УДК 532.58

ОБТЕКАНИЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА НЕКОТОРЫМИ ВИХРЕВЫМИ ПОТОКАМИ С НЕПОСТОЯННОЙ ЗАВИХРЕННОСТЬЮ

Д. С. ЦЕЛЬНИК

(Москва)

Рассматривается установившееся обтекание кругового цилиндра несжимаемым, невязким вихревым потоком с распределением скоростей на бесконечности по гиперболическому косинусу, синусу или экспоненте.

Получены формулы для функции тока, распределения скоростей на контуре, а также выражение для действующей на цилиндр силы; последнее является обобщением для случая данного конкретного профиля и рассматриваемого распределения скоростей на бесконечности — формулы Кутта — Жуковского.

Случай профиля с линейным распределением скоростей на бесконечности разобран в работе Цзяня [1], формулы для сил, действующих на цилиндр и нестационарном потоке с постоянной завихренностью имеются в статье Ю. Л. Якимова [2].

1. Пусть плоский вихревой поток невязкой, несжимаемой жидкости плотности ρ натекает на круговой цилиндр радиуса R. При распределении скоростей на бесконечности

$$u = Ce^{ky} + De^{-ky} = (C+D)\operatorname{ch}(ky) + (C-D)\operatorname{sh}(ky)$$

$$v \equiv 0 \tag{1.1}$$

(x, y — декартовы координаты с началом на оси цилиндра, u, v — составляющие скорости по этим осям), функция тока может быть выбором константы взята такой, чтобы она удовлетворяла уравнению [3]

$$\nabla^2\psi - k^2\psi = 0 \quad (k > 0) \tag{1.2}$$

Давление на бесконечности постоянно.

Для потока с распределением скоростей (1.1) во всей плоскости функция тока имеет вид

$$\psi_1(y) = (C/k)e^{ky} - (D/k)e^{-ky} \tag{1.3}$$

Переходя к полярным координатам r, θ и раскладывая (1.3) по функциям Бесселя [4], получим

$$\psi_1 = (C-D)k^{-1}I_0(kr) + 2(C-D)k^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_{2n}(kr)\cos(2n\theta) +$$

$$+ 2(C+D)k^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{2n+1}(kr)\sin(2n+1)\theta$$

Примем вне цилиндра

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \tag{1.4}$$

$$\psi_2 = g_0K_0(kr) + \sum_{\nu=1}^{\infty}K_\nu(kr)\{g_\nu\cos(\nu\theta) + h_\nu\sin(\nu\theta)\} \tag{1.5}$$

Вообще говоря, в выражении ψ_2 кроме слагаемых с функциями Макдональда K_ν могут быть еще слагаемые вида

$$I_\nu(kr)\{\alpha_\nu\cos(\nu\theta)+\beta_\nu\sin(\nu\theta)\}\qquad(\nu=0,1,2,\ldots)$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае слагаемые с I_ν будут отсутствовать, т. е. $\alpha_\nu=\beta_\nu=0$.

Окончательно получаем

$$\psi=[G_0I_0(kr)+g_0K_0(kr)]+\sum_{n=1}^{\infty}[G_{2n}I_{2n}(kr)+g_{2n}K_{2n}(kr)]\cos(2n\theta)+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}[H_{2n+1}I_{2n+1}(kr)+h_{2n+1}K_{2n+1}(kr)]\sin(2n+1)\theta$$

$$G_0=(C-D)k^{-1},\quad G_{2n}=2(-1)^n(C-D)k^{-1}$$

$$H_{2n+1}=2(-1)^n(C+D)k^{-1}$$

$$g_0=K_0^{-1}(kR)[\mathrm{const}-(C-D)k^{-1}I_0(kR)]$$

$$g_{2n}=2(-1)^{n+1}(C-D)[kK_{2n}(kR))^{-1}I_{2n}(kR)$$

$$h_{2n+1}=2(-1)^{n+1}(C+D)[kK_{2n+1}(kR)]^{-1}I_{2n+1}(kR)$$

При этом скорость v_θ на цилиндре

(1.6)

$$v_\theta(r=R)=(\Gamma/2\pi R)-2(C-D)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[kRK_{2n}(kR)]^{-1}\cos(2n\theta)-$$

$$-2(C+D)\sum_{n=0}(-1)^n[kRK_{2n+1}(kR)]^{-1}\sin(2n+1)\theta$$

Здесь Γ — циркуляция вектора скорости на цилиндре

$$\Gamma=2\pi R\left[\mathrm{const}\,k\frac{K_1(kR)}{K_0(kR)}-\frac{C-D}{kRK_0(kR)}\right]\qquad(1.7)$$

где const — неопределенная в решении вещественная константа (равная значению ψ на цилиндре), заданием которой фиксируется значение циркуляции Γ.

На цилиндр, помещенный в поток (1.1), действует сила

$$X+iY=-i\rho\left\{\frac{\Gamma(C+D)}{kRK_1(kR)}-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(C^2-D^2)}{(kR)^2}\frac{2\pi R}{K_{2n}(kR)}[K_{2n+1}^{-1}(kR)+K_{2n-1}^{-1}(kR)]\right\}$$

При обтекании без подъемной силы циркуляция вектора скорости на цилиндре Γ равна

$$\Gamma(Y=0)=\Gamma_*=2\pi R(C-D)\varphi(kR)$$

$$\varphi=\frac{K_1(kR)}{kR}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{K_{2n}(kR)}[K_{2n+1}^{-1}(kR)+K_{2n-1}^{-1}(kR)]$$

Окончательно

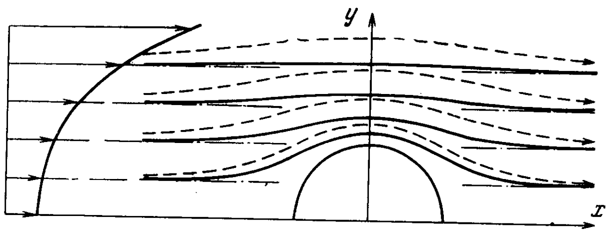
$$X + iY = -i\rho(C + D)(\Gamma - \Gamma_*)[kRK_1(kR)]^{-1} \tag{1.8}$$

сопротивление равно нулю, а подъемная сила прямо пропорциональна плотности жидкости, скорости $(C + D)$ на оси цилиндра набегающего потока, а также разности фактической циркуляции Γ и той циркуляции Γ_*, которая отвечает течению без подъемной силы. Последний сомножитель в формуле (1.8) зависит от безразмерного параметра kR; при kR, увеличивающемся от 0 до ∞, этот сомножитель монотонно растет от 1 до ∞.

Произведение

$$(C + D)[kRK_1(kR)]^{-1}$$

уместно толковать как приведенную скорость.



Фиг. 1

Заметим, что в случае задания на бесконечности эпюры скоростей u, составленной из кусков экспонент (в частности, и участков с равномерным распределением скорости), а также участков с линейным распределением скоростей, уравнения для функции тока остаются линейными, при этом значительная часть трудностей будет состоять в сопряжении решений на границах участков.

2. Обратимся теперь к рассмотрению некоторых частных случаев.

Пусть $k \to 0$, тогда в пределе получаем на бесконечности равномерный поток со скоростью $(C + D)$, направленный по оси x. Считая радиус цилиндра R фиксированным, имеем

$$\Gamma_* \xrightarrow[k\to 0]{} 0, \qquad X + iY \xrightarrow[k\to 0]{} -i\rho(C + D)\Gamma$$

Последнее выражение есть формула Кутта — Жуковского для силы, действующей на цилиндр, обтекаемый равномерным на бесконечности потоком.

Пусть теперь радиус цилиндра $R \to 0$, а распределение скоростей на бесконечности (1.1) фиксировано. Тогда

$$\Gamma_* \xrightarrow[R\to 0]{} 0, \qquad X + iY \xrightarrow[R\to 0]{} -i\rho(C + D)\Gamma$$

В этом случае подъемная сила дается формулой Кутта — Жуковского, в которую, однако, вместо фигурирующей там скорости равномерного на бесконечности потока следует подставить скорость $(C + D)$ на оси цилиндра исчезающе малого радиуса.

При симметричном распределении скоростей на бесконечности (фиг. 1)

$$u(-\infty, y) = (C + D)\operatorname{ch}(ky) = E\operatorname{ch}(ky)$$

имеем

$$X + iY = -i\rho E\Gamma[kRK_1(kR)]^{-1}$$

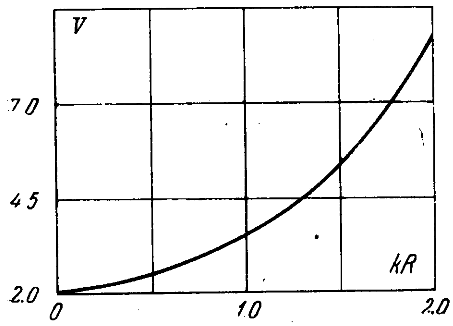
Подъемная сила в этом случае больше той, которая была бы при равномерном на бесконечности потоке со скоростью E, в

$$[kRK_1(kR)]^{-1} \geqslant 1$$

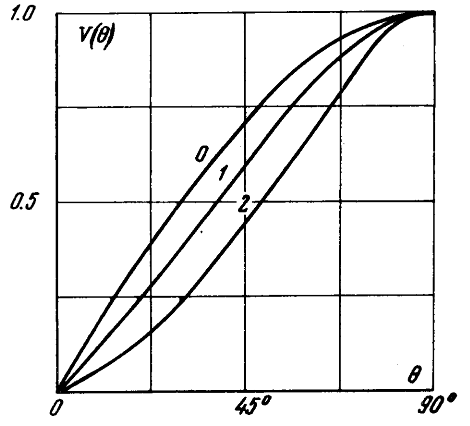
раз.

На фиг. 1 нанесены линии тока обтекания цилиндра (показана половина течения): штриховыми линиями — в случае бесциркуляционного потенциального потока, сплошными — при рассматриваемом здесь симметричном распределении скоростей на бесконечности, $\Gamma = 0$ (и значении параметра $kR = 1$). Штрихпунктирные линии — асимптоты соответствующих линий тока на бесконечности.

На фиг. 2 дано значение отношения V модуля скорости $v(90°)$ в точке $(0, R)$ цилиндра к E в зависимости от kR для представленного на фиг. 1 течения и $\Gamma = 0$; $kR = 0$ соответствует равномерному потоку, в этом случае, как известно, рассматриваемое отношение равно двум.



Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 3 показано распределение скоростей по цилиндру

$$v(\theta) / v(90°) = V(\theta)$$

для равномерного на бесконечности потока ($kR = 0$) и при $kR = 1{,}2$ ($\Gamma = 0$).

Пусть теперь распределение скоростей на бесконечности несимметрично

$$u = E \operatorname{ch} [k(y - y_0)]$$

В этом случае циркуляция при обтекании без подъемной силы равна

$$\Gamma_* = -2\pi RE \operatorname{sh} (ky_0)\varphi(kR)$$

Очевидно, при $E > 0$, $y_0 > 0$ циркуляция $\Gamma_* < 0$. Поэтому при $\Gamma > \Gamma_*$ сила, действующая на цилиндр, будет «заглубляющей», при $\Gamma = \Gamma_*$ — равной нулю и только при $\Gamma < \Gamma_*$ — станет подъемной в буквальном смысле слова.

Для случая $ky_0 = kR = 2$ при обтекании с нулевой подъемной силой было сосчитано положение критических точек на цилиндре, этим точкам соответствуют $\theta \approx -42$, $-138°$. Линия тока, раздваивающаяся на цилиндре, начинается в $(-\infty, a)$, где $a / R \approx -0.85$.

3. Приведем теперь некоторые сведения о течениях, описываемых отдельными слагаемыми в выражении для функции тока ψ (из п. 1).

Функция тока

$$\psi = (\Gamma / 2\pi) K_0(kr) \tag{3.1}$$

соответствует вихрю, помещенному в начале координат.

Скорость на радиусе r есть

$$v_\theta(r) = (\Gamma / 2\pi r) kr K_1(kr)$$

на бесконечности она убывает по закону ($k \neq 0$)

$${}^1/_2 \Gamma \sqrt{k / 2\pi r} \exp(-kr)$$

С ростом r циркуляция падает (от Γ до 0).

Формально к (3.1), описывая течение от точечного вихря, можно прибавить слагаемое вида $AI_0(kr)$. Однако так как соответствующие ему скорости v_θ на бесконечности ($r \to \infty$) растут как $-A\sqrt{k/2\pi r}\exp(kr)$, то такое прибавление физически не оправдано. Это становится очевидным, если рассматривать обтекание вихря потоком (1.1).

При $k \to 0$ (3.1) дает течение от вихря в потенциальном потоке.

Течение, описываемое функцией тока $I_0(kr)$, при $k \to 0$ в пределе вырождается в состояние покоя. При этом в каждой фиксированной точке плоскости r, θ скорость течения v_θ, если k достаточно мало, равна приближенно $-{}^1/_2k^2r$, т. е. скорости квазитвердого вращения жидкости относительно начала координат по часовой стрелке с угловой скоростью ${}^1/_2k^2$.

В выражении для функции тока ψ (см. п. 1) фигурируют кроме K_0, I_0 еще слагаемые вида (с точностью до постоянных коэффициентов)

$$(2/(2n)!)\,({}^1/_2k)^{2n+1}K_{2n+1}(kr)\sin(2n+1)\theta \quad (n \geqslant 0)$$

$$(2/(2n-1)!)\,({}^1/_2k)^{2n}K_{2n}(kr)\cos(2n\theta) \quad (n \geqslant 1)$$

$$(2n+1)!\,(2/k)^{2n+1}I_{2n+1}(kr)\sin(2n+1)\theta \quad (n \geqslant 0)$$

$$(2n)!\,(2/k)^{2n}I_{2n}(kr)\cos(2n\theta) \quad (n \geqslant 1)$$

При $k \to 0$ вихревые течения, описываемые первыми двумя из этих функций тока, переходят в потенциальные, соответствующие комплексным потенциалам

$$w = -1/z^{2n+1}, \qquad w = i/z^{2n}$$

т. е. диполю и особенностям более высоких порядков, помещенным в начале координат.

Течения, описываемые функциями тока с I_{2n+1}, I_{2n}, при $k \to 0$ переходят в потенциальные с потенциалами

$$w = z^{2n+1}, \qquad w = iz^{2n}$$

т. е. в течения внутри углов, образованных полупрямыми $\theta = 0$, $\theta = \pi/(2n+1)$ либо полупрямыми $\theta = \pm\pi/4n$; течение внутри угла с раствором $\pi/(2n+1)$ при $n = 0$ есть, очевидно, просто равномерный поток.

Отметим в заключение физическую аналогию, основанную на том, что (1.2) совпадает с уравнением для прогиба (в линейной постановке) мембраны на упругом основании, реакция которого в каждой точке пропорциональна прогибу и направлена противоположно ему; коэффициент пропорциональности одинаков для всех точек мембраны. Внешняя нагрузка по площади мембраны отсутствует, а прогиб обусловлен смещениями на границах.

Поступила 30 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Tsien H. S. Symmetrical Joukowsky airfoils in shear flow. Quart. Appl. Math., 1943, vol. 1, No. 2.
2. Якимов Ю. Л. Движение цилиндра в произвольном плоском потоке идеальной несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
3. Lautard J.-J., Zeytounian R. Sur certains types d'écoulements stationnaires bidimensionnels rotationnels d'un fluide parfait incompressible. C. r. Acad. Sci., Ser. A., 1970, vol. 271, No. 10. (Рус. перев.: О некоторых типах установившегося двумерного вихревого движения идеальной несжимаемой жидкости. Механика, сб. перев., 1971, № 4.)
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1965.