УДК 532.546

О ПЛАНОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ НЕСОВЕРШЕННЫХ ВОДОЕМОВ

В. Е. ШАМАНСКИЙ

(Киев)

В работе получены точные и приближенные уравнения, описывающие фильтрационный поток в плановой области на участках, соответствующих несовершенным водоемам и промежуткам высачивания. Эти уравнения позволяют получить приближенное решение трехмерной задачи фильтрации грунтовых вод путем решения двумерной задачи, причем в области фильтрации допускаются и несовершенные водоемы.

1. Постановка задачи. Будем рассматривать подчиняющуюся закону Дарси неустановившуюся фильтрацию в изотропной среде. Внутри трехмерной области фильтрации описывается уравнение [1]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial h}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial h}{\partial z}\right)=0 \tag{1.1}$$

$$h=h(t,\,x,\,y,\,z),\qquad K=K(x,\,y,\,z)$$

Здесь h — пьезометрический напор, K — коэффициент фильтрации. Предположим, что коэффициент K можно представить в виде

$$K=k(x,y)g(z)\quad(0<g(z)\leqslant 1)$$

что выполняется, например, для слоистой среды, когда $k(x,\,y)\equiv k=\mathrm{const}$, либо для однородной по вертикали среды, когда $g(z)\equiv 1$. В случае же, когда точное представление коэффициента K в виде произведения двух функций, из которых одна зависит только от z, а другая — только от x и y, невозможно, будем пользоваться приближенным представлением, определив

$$K(x,y)=\int\limits_0^l K(x,y,z)\,dz \Bigg/ \int\limits_0^l g(z)\,dz$$

где l — мощность водоносного пласта. Функция $g(z)$ при этом выбирается так, чтобы она отражала характер изменения коэффициента фильтрации по вертикали во всей области фильтрации и удовлетворяла неравенству $0<g(z)\leqslant 1$. Удачный выбор функции $g(z)$ позволяет уменьшить величину погрешности $|K(x,\,y,\,z)-k(x,\,y)g(z)|$.

Рассмотрим сначала безнапорную фильтрацию. Из (1.1), пренебрегая упругостью пласта и учитывая принятое выше предположение о коэффициенте фильтрации, можно получить двумерное уравнение

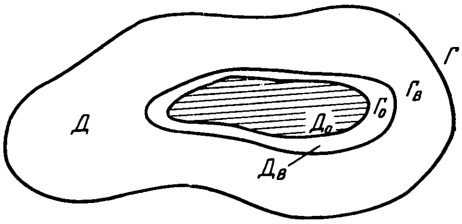
$$m\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)+w \tag{1.2}$$

$$z=H(t,\,x,\,y),\qquad w=w(t,\,x,\,y)$$

Здесь z — уравнение свободной поверхности, w — коэффициент инфильтрации

$$\Phi(t, x, y) = \int\limits_0^H g(z)\,[h(t, x, y, z) - z]\,dz \tag{1.3}$$

$\Phi(t, x, y)$ — потенциал Гиринского. При выводе уравнения (1.2) предполагается, что водоносный пласт ограничен снизу горизонтальной водонепроницаемой плоскостью $z = 0$. Если имеет место представление $K = k(x, y)\, g(z)$, то уравнение (1.2) получается из (1.1) путем точных математических преобразований (см. [2]). Однако уравнение (1.2) в отличие от (1.1) не является полным, поскольку в него входят две неизвестные функции $-H$ и Φ. Исключение составляет случай стационарной фильтрации, когда в (1.2) остается только функция Φ. Если вертикальная компонента скорости фильтрации мала по сравнению с горизонтальными ее компонентами, то лишнюю неизвестную в (1.2) исключают, заменяя (1.3) приближенным выражением



Фиг. 1

$$\Phi(t, x, y) = \int\limits_0^H g(z)\,[H(t, x, y) - z]\,dz \tag{1.4}$$

С помощью (1.4) уравнение (1.2) можно привести к виду (см. [2], стр. 77)

$$m\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nu\Phi\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + w\right] \tag{1.5}$$

$$\left(\nu(\Phi) = \int\limits_0^H g(z)\,dz, \qquad m = m(t, x, y)\right)$$

где m — коэффициент водоотдачи.

Для напорной фильтрации из (1.1) без учета упругости водоносного пласта и при том же предположении относительно коэффициента фильтрации, что и в (1.2), получается следующее точное двумерное уравнение [2]:

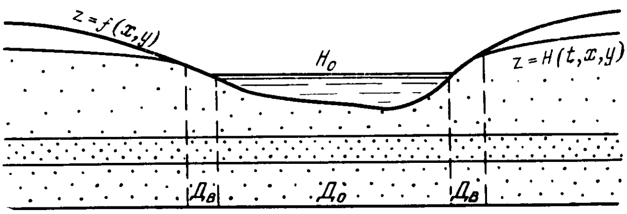
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + w = 0 \tag{1.6}$$

относительно потенциала (1.3), в котором следует заменить H на l — мощность водоносного пласта. При этом водоносный пласт считается ограниченным сверху и снизу горизонтальными водонепроницаемыми плоскостями $z = 0$ и l.

Уравнения (1.2), (1.5), (1.6) определены в некоторой двумерной области D, являющейся проекцией области фильтрации на плоскость $z = 0$. Несовершенным водоемам, т. е. водоемам, дно которых лежит выше подстилающего водоносный пласт водоупора, в области D будут соответствовать некоторые подобласти D_0, окруженные, вообще говоря, полосообразной областью D_b, которая соответствует промежутку высачивания (фиг. 1).

Для этих подобластей уравнения (1.2), (1.5), (1.6) непригодны. Поэтому получим точные, а также приближенные уравнения для подобластей D_0, D_b, позволяющие при численном решении задачи осуществлять сквозной счет по всей области D.

2. Получение точных уравнений. Предположим, для определенности, что в D имеется только одна подобласть D_0, ответствующая несовершенному водоему, которую окружает область D_b. Обозначим через Γ_0 границу области D_0, а через Γ_b — внешнюю границу области D_b. Обе границы могут перемещаться со временем при изменении уровня воды в водоеме. Пусть $\zeta(x, y) = z - f(x, y) = 0$ — уравнение поверхности грунта в области D (фиг. 2). На безнапорных участках области фильтрации $H(t, x, y) \leqslant f(x, y)$,



Фиг. 2

в пределах области D_0 поверхность $z = f(x, y)$ совпадает с дном водоема, а в D_b будет $H(t, x, y) = f(x, y)$. Граница Γ_0 определяется уравнением $f(x, y) = H_0(t)$, где $H_0(t)$ — уровень воды в водоеме, отсчитываемый от водоупора, который предполагаем горизонтальной плоскостью $z = 0$.

Получим сначала точное уравнение для области D_b. Введем в D_b потенциал

$$\Phi_b(t, x, y) = \int_0^{f(x,y)} g(z)\,[h(t, x, y, z) - z]\,dz \tag{2.1}$$

Используя граничное условие $h = z$ на поверхности $z = f(x, y)$ (стенке водоема), получаем

$$\int_0^f \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial h}{\partial x}\right) dz = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \Phi_b}{\partial x}\right) - \left(K\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{z=f}\frac{\partial f}{\partial x} \tag{2.2}$$

$$\int_0^f \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial h}{\partial y}\right) dz = \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \Phi_b}{\partial y}\right) - \left(K\frac{\partial h}{\partial y}\right)_{z=f}\frac{\partial f}{\partial y} \tag{2.3}$$

Проинтегрируем уравнение (1.1) по z от нуля до $f(x, y)$. Учитывая (2.2), (2.3) и граничное условие $\partial h / \partial z = 0$ при $z = 0$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \Phi_b}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \Phi_b}{\partial y}\right) - \left[K\left(\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial z}\right)\right]_{z=f} = 0 \tag{2.4}$$

Нормальная компонента v_n вектора скорости воды на стенке водоема определяется соотношением

$$v_n = K(\operatorname{grad} h,\ \operatorname{grad}\xi \,/\, |\operatorname{grad}\xi|^{-1}) \tag{2.5}$$

$$\omega(t, x, y) = v_n |\operatorname{grad}\xi|$$

где круглыми скобками обозначено скалярное произведение векторов. Величина $\omega(t, x, y)$ представляет собой количество воды, проникающее через стенку водоема (промежуток высачивания) в грунт за единицу времени, отнесенное к единичной площадке проекции стенки водоема на горизонтальную плоскость. Поскольку на промежутке высачивания вода вытекает из грунта в водоем, то при отсутствии внешнего притока (например, за счет дождя) величина ω будет отрицательной. Из (2.4) и (2.5) находим

$$\omega(t,x,y)=-\left[K\left(\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial z}\right)\right]_{z=f} \tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) в (2.4), получаем точное уравнение для области D_b

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\Phi_b}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\Phi_b}{\partial y}\right)+\omega=0 \tag{2.7}$$

Из (1.3) и (2.1) находим условия склеивания функций Φ, Φ_b на линии Γ_b

$$\Phi=\Phi_b,\qquad k\frac{\partial\Phi}{\partial n}=k_b\frac{\partial\Phi_b}{\partial n} \tag{2.8}$$

где производные берутся по нормали к Γ_b.

Получим теперь точное уравнение для области D_0. Определим в D_0 потенциал

$$\Phi_0(t,x,y)=\int_0^{f(x,y)} g(z)\,[h(t,x,y,z)-H_0(t)]\,dz \tag{2.9}$$

Используя граничное условие $h=H_0(t)$ на дне водоема, для функции Φ_0 можно получить соотношения типа (2.2), (2.3), где Φ_b следует заменить на Φ_0. Дальнейшие выкладки такие же, как и при получении уравнения (2.7). В результате получаем точное уравнение для потенциала (2.9)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\Phi_0}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\Phi_0}{\partial y}\right)+\omega=0 \tag{2.10}$$

Здесь $\omega(t, x, y)$ — количество воды, которое проникает из водоема (через стенку водоема, расположенную ниже уровня воды в водоеме) в грунт за единицу времени, отнесенное к единичной площадке проекции дна водоема на горизонтальную плоскость. Из (2.1) и (2.9) получаем условия склеивания функций Φ, Φ_b на линии Γ_0

$$\Phi_b=\Phi_0+\psi(t),\qquad k_b\frac{\partial\Phi_b}{\partial n}=k_0\frac{\partial\Phi_0}{\partial n} \tag{2.11}$$

$$\psi(t)=\int_0^{H_0} g(z)\,(H_0-z)\,dz$$

где производные берутся по нормали к Γ_0. В (2.11) через k_b, k_0 выражены значения коэффициента фильтрации k на линии Γ_0 соответственно со стороны областей D_b, D_0.

3. Получение приближенных уравнений. Точные уравнения (2.7), (2.10) можно использовать для расчетов только при известной функции $\omega(t, x, y)$, что имеет место далеко не всегда. Поэтому получим приближенные уравнения, аналогичные уравнениям (2.7), (2.10), в которые функция ω в явном виде не входит.

Будем считать водоносный пласт составленным из m слоев с различными коэффициентами фильтрации и водоотдачи. Следовательно, функция $g(z)$ кусочно-постоянная

$$g(z)=g_i \quad \text{при } l_{i-1}\leqslant z\leqslant l_i,\ l_0=0, \qquad i=1,2,\ldots,m$$

Тогда

$$K(x,y,z)=k(x,y)g_i=k^i \text{ при } l_{i-1}\leqslant z\leqslant l_i$$

Рассмотрим сначала участки области фильтрации, расположенные под дном водоема (фиг. 2). Пусть водоносный грунт состоит там из s слоев, которые занумерованы снизу вверх. Представим напоры $h_i(t,x,y)$ в слоях следующими полиномами по z:

$$\begin{aligned}
h_1&=a_1+b_1(z-l_1)+c_1(z-l_1)^2\\
h_2&=a_2+b_2(z-l_2)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
h_{s-1}&=a_{s-1}+b_{s-1}(z-l_{s-1})\\
h_s&=H_0(t)+b_s(z-l_s), \qquad l_s=f(x,y)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где l_i — расстояние кровли i-го слоя от водоупора, а a_i, b_i, c_i — пока неопределенные коэффициенты, зависящие от t, x, y. Найдем эти коэффициенты, используя условия склеивания на границах слоев

$$\begin{gathered}
h_i(t,x,y,l_i)=h_{i+1}(t,x,y,l_i)\\
g_i\left(\frac{\partial h_i}{\partial z}\right)_{z=l_i}=g_{i+1}\left(\frac{\partial h_{i+1}}{\partial z}\right)_{z=0} \qquad (i=1,2,\ldots,l_{s-1})
\end{gathered} \tag{3.2}$$

и граничное условие $(dh_1/dz)_{z=0}=0$. Подставляя (3.1) в (3.2), получим систему линейных уравнений

$$\begin{gathered}
a_i=a_{i+1}-b_{i+1}T_{i+1}, \qquad a_s=H_0(t)\\
g_ib_i=g_{i+1}b_{i+1}, \qquad T_i=l_i-l_{i-1}, \qquad l_0=0\\
b_1=2c_1T_1 \qquad (i=1,2,\ldots,s-1)
\end{gathered}$$

Решая эту систему, находим

$$a_i=H_0-b_s\sum_{j=i+1}^{s}\frac{g_s}{g_j}T_j, \qquad b_i=\frac{g_s}{g_i}b_s, \qquad c_1=\frac{1}{2T_1}\frac{g_s}{g_1}b_s \tag{3.3}$$

Вычислим теперь значение $\Phi_0(t,x,y)$, используя соотношения (3.1). Имеем

$$\Phi_0(t,x,y)=\int_0^{l_s}g(z)(h-H_0)\,dz=\sum_{i=1}^{s}g_i\int_{l_{i-1}}^{l_i}(h_i-H_0)\,dz= \tag{3.4}$$

$$=\sum_{i=1}^{s}g_i\left[(a_i-H_0)T_i-b_i\frac{T_i^2}{2}\right]+c_1\frac{T_1^3}{3}=-g_sb_s\left(\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{j=i+1}^{s}\frac{g_i}{\sigma}T_iT_j+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{s}T_i^2+\frac{1}{3}T_1^2\right)$$

Предположим для простоты, что водоем расположен целиком в верхнем слое. Вычислим для этого случая величину ω. Дифференцируя граничное условие $h_s(t, x, y, f) = H_0(t)$, находим

$$\frac{\partial h_s}{\partial x} = -\frac{\partial h_s}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial h_s}{\partial y} = -\frac{\partial h_s}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}$$

С помощью этих соотношений и соотношения $\partial h_s / \partial z = b_s$ преобразуем (2.6) к виду

$$\omega(t, x, y) = k(x, y) b_s g_s \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] \tag{3.5}$$

Обозначим

$$T = \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=i+1}^{s} \frac{g_i}{g_j} T_i T_j + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{s} T_i^2 + \frac{1}{3} T_1^2 \tag{3.6}$$

$$p(x, y) = \frac{1}{T} k(x, y) \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]$$

Тогда из (3.4) и (3.5) находим: $\omega = -p(x, y)\Phi_0$. Подставляя последнее соотношение в (2.10), получаем приближенное уравнение для области D_0

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \Phi_0}{\partial y}\right) - p\Phi_0 = 0 \tag{3.7}$$

При выполнении сквозного счета по области D условия (2.11) неудобны из-за неоднородности. Поэтому в D_0 введем новую функцию $\Phi^* = \Phi_0 + \psi(t)$, для которой выполняются уже однородные условия вклеивания

$$\Phi_b = \Phi^*, \qquad k_b \partial \Phi_b / \partial n = k_0 \partial \Phi^* / \partial n$$

и преобразуем уравнение (3.7) к виду

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \Phi^*}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \Phi^*}{\partial y}\right) - p(\Phi^* - \psi) = 0 \tag{3.8}$$

Получим теперь приближенное уравнение для области D_b, т. е. будем рассматривать участки области фильтрации, расположенные ниже промежутка высачивания. Как и ранее, предположим водоем вместе с промежутком высачивания, расположенным в одном (верхнем) слое. Представим напоры $h_i(t, x, y)$ в слоях полиномами (3.1), где только нужно заменить $H_0(t)$ на $f(x, y)$. Аналогично предыдущему можно получить соотношения типа (3.3) (с заменой H_0 на f). Имеем

$$\Phi_b(t, x, y) = \int_0^{f(x,y)} g(z)(h - z)\,dz = \sum_{i=1}^{s} g_i \int_{l_{i-1}}^{l_i} (h_i - z)\,dz =$$

$$= \sum_{i=1} g_i \left[a_i T_i - \frac{l_i + l_{i-1}}{2} T_i - b_i \frac{T_i^2}{2}\right] + g_1 c_1 \frac{T_1^3}{3}$$

Подставляя сюда соотношения (3.3) с заменой в них H_0 на $f(x, y) = l_s$, находим

$$\Phi_b = -g_s b_s T + \sum_{i=1}^{s} \left(l_s - \frac{l_i + l_{i-1}}{2}\right) g_i T_i \tag{3.9}$$

Чтобы вычислить ω, продифференцируем по x и y граничное условие $h_s(t, x, y, f) = f$

$$\frac{\partial h_s}{\partial x} = \left(1 - \frac{\partial h_s}{\partial z}\right) \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial h_s}{\partial y} = \left(1 - \frac{\partial h_s}{\partial z}\right) \frac{\partial f}{\partial y}$$

Из этих соотношений и равенства $\partial h_s / \partial z = b_s$, а также (2.6) получаем

$$\omega(t, x, y) = kg_s b_s \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] - kg_s \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] \tag{3.10}$$

Обозначая

$$g(x, y) = \frac{k}{T} \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] \sum_{i=1}^{s} \left(l_s - \frac{l_i + l_{i-1}}{2}\right) g_i T_i -$$

$$- kg_s \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]$$

и используя соотношения (3.6), (3.9), преобразуем (3.10) к виду: $\omega = -p\Phi_b + q$. Тогда приближенное уравнение для области D_b, заменяющее уравнение (2.7), запишется так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial \Phi_b}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial \Phi_b}{\partial y}\right) - p\Phi_b + q = 0 \tag{3.11}$$

4. Вычисление границы водоема. Граница водоема Γ_0 может изменяться со временем как за счет принудительного изменения уровня $H_0(t)$, так и за счет естественного притока грунтовых вод к водоему и внешней инфильтрации. В первом случае линия Γ_0 определяется из уравнения $f(x, y) = H_0(t)$. Случай естественного притока к водоему (или оттока) с изменением его границы имеет место, например, при выходе грунтовых вод на поверхность земли во время паводков или при подтоплении территории водохранилищами. В этом случае уровень $H_0(t)$ вычисляется по формуле

$$H_0(t) = H_0(0) + \int_0^t \frac{1}{S_t} \int_{S_t} [\omega(t, x, y) + w(t, x, y)]\, dx\, dy\, dt \tag{4.1}$$

где S_t — площадь поверхности водоема в момент времени t, $H_0(0)$ — начальный уровень воды в водоеме, $w = w(t, x, y)$ — инфильтрация. Для приближенного уравнения (3.8) выражение (4.1) преобразуется к виду

$$H_0(t) = H_0(0) + \int_0^t \frac{1}{S_t} \int_{S_t} [w(t, x, y) - p(x, y)(\Phi^* - \psi)]\, dx\, dy\, dt \tag{4.2}$$

Чтобы вычислить площадь S_t, необходимо сначала найти линию Γ_0, которая ограничивает эту площадь. Линия Γ_0 находится из уравнения $H_0(t) = f(x, y)$. Как видно из (4.2), уровень H_0 зависит от неизвестного заранее решения уравнения (3.8). Поэтому формулу (4.2) при решении задачи необходимо рассматривать совместно с уравнением (3.8).

Линия Γ_b, отделяющая область D_b от основной области, также неизвестна. Правда, во многих задачах область D_b либо отсутствует, либо настолько мала, что ею можно пренебречь. Для вычисления Γ_b, когда это необходимо, требуется знать свободную поверхность воды в области $D - D_0 - D_b$. Приближенные значения уровней воды в этой области находятся из (1.4) с помощью сходящегося итерационного процесса (см. [2], стр. 61)

$$H_n^2 = H_{n-1}^2 - 2\int\limits_0^{H_{n-1}} g(z)\,(H_{n-1} - z)\,dz + 2\Phi \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$H = \sqrt{2\Phi} \quad \text{при } g(z) \equiv 1$$

Если уровень $H(t, x, y)$ известен, то линия Γ_b находится из уравнения $H(t, x, y) = f(x, y)$. По решениям уравнений (2.7), (2.10) или (3.8), (3.12) можно определить средние напоры

$$h_c = \int\limits_0^f g(z)\,h(t, x, y, z)\,dz \Big/ \int\limits_0^f g(z)\,dz$$

в областях D_0, D_b. Они находятся из выражений (2.1), (2.9).

Таким образом, уравнения (1.5), (3.8), (3.12) позволяют приближенно свести трехмерную задачу фильтрации грунтовых вод в области, где имеются несовершенные водоемы, к двумерной задаче, для которой возможен сквозной счет по всей области D. Результаты можно обобщить на случай, когда требуется учет капиллярности, кольматации дна водоема, а также упругости водоносного пласта.

Поступила 27 I 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., Гостехиздат, 1952.
2. Шаманский В. Е. Численное решение задач фильтрации грунтовых вод на ЭЦВМ. Киев, «Наукова думка», 1969.