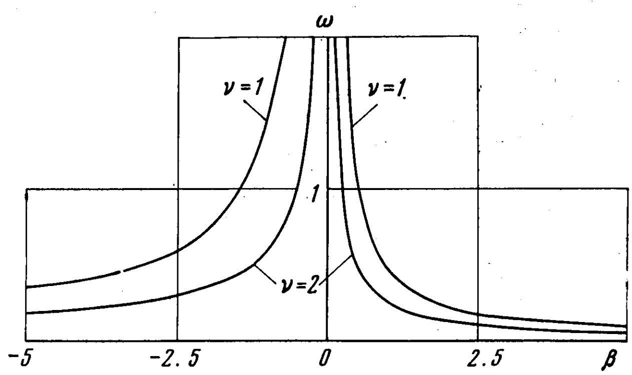
Рассмотрение обтекания степенных тел при $M_\infty = \infty$ и $\varepsilon \to 0$ показало, что полное сопротивление таких тел может вычисляться по классической формуле Ньютона — Буземена (с учетом образования свободного слоя, если таковой существует) при значениях $n$, отличающихся от $2/(2+\nu)$ на конечную величину.

В случае $n = 2/(2+\nu) + \beta\varepsilon$, $\beta \leqslant O(1)$ необходимо учитывать вклад в полное сопротивление давления за оторвавшимся ударным слоем.

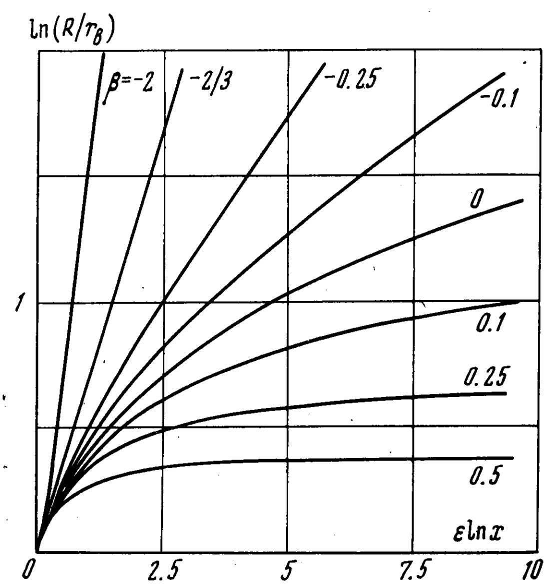
При $n < 2/(2+\nu)$ и достаточно большом удалении от носика тела решение аналогично сильному взрыву. Однако с энергией взрыва (на еди-




Фиг. 1




Фиг. 2




Фиг. 3

ницу площади или длины) необходимо при $n < 2/(2+\nu) + \beta\varepsilon$ отождествлять не полное сопротивление тела, а некоторое эффективное сопротивление.

Коэффициент эффективного сопротивления $c_e$ больше коэффициента сопротивления $c_x$ и может превышать последний даже по порядку величины, если $n \leqslant 1/(1+\nu)$, $\varepsilon \to 0$.

Полученные результаты иллюстрируются фиг. 1—3.

На фиг. 1 представлен эффективный коэффициент сопротивления плоского ($\nu = 1$) тела в диапазоне $2/(2+\nu) > n > 1/(1+\nu)$ для $g = 0$ и 1 ($c_e(0)$, $c_e(1)$). Значение $g$ можно трактовать как отличие модуля скорости от единицы на нулевой струйке тока ($\psi = 0$). При $g = 0$ коэффициент эффективного сопротивления $c_e$ равен $c_x$. Разница $c_e(1) - c_e(0)$ показывает максимально возможное отклонение величины эффективного сопротивления от сопротивления тела.

На фиг. 2 представлено относительное отличие сопротивления тела $c_x$ от сопротивления, подсчитанного по формуле Ньютона — Буземана $c_{xN}$, для полубесконечных тел $r_b = x^{2/(2+\nu)+\beta\varepsilon}$.

При расчете использованы соотношения, следующие из (3.5), (3.8) и (3.9)

$$\omega = c_x / c_{xN} - 1 = R_*^2(\infty) - 1 = [1 + 2\nu\beta^{-1}(2+\nu)^{-2}]^{2/\nu} - 1 \qquad (\beta > 0)$$

$$\omega = c_x / c_{xN} - 1 = [-2\nu\beta^{-1}(2+\nu)^{-2}]^{\lambda-1} - 1 \qquad (\beta < 0)$$

На фиг. 3 нанесены при $\nu = 1$ зависимости $\ln(R/r_b)$ от $\zeta = \varepsilon \ln x$ для различных значений $\beta$ (3.4), иллюстрирующие переход от схемы течения, когда $R/r_b \to \to \mathrm{const}$ при $\zeta \to \infty$ ($\beta > 0$), к схеме, когда справедлива аналогия с сильным взрывом при $\zeta \to \infty$ ($\beta < 0$, $\ln R_* \to -\beta\zeta$ при $\zeta \to \infty$).

Поступила 8 XII 1971

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Михайлов В. В.* Обтекание тонких затупленных тел с оторвавшимся ударным слоем. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 2.
2. *Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф.* Теория гиперзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
3. *Сычев В. В.* О методе малых возмущений в задачах обтекания тонких затупленных тел гиперзвуковым потоком газа. ПМТФ, 1962, № 6.