

УДК 532.529.5

ОБТЕКАНИЕ УГЛА СМЕСЬЮ ЖИДКОСТИ И ПУЗЫРЬКОВ ГАЗА

В. В. ПРОКОФЬЕВ

(Москва)

Рассматривается течение смеси идеальной несжимаемой жидкости и пузырьков газа в предположении, что объемная концентрация газа в смеси мала. Методы, описанные в работе [1], обобщаются на случай, когда имеет место пересечение линий тока среды пузырьков.

Решена задача об обтекании внутренности угла смесью с вводом пузырьков газа в поток на некотором участке стенки выше вершины угла. В случае обтекания плоской пластины при нулевом угле атаки решение дано для произвольного вдува пузырьков газа через поверхность этой пластины.

Параметры течения в прямом угле найдены аналитически. В случае произвольного угла исследование выполнено с использованием вычислений на ЭЦВМ.

1. Постановка задачи. Несжимаемая невесомая идеальная жидкость течет внутри угла $\pi - \beta$ ($0 \leq \beta \leq \pi/2$). На участке границы длиной l , расположенной вверх по потоку от вершины угла, в жидкость вдоль нормали вводятся пузырьки газа со скоростью w_0 , зависящей от точки вдува. Возникает некоторая область, занятая смесью жидкости и пузырьков газа, причем их скорости различны. Для описания течения в этой области воспользуемся уравнениями, обсуждавшимися в работе [1]. Так как при выводе этих уравнений предполагалось, что расстояние между соседними пузырьками гораздо больше размера самих пузырьков, то в дальнейшем будем считать, что объемная концентрация газа в смеси мала.

В качестве нулевого приближения следует взять течение жидкости без пузырьков [1].

Пусть это будет потенциальное течение жидкости в угле, которое, как известно, можно задать формулами

$$U = r^\gamma \cos \gamma \theta, \quad V = -r^\gamma \sin \gamma \theta \quad (1.1)$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \arctg y/x, \quad \gamma = \beta / (\pi - \beta)$$

Здесь U и V — компоненты скорости жидкости в декартовой системе координат.

Функция тока Ψ (считая ее обращающейся в нуль на стенке) и модуль градиента давления в жидкости (направленного вдоль лучей $\theta = \text{const}$ к центру) равны

$$\Psi = r^{1-\gamma} \sin (1 + \gamma) \theta, \quad |\text{grad } p_0| = \gamma r^{2\gamma-1} \quad (1.2)$$

Здесь p_0 — давление в жидкости, отнесенное к $\rho_0^0 v_0^2$ (функция тока отнесена к величине lv_0), где ρ_0^0 — плотность жидкости, v_0 — скорость жидкости в точке $x = -l \cos \beta$, $y = l \sin \beta$.

Будем рассматривать изменение угла β в интервале $(0, \pi/2)$, соответственно, величина γ будет меняться в интервале $(0, 1)$.

2. Поле движения пузырьков. Рассмотрим движение изолированного пузырька в заданном выше поле течения жидкости. Период собственных колебаний [2]

$$T = 2\pi R\tau / \sqrt{3p_0}$$

(R — безразмерный равновесный радиус) для маленького пузырька гораздо меньше характерного времени задачи ($\tau = l/v_0$). Поэтому будем считать, что пузырек все время находится в равновесии с жидкостью и давление внутри пузырька равно p_0 . Учитывая (1.1), (1.2) и вводя безразмерные величины

$$\rho_0 = \rho_0^\circ / \rho_1^\circ, \quad \text{Re} = lv_0 / \nu, \quad w = w_0 / v_0$$

где ρ_1° — плотность газа в пузырьках, ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости, одновременно отнеся все величины, имеющие размерность длины, к l , размерность скорости — к v_0 и т. д., уравнения движения пузырька можно записать в виде [1]

$$\begin{aligned} \mu \ddot{x} &= k(r^\nu \cos \gamma\theta - \dot{x}) + [2\gamma r^{2(\nu-1)}x + \gamma \dot{x} r^{\nu-2}(x \cos \gamma\theta + \\ &+ y \sin \gamma\theta) + \gamma \dot{y} r^{\nu-2}(y \cos \gamma\theta - x \sin \gamma\theta)] \rho_0 / 2 \\ \mu \ddot{y} &= -k(r^\nu \sin \gamma\theta + \dot{y}) + [2\gamma y r^{2(\nu-1)} + \gamma \dot{x} r^{\nu-2}(y \cos \gamma\theta - \\ &- x \sin \gamma\theta) - \gamma \dot{y} r^{\nu-2}(y \sin \gamma\theta + x \cos \gamma\theta)] \rho_0 / 2 \\ \mu &= 1 + \rho_0 / 2, \quad k = 18\rho_0 / (\text{Re } D^2), \quad D = 2R \end{aligned} \quad (2.1)$$

Начальными условиями будут условия вдува

$$t = 0, \quad x = -r_0 \cos \beta, \quad y = r_0 \sin \beta, \quad \dot{x} = w \sin \beta, \quad \dot{y} = w \cos \beta$$

где r_0 — расстояние от начала координат до точки вдува пузырька. На линии вдува следует задать все параметры, определяющие среду пузырьков: начальный радиус пузырька R_0 , плотность газа ρ_{00} , объемную концентрацию α_0 и скорость вдува пузырьков w . Все перечисленные выше величины есть функции r_0 ($0 \leq r_0 \leq 1$).

Как и в работе [2], предположим, что газ в пузырьке меняет свой объем изотермически, кроме того, масса каждого пузырька не меняется в процессе движения и все пузырьки имеют одинаковую массу. Тогда

$$R = R_{01} \sqrt[3]{p_{01}/p_0}, \quad \rho_0 = \rho_{01} p_{01}/p_0 \quad (2.2)$$

$$p_0 = p_{00} - r^{2\nu} / 2, \quad p_{01} = p_{00} - 1/2$$

Здесь и в дальнейшем индекс 1 означает, что величина берется на стенке при $r_0 = 1$, p_{00} — давление при $r_0 = 0$, т. е. полное давление невозмущенного течения жидкости.

Уравнения (2.1), (2.2) образуют замкнутую систему. Остается только задать конкретные граничные условия. Пусть газ вдувается таким образом, что удельный массовый расход его вдоль линии вдува остается постоянным.

В работе [3] показано, что если в потоке многофазной среды провести произвольную поверхность, то поверхностная концентрация (т. е. отношение площади, занимаемой определенной фазой, к площади, занятой смесью) равна объемной концентрации той же фазы. Будем считать, что это соотношение выполняется вплоть до линии вдува. А так как поверхностная концентрация на линии вдува пропорциональна квадрату радиуса пузырька, согласно двум последним предположениям для α_0 и w получим соотношения

$$\alpha_0 = \alpha_{01} (p_{01}/p_0)^{2/3}, \quad w = w_1 \sqrt[3]{p_{01}/p_0} \quad (2.3)$$

Здесь p_0 есть функция r_0 . Значит для расчета поля движения пузырьков следует задать параметры p_{00} , ρ_{01} , w_1 , D_{01} , Re . Величину α_{01} можно взять равной единице, если условиться за малый параметр задачи выбирать объемную концентрацию на линии вдува в точке $r_0 = 1$.

Решение поставленной выше задачи в общем случае получается в параметрическом виде

$$x = x(r_0, t), \quad y = y(r_0, t) \quad (2.4)$$

причем при $r_0 = \text{const}$ получается траектория отдельного пузырька. В переменных r_0, t величина α может быть выражена формулой [1]

$$\alpha M(r_0, t) / \rho_0 = \alpha_0 M(r_0, 0) / \rho_{00} = f(r_0) \quad (2.5)$$

Здесь M — якобиан преобразования при переходе от переменных x, y к переменным r_0, t .

Учитывая условия на линии вдува, можно написать

$$\alpha = \alpha_0 \frac{\rho_0}{\rho_{00}} \frac{w}{\dot{x} \partial y / \partial r_0 - \dot{y} \partial x / \partial r_0} \quad (2.6)$$

Величины, стоящие в (2.6) справа, определяются из начальных условий и из решения системы дифференциальных уравнений (2.1).

3. Возмущение движения жидкости пузырьками. Введем величину $P = uU + vV + p$, являющуюся возмущением полного давления (u, v, p — соответственно возмущения компонент скорости и давления в жидкости).

Величину P можно выразить квадратурой [1]

$$P = - \int_{x_1(\Psi)}^x \left(\frac{F_x U + F_y V}{U} \right)_{\Psi = \text{const}} dx \quad (3.1)$$

Здесь f_x и f_y — проекции на оси координат силы, действующей со стороны жидкости на пузырек за счет трения и эффекта присоединенных масс, отнесенной к единице его массы, величина Ψ определяется соотношением (1.2) и $x = x_1(\Psi)$ — уравнение траектории $r_0 = 1$ в переменных x, Ψ .

В (3.1) перейдем к переменным r_0, t . Учитывая соотношения (1.1), получим

$$P = \int_1^{r_0} \left(\rho_0 f(r_0) \frac{\varphi_x \cos \gamma \theta - \varphi_y \sin \gamma \theta}{\dot{y} \cos \gamma \theta + \dot{x} \sin \gamma \theta} \right)_{\Psi = \text{const}} dr_0 \quad (3.2)$$

$$\varphi_x = f_x / \rho_0 = \ddot{x} / \rho_0 - \gamma x r^{2(\gamma-1)}, \quad \varphi_y = f_y / \rho_0 = \dot{y} / \rho_0 - \gamma y r^{2(\gamma-1)}$$

Вдоль твердой стенки ($\Psi = 0$) (3.2) имеет вид

$$P = \int_1^{r_0} \frac{\alpha_0}{\mu} \left[\frac{k}{\rho_0} r_0^\gamma + \frac{\rho_0 \gamma}{2} r_0^{\gamma-1} \right] dr_0 \quad (3.3)$$

Видно, что величина P на стенке не зависит от скорости вдува пузырьков w и всегда неположительна. Положим $\mu = 1 + \rho_0 / 2 \approx \rho_0 / 2$ (так как $\rho_0 \gg 1$), тогда

$$P = \alpha_{01} \left[\frac{36 \rho_{00}}{\text{Re } D_{01}^2 \rho_{01} p_{01}} \left(\frac{r_0^{\gamma+1} - 1}{\gamma + 1} - \frac{r_0^{3\gamma+1} - 1}{2 \rho_{00} (3\gamma + 1)} \right) + 3 \rho_{01}^{1/2} (p_{01}^{1/2} - p_0^{1/2}) \right] \quad (3.4)$$

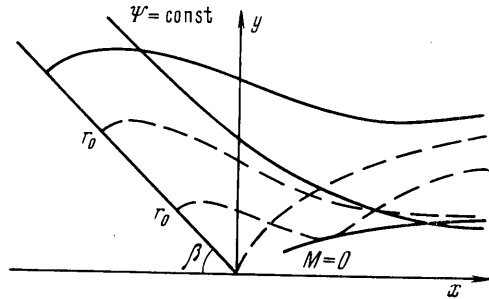
Если в (3.4) $p_{00} \rightarrow \infty$, то результат совпадает с выражением, полученным из (3.3), в предположении, что пузырьки несжимаемые.

Зависимость P от параметра p_{00} можно проиллюстрировать такими примерами. Если

$$\operatorname{Re} D_{01}^2 = 1, \quad \rho_{01} = 10^3, \quad \gamma = 1/5, \quad p_{00} = 1, 10, \infty$$

то соответствующие значения P или $r_0 = 0$ равны $-0.448, -0.522, -0.53$. С увеличением $\operatorname{Re} D_{01}^2$ зависимость от p_{00} возрастает. Так, в пределе, когда $\operatorname{Re} D_{01}^2 \rightarrow \infty$, при тех же значениях p_{00} соответствующие значения P для $r_0 = 0$ равны $-0.39, -0.49, -0.5$.

Формула (2.6) получена в предположении, что траектории различных пузырьков не пересекаются. Однако при некоторых значениях исходных параметров задачи (например, при малых углах β) может возникнуть ситуация, когда траектории пузырьков, движущихся в потоке, пересекаются. В этом случае должна существовать огибающая семейства траекторий, причем ее уравнение есть $M(r_0, t) = 0$ (часть этой кривой изображена на фиг. 1). В области, где имеется пересечение траекторий, нельзя однозначно определить скорость среды пузырьков. Как видно из фиг. 1, в каждой точке этой области имеются два значения скорости.



Фиг. 1

В связи с этим все течение пузырьков разобьем на два различных потока: пузырьки первого потока движутся от линии вдува до огибающей $M = 0$, те же пузырьки, движущиеся от огибающей дальше, будем считать принадлежащими второму потоку (можно считать, что на огибающей имеется сток пузырьков первого потока и одновременно такой же интенсивности источник пузырьков второго потока). Гидродинамические параметры этих двух потоков могут быть определены однозначно в каждой точке. Из дальнейшего будет видно, что в рассматриваемой задаче, вообще говоря, нельзя ограничиться введением только двух потоков пузырьков. Однако такое течение является простым обобщением случая, описанного выше. Поэтому рассмотрим два потока пузырьков, и пусть траектория $r_0 = 0$ есть крайняя верхняя (фиг. 1) траектория пузырьков, принадлежащих второму потоку.

Предполагая, что пузырьки разных потоков друг с другом не взаимодействуют, введем аналогично [3] смесь из $n + 1$ сред, из них n сред пузырьков, принадлежащих n потокам, и одной непрерывной среды — жидкости. Объемная концентрация жидкости в такой смеси

$$\alpha_0 = 1 - \sum_1^n \alpha_i \tag{3.5}$$

где α_i — объемная концентрация i -й среды пузырьков. Если предположить, что мала сумма $\sum \alpha_i$, то можно провести все операции аналогично работе [1]. Для каждой среды в переменных (r_0, t) получим интеграл соответствующего уравнения неразрывности. Для $n = 2$ имеем

$$\alpha_i M_i / \rho_{0i} = f_i(r_0) \quad (i = 1, 2), \quad f_1(r_0) = f(r_0), \quad f_2(r_0) = -f(r_0) \tag{3.6}$$

Вместо (3.2) в этом случае

$$P = \int_1^{r_0} \rho_0 f(r_0) \frac{\varphi_x \cos \gamma \theta - \varphi_y \sin \gamma \theta}{\dot{y} \cos \gamma \theta + \dot{x} \sin \gamma \theta} dr_0 + \int_{r_0}^0 \rho_0 f(r_0) \frac{\varphi_x \cos \gamma \theta - \varphi_y \sin \gamma \theta}{\dot{y} \cos \gamma \theta + \dot{x} \sin \gamma \theta} dr_0 \quad (3.7)$$

Подынтегральное выражение вычисляется при $\Psi = \text{const}$ (индексы 1 и 2 здесь опущены). Параметр r_0' (см. фиг. 1) определяет траекторию, которая уже коснулась огибающей, и пересекает линию $\Psi = \text{const}$ в той же точке, что и траектория $r_0 = \text{const}$. В случае, когда $r_0' = r_0$ (это может быть только тогда, когда кривая $\Psi = \text{const}$ пересекает траекторию $r_0 = \text{const}$ в точке касания ее с огибающей), выражение (3.7) совпадает с (3.5). Следовательно, величину P в области течения чистой жидкости, примыкающей к оси x , в любом случае можно вычислять по формуле (3.2).

4. Частные случаи. В случае $\gamma = 0$ $p_0 = \text{const}$ и радиус пузырьков остается неизменным. Предположим еще, что $w(r_0)$ — некоторая неубывающая функция r_0 (точке $r_0 = 0$ соответствует точка $x = 0$, а $r_0 = 1$ — точка $x = -1$).

Проинтегрировав уравнения движения пузырьков, получим

$$x = t - r_0 - (1 - z)\mu / k, \quad y = w(1 - z)\mu / k \quad (4.1)$$

$$\dot{x} = 1 - z, \quad \dot{y} = wz; \quad z = \exp[-tk / \mu]$$

Отсюда видно, что за время порядка μ / k при $\rho_0 \gg 1$, приблизительно равном $\text{Re } D_{01}^2 / 36$, пузырьки выходят практически на прямолинейные траектории.

Согласно (2.6) для объемной концентрации α получается выражение

$$\alpha = \alpha_0 w / M, \quad M = w'(1 - z)^2 \mu / k + wz \quad (4.2)$$

При $t \rightarrow \infty$ величина $\alpha \rightarrow \alpha_0 k w / \mu w'$.

В переменных (r_0, t) для возмущения полного давления можем написать

$$P = \alpha_0 k (r_0 - 1) / \mu \rho_0 \quad (4.3)$$

Таким образом, здесь P — величина всюду неположительная и постоянная вдоль траекторий пузырьков.

Введем функцию ψ

$$u = \partial \psi / \partial y + \alpha, \quad v = -\partial \psi / \partial x \quad (4.4)$$

В области, занятой смесью, ψ должна удовлетворять уравнению

$$\Delta \psi = -\Omega - \partial \alpha / \partial y, \quad \Omega = \alpha_0 k (w^2 z + z - 1) / \mu \rho_0 M \quad (4.5)$$

$$\partial \alpha / \partial y = \alpha_0 [(1 - z)^3 (w'^2 - w w'') \mu / k - wz (2w'(1 - z) - wk / \mu)] / M^2$$

Там, где имеется только чистая жидкость, в рассматриваемом случае должно выполняться уравнение Лапласа, на линиях $r_0 = 0$, $r_0 = 1$ производная по нормали от ψ имеет скачок [1]. Должно также удовлетворяться граничное условие $\psi = 0$ при $y = 0$. Решение такой задачи можно получить на основании изложенного в работе [1]. Для производной $\partial \psi / \partial y'$, определяющей скорость u , получим следующее выражение (x' , y' — координаты точки, в которой ищется решение). Учитывая все сказанное, получим

$$2\pi \frac{\partial \psi}{\partial y'} = \alpha_0 \int_0^\infty \left[\frac{(1 - z) w_0}{M_0} \left(\frac{y + y'}{r_2^2} + \frac{y - y'}{r_1^2} \right) \right]_{r_0=0} - \frac{(1 - z) w_1}{M_1} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\frac{y+y'}{r_2^2} + \frac{y-y'}{r_1^2} \right) \Big|_{r_0=1} dt - \alpha_0 \int_0^\infty \left\{ \int_1^0 \left(\Omega + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) M \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{y+y'}{r_2^2} + \frac{y-y'}{r_1^2} \right) dr_0 \right\} dt, \quad w_1 = w(1), \quad w_0 = w(0). \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} M_1 &= M(1, t), \quad M_0 = M(0, t), \quad r_1^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 \\ r_2^2 &= (x-x')^2 + (y+y')^2 \end{aligned}$$

С помощью (4.6) можно вычислить $\partial\psi/\partial y'$ при $x' \rightarrow \pm\infty$ или $y' \rightarrow \infty$, причем отличные от нуля значения u получаются только при $x' \rightarrow +\infty$.

Если теперь несколько обобщить задачу и считать, что в начальный момент $\dot{x} = m(r_0) \neq 0$ (вдвиг осуществляется под произвольным углом к пластине), то скорость u при $x' \rightarrow +\infty$ определяется формулами

$$\begin{aligned} u &= 0 (y' < w_1\mu/k), \quad u = \alpha_0 \left[r_0 - 1 - \int_1^{r_0} m dr_0 \right] k/\mu\rho_0 (w_0\mu/k < y' < \\ & < w_1\mu/k), \quad u = -\alpha_0 \left[1 + \int_1^0 m dr_0 \right] k/\mu\rho_0 \quad (0 \leq y' < w_0\mu/k) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Как видно из (4.7), на бесконечном удалении от пластины вниз по потоку имеет место равенство $P = u$, откуда следует, что $p = 0$ — давление не возмущается.

Зная профиль возмущенной скорости u при $x \rightarrow +\infty$, для изменения количества движения жидкости за счет эффекта движения пузырьков относительно жидкости можно выписать следующее выражение:

$$\frac{\alpha_0}{\rho_0} \int_1^0 w(m-1) dr_0 \quad (4.8)$$

При $m = \text{const}$ количество движения жидкости увеличивается, если $m > 1$.

В случае $\gamma = 1$, полагая $p_{00} \rightarrow \infty$, уравнения траекторий и выражения для компонент скорости пузырька получаем в виде

$$x = \frac{w}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}), \quad y = \frac{r_0}{\gamma_2 - \gamma_1} (\gamma_2 e^{\gamma_1 t} - \gamma_1 e^{\gamma_2 t}) \quad (4.9)$$

$$\dot{x} = \frac{w}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t}), \quad \dot{y} = \gamma_2 \gamma_1 \frac{r_0}{\gamma_2 - \gamma_1} (e^{\gamma_1 t} - e^{\gamma_2 t}) \quad (4.10)$$

$$\lambda_{1,2} = (\rho_0/2 - k \pm \sqrt{(\rho_0/2 - k)^2 + 4\mu(k + \rho_0)}) / 2\mu$$

$$\gamma_{1,2} = (-\rho_0/2 - k \pm \sqrt{(\rho_0/2 + k)^2 - 4\mu(k - \rho_0)}) / 2\mu$$

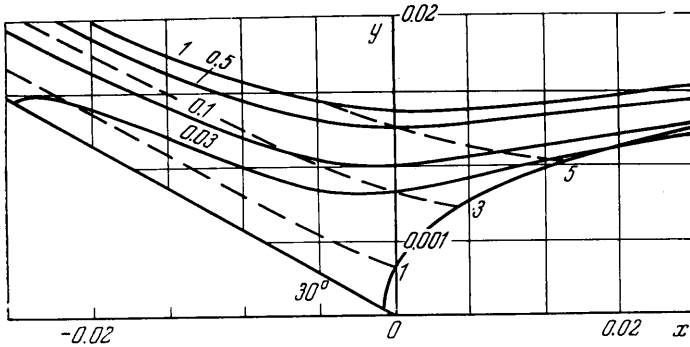
Подкоренное выражение в написанных выше формулах всегда положительно при $\rho_0 > 1$ (для изучаемой смеси $\rho_0 \sim 10^3$). Исследования показывают, что при $k/\rho_0 > 1$ координата траектории пузырька убывает с возрастанием x , а при $k/\rho_0 < 1$, наоборот, возрастает. Это качественное различие объясняется тем, что силы, действующие на частичку, в разной степени зависят от ее размера. Так, для маленьких пузырьков наибольший эффект дает сила трения.

Для объемной концентрации получается выражение

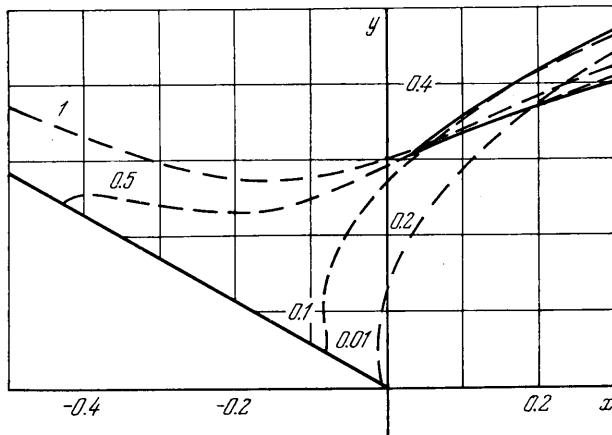
$$\alpha = \alpha_0 \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\gamma_2 - \gamma_1)}{(\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t})(\gamma_2 e^{\gamma_1 t} - \gamma_1 e^{\gamma_2 t})}$$

откуда следует, что α есть функция только координаты x .

5. **Результаты расчетов.** Система дифференциальных уравнений (2.1) для произвольной величины γ рассчитывалась на ЭЦВМ методом Рунге — Кутты четвертого порядка точности с автоматическим выбором шага. На



Фиг. 2



Фиг. 3

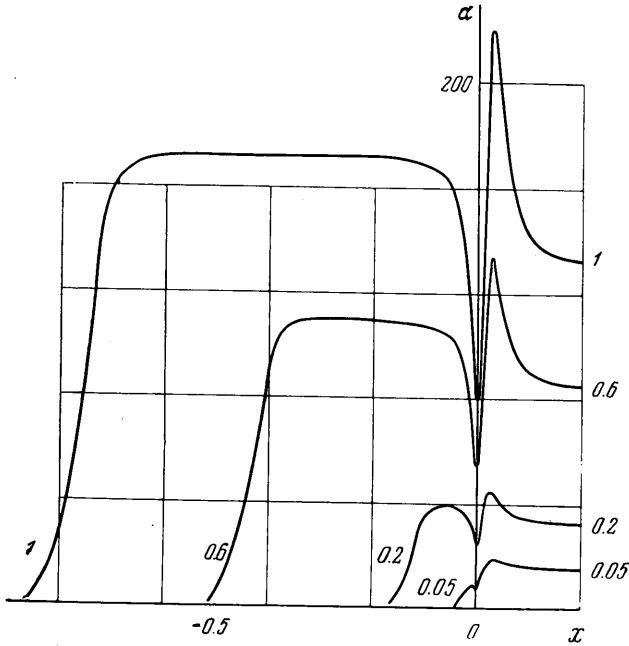
Фиг. 2, 3 представлена картина течения смеси вблизи вершины угла. Сплошными линиями нанесены траектории пузырьков, рядом проставлены значения параметра r_0 . Штрихами указано положение линий тока $\Psi = \text{const}$ для различных значений $10^3 \Psi$.

На фиг. 2 графики строились при $\beta = 30^\circ$, $\rho_0 = 10^3$, $\text{Re} = 10^4$, $D_{01} = 10^{-2}$, $p_{00} = 10$, $w_1 = 0.1$. (В дальнейшем при описании результатов будут указываться только значения параметров, меняющихся по сравнению с данными выше.)

Видно, что траектории пузырьков вблизи начала координат существенно отличаются от линий тока жидкости. Кроме того, видно, что траектории пузырьков пересекаются. При уменьшении угла β этот эффект проявляется более резко, а при увеличении — вовсе исчезает. Объясняется это тем, что изменение $\text{grad } p_0$ вблизи вершины угла становится более резким при уменьшении угла β . Однако при увеличении угла увеличивается расстоя-

ние от вершины, на котором заметно перемещение пузырьков в сторону больших значений Ψ . При уменьшении скорости вдува толщина слоя пузырьков при отрицательных значениях x уменьшается приблизительно пропорционально скорости w_1 (сравнения проводились при $\beta = 30^\circ$), но ниже вершины угла отход пузырьков от стенки определяется уже полем градиента давления в окрестности вершины угла и слабо зависит от скорости вдува.

На фиг. 3 представлена картина течения для пузырьков большего размера ($D_{01} = 5 \cdot 10^{-2}$). Геометрический масштаб всей картины течения изме-



Фиг. 4

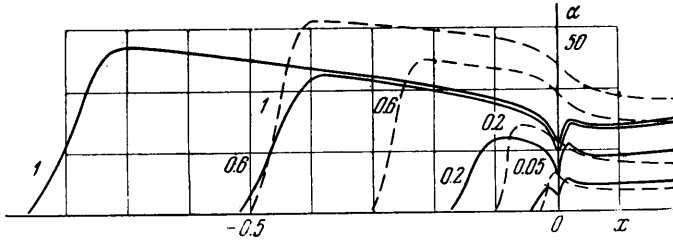
нился в несколько десятков раз. Это связано с тем, что здесь $k/\rho_0 < 1$ и, как было показано для $\beta = \pi/2$, движение пузырьков должно качественно отличаться от картины, представленной на фиг. 2. На фиг. 3 сплошной линией нанесена огибающая семейства траекторий (такой же вид она имеет и в остальных случаях, где имеет место пересечение траекторий пузырьков). Огибающая $M=0$ имеет точку возврата второго рода и две ветви. Таким образом, для решения задачи нужно рассматривать четыре потока пузырьков, причем область, где имеются пересечения линий тока пузырьков, заключена между двумя ветвями огибающей.

На фиг. 4, 5 представлены графики изменения функции α вдоль различных траекторий (числами указаны значения параметра r_0) в зависимости от x . Величина α вычислялась по формуле (2.6) на основании численного расчета траекторий пузырьков. Так как всюду в расчетах принималось $\alpha_{01} = 1$, то можно считать, что α есть отношение объемной концентрации газа в некоторой точке (r_0, t) и объемной концентрации в точке $(1, 0)$.

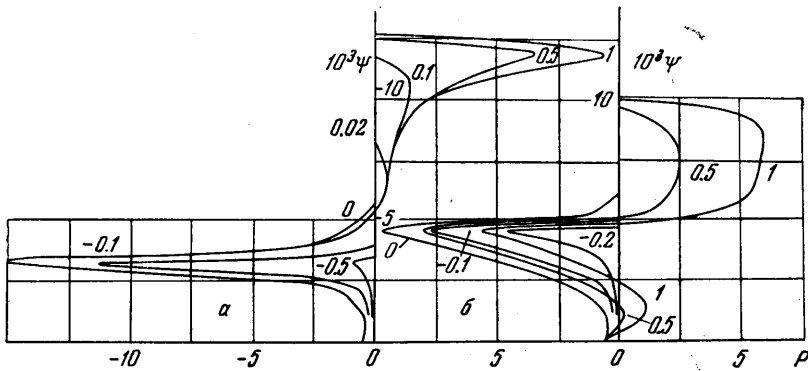
На фиг. 4 и 5 (штрихами) дано поле величины α для углов 30 и 60° соответственно. Резкое возрастание объемной концентрации указывает на то, что основной объем выпущенного газа скапливается в узкой зоне, простирающейся вдоль стенки. При уменьшении угла вблизи его вершины появляются резкие пики изменения объемной концентрации газа.

Если уменьшить скорость вдува пузырьков (уменьшить расход газа), то изменение объемной концентрации в зависимости от этого параметра в основном происходит вблизи вершины угла. В частности, при уменьшении скорости вдува вдвое по сравнению со случаем, изображенным на фиг. 4, амплитуда пика возрастает на порядок.

На фиг. 5 (сплошные линии) представлен случай $p_{00} = 1$, $\beta = 30^\circ$.



Фиг. 5



Фиг. 6

С увеличением размера пузырьков объемная концентрация газа уменьшается. Это объясняется тем, что газ в виде пузырьков располагается в большем объеме.

Вычисление возмущения полного давления в жидкости проводилось по формуле (3.7). Интеграл вычислялся методом Симсона, подынтегральное выражение получалось путем расчета траекторий пузырьков.

На фиг. 6, а, б даны графики функции $P(\Psi)$ для различных сечений $x = \text{const}$ (на графиках помечены соответствующие значения x) при углах 30 и 70° соответственно. Подробный анализ результатов показывает, что при взаимодействии пузырьков газа с жидкостью величина P уменьшается в областях, где имеется тормозящее воздействие пузырьков (можно судить об этом, зная скорости пузырьков относительно невозмущенного потока жидкости), и увеличивается там, где имеется ускоряющее воздействие. В чистой же жидкости полное давление P остается постоянным вдоль линий тока $\Psi = \text{const}$.

При меньших углах (фиг. 6, а) наблюдается более сильное изменение величины P , но зато при увеличении угла β (фиг. 6, б) по мере удаления вниз по течению от угла в большей области, чем на фиг. 6, а, возмущение полного давления является положительной величиной.

Наконец, по представленным кривым, можно судить о величине производной $\partial P / \partial \Psi$ и, следовательно, о завихренности потока [1].

6. Обсуждение результатов. При движении смеси жидкости и пузырьков газа происходит обмен энергией между этими двумя фазами. Выделим не-

которую область S , ограниченную контуром C . Для изменения кинетической энергии жидкости можно написать

$$\int_C (1 - \alpha) (V^2/2) (\mathbf{Vn}) dl = - \int_C (1 - \alpha) p (\mathbf{Vn}) dl + E_0 \quad (6.1)$$

Здесь E_0 — энергия, получаемая (или теряемая) внутри области S жидкостью в результате взаимодействия с пузырьками. (При этом в (6.1) не использовалось предположение о малости α .)

Считая объемную концентрацию малой и используя условие сохранения массы жидкости, получаем

$$E_0 = \int_C P (\mathbf{Vn}) dl \quad (6.2)$$

Пусть теперь контур C включает в себя стороны обтекаемого смесью угла (стенку), а также прямую, проведенную перпендикулярно стенке выше точки вдува пузырьков, и прямую $x = \xi = \text{const}$, где $\xi \geq 0$. Учитывая, что $P = 0$ в чистой жидкости при $y > y_1$ ($y_1(x)$ — уравнение самой верхней линии тока среды пузырьков), получим

$$E_0 = \int_0^{y_1} (PU)_{x=\xi} dy = I_\xi / (\gamma + 1), \quad I_\xi = \int_0^\infty P_{x=\xi} d\Psi \quad (6.3)$$

Величину I_ξ можно вычислить по приведенным выше зависимостям $P(\Psi)$.

Обозначим кинетическую энергию газа, вдуваемого за единицу времени через стенку в жидкость, K_0 , а ту же величину в сечении $x = \xi$ — через K_ξ . Тогда

$$\Delta K = K_\xi - K_0 = (w_1/2\rho_{01}) \int_0^1 (x^2 + y^2 - w^2) dr_0 \quad (6.4)$$

В знаменателе выражения (6.4) стоит большая величина ρ_{01} , поэтому изменение кинетической энергии газа ΔK (так же как и K_0) — величина маленькая.

Основным фактором, заставляющим пузырьки двигаться относительно жидкости, является наличие градиента давления. Можем определить потенциальную энергию этого силового поля, считая, что газ внутри пузырька расширяется (сжимается) изотермически и давление газа равно p_0

$$e = \frac{4}{3\pi} R_{01}^3 p_{01} \ln p_0 \quad (6.5)$$

В принятых предположениях потенциальная энергия нескольких пузырьков равна сумме выражений типа (6.5) для каждого пузырька. Тогда изменение потенциальной энергии пузырьков, проходящих в единицу времени через сечение $x = \xi$ по сравнению с первоначальным (т. е. на линии вдува), есть

$$\Delta E = E_H - E_\xi = w p_{01} \int_0^1 \ln p_0 / p_{0\xi} dr_0 \quad (6.6)$$

Если $p_{01} \rightarrow \infty$ (пузырьки несжимаемые), то

$$\Delta E = (w_1/2) \int_0^1 (r_\xi^{2\gamma} - r_0^{2\gamma}) dr_0 \quad (6.7)$$

В (6.6) и (6.7) r_{ξ} — расстояние от начала координат до точки пересечения линии $r_0 = \text{const}$ с линией $x = \xi$, а $p_{0\xi}$ — давление в этой точке.

В случае $\gamma = 0$ величина $\Delta E = 0$, контур C возьмем на бесконечном удалении от зоны вдува пузырьков. Так как в этом случае на бесконечности $p \rightarrow 0$, то величина E_0 есть возмущение кинетической энергии жидкости

$$E_0 = -\frac{\alpha_0}{\rho_0} \int_0^1 w dr_0 = -m, \quad \Delta K = \frac{\alpha_0}{2\rho_0} \int_0^1 w(1-w^2) dr_0$$

где m — массовый расход газа.

Величина E_0 всегда отрицательна, ΔK отрицательна, если $w > 1$ (скорость вдува больше скорости набегающего потока жидкости).

Для случая произвольного γ в таблице приведены значения некоторых величин в сечениях $\xi = 0, 0.5, 1$

	ξ	ΔE	$10^4 \Delta K$	E_0	y_0	y_1
I	0	-0.02793	0.0481	-0.0139	0	0.0140
	0.5	0.00218	0.391	-0.00192	0.0105	0.0127
	1	0.01428	0.500	0.00216	0.0092	0.0110
II	0	-0.02397	0.00425	-0.01407	0	0.0413
	0.5	0	0.2644	-0.0031	0.0007	0.0093
	1	0.0250	0.5205	0.01128	0.0005	0.0065
III	0	-0.0140	0.0404	-0.0101	0	0.0124
	0.5	0.0065	0.3985	-0.0007	0.0057	0.0090
	1	0.01732	0.5215	0.0051	0.0050	0.0078

Выше представлены данные для трех случаев:

$$I - \gamma = 1/5, p_{00} = 10, w_1 = 0.1, \quad II - \gamma = 1/3, \\ p_{00} = 10, w_1 = 0.1, \quad III - \gamma = 1/5, p_{00} = 1, w_1 = 0.1.$$

Здесь область, занятая смесью в сечении $x = \xi$, определяется неравенствами $y_0 \leq y \leq y_1$. Видно, что величиной ΔK по сравнению с ΔE и E_0 , как правило, можно пренебречь. Величины ΔE и E_0 меняются в зависимости от ξ качественно одинаково.

Сначала по мере движения пузырьков вдоль стенки к центру E_{ξ} увеличивается, ΔE отрицательно и, судя по E_0 , пузырьки отнимают энергию от жидкости. Далее при удалении пузырьков от вершины угла потенциальная энергия E_{ξ} убывает и при $\xi = 1$ во всех трех случаях ΔE положительно. Положительной становится и величина E_0 , значит здесь пузырьки передают энергию жидкости. Таким образом, присутствие в жидкости пузырьков приводит к появлению механизма превращения потенциальной энергии потока жидкости в кинетическую энергию этого потока.

Сравнивая данные, приведенные в случаях I и II, можно заключить, что при увеличении угла β потенциальная энергия меняется менее интенсивно вблизи угла и более интенсивно при удалении от него, что приводит к большему увеличению кинетической энергии жидкости в случае II по сравнению со случаем I. В случае III $p_{00} = 1$, следовательно, более существенно изменяется объем пузырьков при их движении. Это также приводит к более интенсивному изменению кинетической энергии, чем в случае I. Сказанное выше подтверждают следующие примеры: при углах $\beta = 15, 30, 45, 60, 70^\circ$ и $p_{00} = 10$ величина $I_1(I_{\xi}$ при $\xi = 1$) соответственно равна $-0.005, 0.002, 0.012, 0.015, 0.020$. При $p_{00} = 1, \beta = 30^\circ$ величина $I_1 = 0.006$.

Если увеличивать размеры пузырьков, I_1 уменьшается (при $D_{01} = 0.05$, $\beta = 30^\circ$ I_1 — величина отрицательная).

Проведем такое исследование, когда газ вдувается не из всей щели, а только из половины, причем из верхней (в) и нижней (Н) половин вдувается одинаковая масса газа. При $\beta = 30^\circ$ и работе только верхней половины щели $(I_1)_в = 0.0018$, а при работе нижней половины $(I_1)_н = 0.0046$, т. е. даже больше, чем в случае, когда вдув производится из всей щели. При $\beta = 70^\circ$ соответствующие величины равны 0.0031 и 0.0161.

Можно еще дать следующую качественную интерпретацию представленных выше результатов. Пусть изученное течение в угле реализуется при обтекании кормовой части некоторого профиля и при удалении от него монотонно переходит в поступательный поток со скоростью U_0 . Изменение полного давления P при взаимодействии с пузырьками в основном происходит вблизи кормы профиля. Поэтому будем приближенно считать, что профили $P(\Psi)$ при $x = 1$ и $x \rightarrow +\infty$ совпадают. Ошибка этого приближения тем меньше, чем меньше угол β . В каждом конкретном случае можно линейный размер l выбрать таким образом, что $P(\Psi)$ при $x \rightarrow +\infty$ в описанном выше приближении будет находиться с недостатком. Как и в случае течения вдоль плоской стенки на бесконечности, давление выравнивается и $P = u$. В этом случае величина I_1 связана с изменением количества движения жидкости формулой

$$\Delta K_0 = I_1 (v_0 / U_0)^2 \quad (6.8)$$

На основании (6.8), пользуясь значениями I_1 , представленными выше, можно провести качественное сравнение различных режимов вдува пузырьков.

Автор благодарен Г. Г. Черному за руководство и постоянное внимание к работе.

Поступила 14 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Прокофьев В. В. Движение смеси жидкости и газовых пузырьков с учетом их относительного перемещения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 3.
2. Бэтчелор Г. К. Волны сжатия в суспензии газовых пузырьков в жидкости. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1968, № 3.
3. Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред. ПММ, 1956, т. 20, вып. 2.