УДК 532.58

СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА МАЛОЕ ТЕЛО В ПРОИЗВОЛЬНОМ ПОТОКЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ, И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ

Ю. Л. ЯКИМОВ

(Москва)

Хорошо известно решение задачи о движении тела произвольной формы в потенциальном потоке идеальной несжимаемой жидкости, когда жидкость на бесконечности покоится [1]. Это решение обобщено на случай нестационарного поступательного потока в бесконечности [1, 3]. Для случая, когда поток в бесконечности не является поступательным, решены только отдельные задачи [4, 14].

Возникает вопрос, существует ли простая общая связь между силой, действующей на тело и некоторыми локальными свойствами потока, какие геометрические свойства тела (только ли присоединенные массы) содержатся в этой зависимости. Локальные свойства предполагают тело достаточно малых размеров по сравнению с характерным масштабом потока, не связанного с телом. По-видимому, впервые эта постановка была исследована в [5], где приведено общее решение для цилиндра, и в [6], где найдено решение для малой сферы.

В работе [7] получено общее решение для плоской задачи. В [7, 8] приводится предложенная автором данной статьи общая формула для силы, действующей на произвольное малое тело. Эта формула содержит только локальные свойства потока, не связанные с телом, присоединенные массы тела и параметры его движения.

Ниже приводится доказательство этой формулы, основанное на использовании выражения для коэффициентов при главных членах разложения потенциала в бесконечности, которое было получено Л. И. Седовым в 1940 г. [2]. На основе полученных выражений для силы, действующей на тело, рассмотрен ряд примеров, в том числе выведены уравнения движения смеси жидкости с малыми частицами (пузырьками). Эти уравнения отличаются от ранее использованных [9, 10] не только выражением для сил, действующих на среду частиц, но и членами, связанными с обменом импульса жидкой фазы за счет относительного движения малых частиц (пузырьков).

Как известно, сила $\mathbf{F}$, которая действует на произвольное (не обязательно твердое) тело, находящееся в потенциальном потоке идеальной несжимаемой жидкости, может быть представлена в виде [1]

$$\frac{1}{\rho}\mathbf{F} = -\frac{d}{dt}\int\limits_S \varphi\mathbf{n}\, ds + \int\limits_\Sigma \left(\frac{v^2}{2}\mathbf{n} - \mathbf{v}v_n\right) ds \tag{1}$$

где ρ — плотность, S — поверхность тела, Σ — поверхность сферы большого радиуса, охватывающей тело, n — внешняя нормаль по отношению к объему между S и Σ, $\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi$ — скорость жидкости.

Применим теорему о движении центра масс жидкого объема, совпадающего в данный момент с объемом $T - \Omega$ между S и Σ. Сначала запишем количество движения жидкости в виде

$$\int\limits_{T-\Omega} \operatorname{grad}\varphi\, d\tau = \int\limits_S \mathbf{r}v_n\, ds + \int\limits_\Sigma \mathbf{r}v_n\, ds \tag{2}$$

где Ω — объем тела, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор.

Изменение количества движения равно сумме внешних сил, действующих на указанный объем жидкости,— силе $\mathbf{F}$ и силе давления на Σ. Используя для давления интеграл Коши — Лагранжа, получим

$$\frac{d}{dt}\left[\int\limits_S \mathbf{r}v_n\,ds+\int\limits_\Sigma \mathbf{r}v_n\,ds\right]=\frac{d}{dt}\int\limits_S \varphi\mathbf{n}\,ds-$$

$$-\int\limits_\Sigma\left(\frac{v^2}{2}\mathbf{n}-\mathbf{v}v_n\right)ds+\int\limits_\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}\right)\mathbf{n}\,ds \tag{3}$$

В случае, если $\varphi\to 0$ при $r\to\infty$, имеем разложение

$$\varphi=\frac{\mathbf{c}_0(t)}{\mathbf{r}}+\frac{(\mathbf{c}_1(t)\mathbf{r})}{r^3} \tag{4}$$

Подставив это разложение в (3), получим

$$\mathbf{c}_1(t)=\frac{1}{4\pi}\left[\int\limits_S \mathbf{r}v_n\,ds-\int\limits_S\varphi\mathbf{n}\,ds\right] \tag{5}$$

Это выражение для движения недеформируемого тела было получено Л. И. Седовым [1,2]. Предположение об отсутствии деформации тела несущественно. Если начало координат в рассматриваемый момент времени совпадает с центром объема тела, первый интеграл в (5) представляет собой произведение объема тела и его скорости $\mathbf{V}_0$ [1, 2]. Последний интеграл удобно преобразовать, пользуясь формулой Грина

$$\int\limits_S\varphi\mathbf{n}\,ds=\int\limits_S \mathbf{e}_i\varphi_i\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds+\int\limits_\Sigma \mathbf{e}_i\left(\varphi_i\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}\right)ds$$

$$\Delta\varphi_i=0,\qquad \left.\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}\right|_S=n_i,\qquad \varphi_i\to\infty\qquad(r\to\infty) \tag{6}$$

где $\mathbf{e}_i$ — единичные векторы.

Учитывая (4), из (6) и (5) получим

$$\int\limits_S\varphi\mathbf{n}\,ds=\int\limits_S\mathbf{e}_i\varphi_i\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds \tag{7}$$

$$\mathbf{c}_1=\frac{1}{4\pi}\int\limits_S(\mathbf{r}-\mathbf{e}_i\varphi_i)\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds \tag{8}$$

Рассмотрим некоторое потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости с особенностями, находящимися вне поверхности Σ (Σ — сфера с центром в начале координат). Сначала для простоты предположим, что скорость жидкости в начале координат равна нулю. Потенциал этого течения W.

Из (1) имеем

$$\int\limits_\Sigma\left[\frac{(\operatorname{grad}W)^2}{2}\mathbf{n}-\operatorname{grad}W\frac{\partial W}{\partial n}\right]ds=0 \tag{9}$$

Внесем в этот поток тело с поверхностью S так, чтобы центр объема совпадал с началом координат. Поверхность S может перемещаться и деформироваться.

Потенциал Φ этого течения можно представить в виде

$$\Phi=\varphi+W,\qquad \varphi\to 0\quad (r\to\infty),\qquad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_s=V_n,\qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_s=V_n-\frac{\partial W}{\partial n}\tag{10}$$

Внесение подвижного тела может влиять на особенности вне поверхности Σ, которые связаны по определению с потенциалом W. Например, если при отсутствии тела жидкость покоится, но имеется плоская стенка, то после внесения тела потенциал будет образован зеркально расположенными за стенкой особенностями. Подставляя теперь (10) в (7) и (8) и используя (4) для достаточно большой Σ, из (1) получим выражение для силы $\mathbf{F}$, действующей на помещенное тело.

Если в точке, соответствующей центру объема тела, до внесения тела скорость потока $\mathbf{U}_0(t)\neq 0$, то полученное решение следует рассматривать, как решение относительно подвижной системы координат, движущейся поступательно со скоростью $\mathbf{U}_0(t)$. Переход к абсолютной системе координат в этом случае сопровождается добавлением силы типа силы Архимеда [1] и изменением граничного условия (10)

$$\frac{1}{\rho}\mathbf{F}=\Omega\frac{d\mathbf{U}_0}{dt},\qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_s=V_n-U_{0n}-\frac{\partial W}{\partial n}\tag{11}$$

В результате получим следующее выражение для силы:

$$\frac{1}{\rho}\mathbf{F}=-\frac{d}{dt}\int_s \mathbf{e}_i\varphi_i\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds-\frac{d}{dt}\int_s W\mathbf{n}\,ds-\Omega\frac{d\mathbf{U}_0}{dt}+\tag{12}$$

$$+\int_\Sigma\left[(\operatorname{grad}\varphi\operatorname{grad}W)\mathbf{n}-\operatorname{grad}\varphi\frac{\partial W}{\partial n}-\frac{\partial\varphi}{\partial n}\operatorname{grad}W\right]ds$$

Все величины (12), зависящие от φ, выражаются при помощи (4) и (8) только через граничное условие (11).

Рассмотрим теперь случай, когда внесенное в поток тело достаточно мало.

Представим потенциал W относительно подвижной системы координат в виде

$$W=\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial x_j}x_ix_j+O(r^3)$$

$O(r^k)$ означает порядок r^k.

Устремляя теперь характерный размер тела d и радиус сферы B к нулю, так чтобы $B/d\to\infty$, получим

$$W=\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial x_j}x_ix_j,\qquad \int_s W\mathbf{n}\,ds=\int_s\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial x_j}x_ix_j\mathbf{n}\,ds\tag{13}$$

Подставив (13) и (5) в последний интеграл (12), имеем

$$\frac{1}{\rho}\mathbf{F}=-\frac{d}{dt}\int_s\mathbf{e}_i\varphi_i\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds+\Omega\frac{d\mathbf{U}_0}{dt}-4\pi\mathbf{e}_ic_j\frac{\partial^2W}{\partial x_i\,\partial x_j}\tag{14}$$

Используя (5) и (7), из (14) получим

$$\frac{1}{\rho}\mathbf{F}=-\frac{d}{dt}\int_s\mathbf{e}_i\varphi_i\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds+\Omega\frac{d\mathbf{U}_0}{dt}-$$

$$-\Omega(V_{0j}-U_{0j})\mathbf{e}_i\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial x_j}-\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial x_j}\int\limits_S \mathbf{e}_i\varphi_j\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds \tag{15}$$

Кроме того, имеют место следующие соотношения:

$$\Omega\frac{d\mathbf{U}_0}{dt}-\Omega(V_{0j}-U_{0j})\mathbf{e}_i\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial x_j}=\Omega\left[\frac{\partial\mathbf{U}_0}{\partial t}+V_{0j}\mathbf{e}_i\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial x_j}-\right.$$

$$\left.-(V_{0j}-U_{0j})\mathbf{e}_i\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial x_j}\right]=\Omega\left[\frac{\partial\mathbf{U}_0}{\partial t}+U_{0j}\mathbf{e}_i\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial x_j}\right]=-\Omega\,\mathrm{grad}\,p_0|_{x_i=0} \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial x_j}\int\limits_S \mathbf{e}_i\varphi_j\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds=(\mathbf{Q}\nabla)\mathbf{U}_0$$

$$\mathbf{Q}=\int\limits_S \mathbf{e}_i\varphi_i\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds \tag{17}$$

где $p_0(x_i, t)$ — давление в потоке W до внесения тела, $\mathbf{V}_0$ — скорость центра объема тела.

Окончательно выражение для силы, действующей на тело, согласно (15) — (17) примет вид

$$\frac{1}{\rho}\mathbf{F}=-\frac{d\mathbf{Q}}{dt}-\Omega\,\mathrm{grad}\,p_0-(\mathbf{Q}\nabla)\mathbf{U}_0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=(\mathbf{V}_0-\mathbf{U}_0)\mathbf{n}+(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\omega})\mathbf{n}+\varepsilon_n-\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial x_j}x_i n_j \tag{19}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела, ε_n — проекции на нормаль скоростей деформации поверхности S.

Сравним порядок малости последнего члена (19) с остальными. Очевидно, что этот член необходимо учитывать, если он имеет порядок не ниже порядка главного члена (19).

В том числе $\omega\leqslant\partial^2 W/\partial x_i\partial x_j$ и, учитывая, что $\varphi_i=O(d)$, получим

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial t}+[\omega\times\mathbf{Q}]\simeq\int\limits_S \mathbf{e}_i\varphi_i\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial x_j}x_i n_j\,ds=O\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial x_j}d^4\right) \tag{20}$$

Однако в этом случае все члены много меньше $\Omega\,\mathrm{grad}\,p_0=O(d^3)$. Таким образом, при ограниченных производных $\partial^2 W/\partial x_i\partial x_j$ и малом размере тела во всех случаях последний член (19) мал и выражение (19) для $\mathbf{Q}$ не отличается от случая движения в безграничной жидкости, покоящейся при $r\to\infty$. Эта оценка не проходит при

$$\Omega=0,\quad S=O(d^2),\ \mathbf{V}-\mathbf{U}_0=O(d),\quad \omega\leqslant\partial^2 W/\partial x_i\partial x_j$$

т. е. когда несимметричное тело, имеющее поверхность, но не имеющее объема (тонкая пленка), плывет по течению. В этом особом случае последние члены в (20) должны быть сохранены и они дадут в выражении $\mathbf{Q}$ члены вида

$$\mathbf{e}_j\partial^2 W/\partial x_i\,\partial x_j\int\limits_S x_j\,d\lambda_{ij}, \tag{21}$$

где λ_{ij}, λ_{ij+3} — присоединенные массы.

Для малого тела фиксированной формы имеем

$$\mathbf{Q} = \mathbf{e}_i[\lambda_{ij}(V_{0j} - U_{0j}) + \lambda_{ij+3}\omega_j] \tag{22}$$

Для плоской задачи те же рассуждения приводят также к формуле (19). Изменится только (4), остальные выражения, в том числе (5), (7), (18) останутся даже с теми же коэффициентами.

Формулы (18), (22), как было указано выше, были проверены для контура малых размеров в [7], где получено общее решение плоской задачи методом комплексного переменного.

Укажем несколько задач, при решении которых могут быть полезны полученные формулы.

1. Для сферического тела массой M имеем следующее уравнение движения[1].

$$\frac{M}{\rho}\frac{d\mathbf{V}_0}{dt} = -\frac{2}{3}\pi \mathbf{r}_0^3 \frac{d(\mathbf{V}_0 - \mathbf{U}_0)}{dt} - \frac{4}{3}\pi r_0^3 \operatorname{grad} p_0 - \frac{2}{3}\pi r_0^3 [(\mathbf{V}_0 - \mathbf{U}_0)\nabla]\mathbf{U}_0 \tag{23}$$

Можно сразу указать некоторый класс точных решений (23) для установившихся потоков

$$\mathbf{V}_0 = \pm\sqrt{\frac{3\Omega\rho}{\rho\Omega + 2M}}\,\mathbf{U}_0 \tag{24}$$

Выражение (24) показывает, что сферическое тело может двигаться вверх или вниз по потоку вдоль линии тока, но со скоростью, отличающейся от скорости потока. Если масса сферы равна массе вытесненной воды, одно из решений соответствует равенству скоростей тела и потока.

Решение, соответствующее положительному значению коэффициента, по-видимому, представляет наибольший интерес, так как оно соответствует меньшей разности скоростей и, следовательно, меньшей диссипации энергии, если иметь в виду реальную жидкость.

Решения, аналогичные (24), можно указать и для сфер переменного радиуса, но, к сожалению, только для специальных зависимостей радиуса от давления в потоке.

2. Для тела конечных размеров с тремя плоскостями симметрии, находящегося в потоке с потенциалом, который имеет диполи первого и второго порядка на бесконечности, формулы (18), (21) являются точными, так как отброшенные малые члены тождественно равны нулю.

3. Задачи о движении нескольких малых тел произвольной формы (в том числе деформируемых), причем начальный поток от удаленных тел может быть задан при помощи (4), (5), (8).

4. Движение тела около плоского экрана или свободной поверхности. Постановка задачи может быть аналогична 3.

5. Движение тела изменяемой формы в периодическом потоке (например, под взволнованной поверхностью). В связи с тем, что интеграл за период от второго члена (18) может быть сделан не равным нулю за счет

---

[1] Выражение для силы, соответствующее (22), полученное в работе [6], содержит арифметические ошибки в коэффициентах, на что было указано автору А. Г. Петровым и О. В. Воиновым. Ими же ранее была получена общая формула, аналогичная (18), (22) в виде:

$$F_i = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial q_i}, \qquad L = T(\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{u}_0) - \Omega p_0$$

где $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}_0$, q_i — декартовы координаты центра объема тела, T — кинетическая энергия относительного движения жидкости.

выбора Ω, существуют режимы с разгоном тела. Аналогичное обстоятельство имеет место при движении пузырьков воздуха вниз в вертикально вибрирующем сосуде с жидкостью [11].

6. Полученные выражения используем для вывода уравнений движения смеси жидкости и пузырьков воздуха или других малых частиц. Дополним (18) силой сопротивления в реальной жидкости $\mathbf{R}$

$$\frac{M}{\rho}\frac{d\mathbf{V}}{dt}=-\frac{d\mathbf{Q}}{dt}-\Omega\,\mathrm{grad}\,p-(\mathbf{Q}\nabla)\mathbf{U}+\mathbf{R} \tag{25}$$

Не обсуждая здесь возможное обоснование (25), заметим только, что в предельных случаях, когда сила сопротивления или мала, или является главной, и выражение (25) является точным.

Рассмотрим взаимодействие между соседними объемами смеси, связанное с актом перехода одного пузырька или частицы через границу.

Пусть S — поверхность частицы смеси размером D, состоящей из жидкости объемом Ω_g и частиц объемами Ω_k и поверхностями S_k, r^* и r_k^* — центры объемов жидкости и частиц. Тогда имеем

$$\frac{d\Omega_g\mathbf{r}^*}{dt}=\int\limits_{S+S_k}\mathbf{r}U_n\,ds=\int\limits_S\mathbf{r}U_n\,ds-\sum_k\frac{d\Omega_k\mathbf{r}_k^*}{dt} \tag{26}$$

Для моментов времени до и после перехода, когда малая частица ($\Omega_k\ll\Omega$) далека от поверхности S, т. е. Δx_1, $\Delta x_2\ll D$, имеем $U_n=(\mathbf{Un})$, где Δx_1, Δx_2 — расстояния частицы до границы S до и после перехода, $\mathbf{U}$ — скорость жидкости. В случае $\Sigma\Omega_k\ll\Omega\mathbf{U}$ мало отличается от среднемассовой скорости жидкости. После перехода правая часть (26) изменится на величину

$$\Delta\frac{d\Omega_g\mathbf{r}^*}{dt}=\int\limits_S\Delta\mathbf{r}U_n\,ds+\int\limits_S\mathbf{r}\Delta U_n\,ds+\frac{d\Omega_{k1}\mathbf{r}_{k1}^*}{dt} \tag{27}$$

где $k1$ — номер частицы, пересекшей границу S.

Определим правую часть (27) сначала для случая потенциального движения ($\mathbf{R}=0$). Главными членами разложения потенциала, связанного с движением пузырька Ω_{k1} являются

$$\varphi=\frac{\mathbf{c}_0}{r}-\frac{(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{r})}{r^3}\qquad\left(r=\sqrt{(x-x_{k1}^*)^2+(y-y_{k1}^*)^2+(z-z_{k1}^*)^2}\right)$$

Представим $S=S_1+S_2$, где S_1, S_2 — части поверхности S, расположенные далеко и вблизи от точки перехода соответственно, причем S_2 можно считать плоской

$$\int\limits_S\mathbf{r}\Delta U_n\,ds=\int\limits_{S_1}\mathbf{r}\Delta U_n\,ds+\int\limits_{S_2}\mathbf{r}\Delta U_n\,ds \tag{28}$$

На S_1 имеем

$$\Delta U_n\sim\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right)(\Delta x_1+\Delta x_2)\sim\frac{\Delta x}{r^3}c_0$$
$$\int\limits_{S_1}\mathbf{r}\Delta U_n\,ds\sim\Delta x c_0 \tag{29}$$

На S_2 имеем от первого члена разложения

$$\int\limits_{S_2} \mathbf{r}\Delta U_n\, ds = -c_0 \int\limits_{S_2} \left(\mathbf{r}_1 \frac{\Delta x_1}{r_1^3} + \mathbf{r}_2 \frac{\Delta x_2}{r_2^3} \right) ds =$$

$$= 4\pi c_0 \int\limits_0^\infty \frac{\mathbf{r} y\, ds}{(y^2+1)^{3/2}} = 4\pi \mathbf{r}_0^* c_0 + O(\Delta x)\mathbf{c}_0 = -\mathbf{r}_0^* \frac{d\Omega_k}{dt} + O(\Delta x)\mathbf{c}_0 \quad (30)$$

$$y = \Delta x_i \operatorname{tg} \arccos \Delta x_i / r_i$$

где r_0^* — точка пересечения частицей поверхности S. Кроме того, имеет место

$$\int\limits_S \Delta \mathbf{r} U_n\, ds = -\Omega_k \mathbf{U} \quad (31)$$

Подставив (30) и (31) в (27), получим

$$\Delta \frac{d\Omega_g \mathbf{r}^*}{dt} = -\Omega_k \mathbf{U} - \mathbf{r}_0^* \frac{d\Omega_k}{dt} + \frac{d\Omega_k \mathbf{r}_k^*}{dt} = \Omega_k (\mathbf{V}_k - \mathbf{U}) \quad (32)$$

В реальной жидкости за частицей (пузырьком), пересекающей границу, образуется след, который частично состоит из жидкости, находившейся ранее в объеме Ω. По мере удаления частицы от S след вытягивается, а скорость каждой точки, которая ранее находилась внутри S, стремится к скорости окружающей жидкости U (полагаем, что $\Delta x \operatorname{grad} U \ll \mathbf{U}$).

Таким образом, наличие следа не повлияло на среднюю скорость жидкости в жидком объеме Ω. Если кроме следа имеют место застойные зоны, движущиеся вместе с частицами (пузырьками), то их объем можно добавить к объему Ω_k и получить выражение, аналогичное (32).

Из (32), вводя среднюю скорость V по объемам Ω_k, получим следующий поток импульса через S, связанный только с переходом малых частиц через S

$$\int\limits_S \rho \frac{\Sigma\Omega_k}{\Omega_g} (\mathbf{V}-\mathbf{U})(\mathbf{V}-\mathbf{U})_n\, ds = \rho\Omega\boldsymbol{\sigma} \quad (33)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (1-\eta)(\mathbf{V}-\mathbf{U}) \operatorname{div}(\mathbf{V}-\mathbf{U}) + [(\mathbf{V}-\mathbf{U})\nabla](1-\eta)(\mathbf{V}-\mathbf{U})$$
$$\Omega_g/\Omega = \eta, \qquad \Sigma\Omega_k/\Omega = 1-\eta$$

Собирая теперь все силы, действующие на Ω_g со стороны поверхности S и S_k, получим

$$\eta \frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \mathbf{p} + \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{\rho\Omega} \sum M_k \frac{d\mathbf{V}_k}{dt} \quad (34)$$

где p — давление в жидкой фазе достаточно далеко от частиц (пузырьков). Последний член представляет собой сумму сил, действующих на частицы (25) на единицу объема смеси.

Соотношения (25), (33), (34), уравнения сохранения массы для каждой из фаз и закон деформации частиц (если частицы не твердые) дают полную систему уравнений, описывающих движение смесей. В этих соотношениях могут быть учтены массовые силы, фазовые переходы, наличие застойных зон и т. д. Выражения (33) и (34) справедливы и для непотенциальных потоков, так как интеграл (30) равен расходу жидкости через две параллельные плоскости, связанному с изменением объема частицы, находящейся между ними на расстояниях Δx_1 и Δx_2 соответственно.

Напряжения σ, связанные с пересечением частицами поверхности, не могут быть учтены введением среднего давления на поверхности S, так как σ не ортогонален этой поверхности. При большой концентрации частиц или пузырьков вместо p в (34) можно ввести среднее давление и скорость для жидкой фазы, повторив аналогичные рассуждения, однако выражение (25) должно быть заменено.

Рассмотрим некоторые предельные случаи для системы уравнений, описывающих движение смеси жидкости с пузырьками.

а) Пузырьки испытывают вязкое сопротивление $\mathbf{R} = -\varkappa(\mathbf{V} - \mathbf{U})$, причем коэффициент $\varkappa$ очень велик, тогда из (25) имеем

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}, \quad \sigma \simeq 0, \quad \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d\mathbf{U}}{dt}, \quad \frac{1}{\rho\Omega}\sum M_k \frac{d\mathbf{V}_k}{dt} \ll \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p$$

При этом из (34) получим

$$\rho_1 \frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\operatorname{grad} p \tag{35}$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_1 \mathbf{U} = 0 \tag{36}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{p}{T}\left(\frac{\rho}{\rho_1} - 1\right) = 0 \tag{37}$$

где $\rho_1 = \rho\eta$, (36) — уравнение сохранения масс для жидкой фазы, (37) — уравнение состояния для температуры T (обычно принимается $T = \text{const}$). Система (35) — (37) хорошо известна и изучалась многими авторами [12].

б) Сила сопротивления существенна, $\mathbf{V} - \mathbf{U} \neq 0$, однако $\mathbf{V} - \mathbf{U} \ll \mathbf{U}$, тогда из (23), (25) получаем

$$(\mathbf{V} - \mathbf{U}) = -\frac{4}{3}\frac{\pi r_0^3}{\varkappa}\operatorname{grad} p = a \operatorname{grad} p \tag{38}$$

Уравнения (33) и (34) примут вид (инерцией газа пренебрегаем)

$$\eta \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + (1-\eta)a^2 \operatorname{grad} p\Delta p + a^2(\operatorname{grad} p\nabla)(1-\eta)\operatorname{grad} p \tag{39}$$

Уравнения сохранения массы жидкости и газа в объеме

$$\frac{\partial \rho\eta}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\eta\mathbf{U} = 0, \qquad \frac{\partial \rho_\gamma(1-\eta)}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_\gamma(1-\eta)\mathbf{V} = 0 \tag{40}$$

Уравнение состояния для газовой фазы

$$\rho_\gamma = \rho_\gamma(p, T) \tag{41}$$

где относительно T должны быть поставлены дополнительные условия, например $T = T_0 = \text{const}$.

Среднее давление в пузыре отличается от давления в жидкости далеко от пузыря за счет инерции расширения [14], вязких напряжений при изменении объема поверхностного натяжения, относительного движения [15]. Эти обстоятельства могут быть также учтены в уравнении состояния (41).

в) Силы вязкого сопротивления отсутствуют, тогда система уравнений состоит из (23), (33), (34), (40) – (43). Эта система служит для определения **V**, **U**, σ, p, η, ρ_γ, T. Следует заметить, что различия между размерами пузырьков несущественны, так как уравнение (23) допускает сокращение на r_0^3, и закон движения пузырьков, следовательно, не зависит от их размеров.

Системы уравнений в случаях б) и в) отличаются от известных в литературе [9, 10] наличием члена σ в уравнении импульсов и наличием последнего слагаемого в (18).

Автор признателен Л. И. Седову, указавшему на принципиальную возможность вывода формулы для силы с помощью (5) и постоянное внимание к работе.

Поступила 26 II 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошных сред, т. 2. М., «Наука», 1970.
2. Седов Л. И. О неустановившемся движении внутри жидкости тел вращения. Тр. ЦАГИ, 1940, вып. 515.
3. Хаскинд М. Д. Неустановившееся движение твердого тела в ускоренном потоке безграничной жидкости. ПММ, 1955, т. 20, вып. 1.
4. Жуковский Н. Е. Обобщение задачи Бьеркенеса о гидродинамических силах, действующих на пульсирующие и осциллирующие тела внутри жидкой массы. Собр. соч., т. 2, М.— Л., Гостехтеоретиздат, 1949.
5. Якимов Ю. Л. Движение цилиндра в произвольном потоке идеальной несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
6. Якимов Ю. Л. Силы, действующие на малую сферу в произвольном потенциальном потоке идеальной несжимаемой жидкости. Научн. тр. Научн.-исслед. ин-та механ. МГУ, 1971, № 9.
7. Бармина Л. А. Сила, действующая на деформируемый контур, движущийся в произвольном потоке жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 1.
8. Бондаренко Л. А., Якимов Ю. Л. Сила, действующая со стороны потока жидкости на тонкое изогнутое тело кругового поперечного сечения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 1.
9. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течения двускоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
10. Нигматулин Р. И. Мелкомасштабные течения и поверхностные эффекты в гидромеханике многофазных сред. ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.
11. Григорян С. С., Якимов Ю. Л., Апштейн Э. З. Поведение пузырьков воздуха в жидкости при вибрациях. Сборник трудов Симпозиума по механике в Юрате (Польша), 1965.
12. Ackeret J. Experimentelle und teoretische Untersuchungen über Hohlraumbildung (Kavitation) im Wasser. Forschund auf dem Gebiete Ingenieurwesen, 1930, Bd. 1.
13. Когарко Б. С. Об одной модели кавитирующей жидкости. Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 6.
14. Гуревич М. И. Аэродинамическое воздействие поезда на малое тело. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.
15. Иорданский С. В. Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа. ПМТФ, 1960, № 3.