УДК 532.529.2

О ВОЗНИКНОВЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО ВРЕМЕНИ ВТОРИЧНЫХ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Г. С. МАРКМАН

(Ростов-на-Дону)

В работе [1] исследовано ветвление в задаче о стационарной конвекции. При этом использован метод Ляпунова — Шмидта. В данной работе с помощью этого же метода рассматривается рождение вторичных периодических по времени конвективных течений в задаче Рэлея (в слое вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами). Равновесный градиент температуры и напряженность поля силы тяжести предполагаются периодическими по времени с одним и тем же периодом T.

В случае положительного градиента температуры во все моменты времени с помощью результатов [1] доказано, что при значениях числа Рэлея, больших, но близких критическому, существует одно с точностью до сдвига вторичное периодическое течение. Это течение устойчиво относительно возмущений одинаковой с ним периодичности и четности.

В случае знакопеременного градиента температуры аналогичные факты устанавливаются с помощью численных расчетов. Однако в отличие от случая знакопостоянного градиента для определенных значений частоты модуляции вторичное течение существует при значениях числа Рэлея, меньших критического. Это течение оказывается неустойчивым. При достаточно больших частотах модуляции возникает сверхкритическое устойчивое вторичное течение.

1. Пусть внешняя сила, действующая на единицу массы жидкости, вертикальна и T периодически изменяется со временем по закону $g\Phi(t)$. Градиент температуры в равновесном режиме периодически (с тем же периодом T) зависит от времени и не зависит от высоты. Последнее предположение выполняется, когда в жидкости определенным образом распределены источники тепла. Оно имеет место также и при отсутствии источников тепла, если частота модуляции $\omega = 2\pi / T$ достаточно мала [2].

Система уравнений конвекции для функции тока ψ и температуры θ имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{\sqrt{p}}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi - \Delta\Delta\psi = R\Phi(t)\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{1}{p}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}\right)\\ \sqrt{p}\frac{\partial\theta}{\partial t} - \Delta\theta = Rc(t)\frac{\partial\psi}{\partial x} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь p и R^2 — числа Прандтля и Рэлея соответственно.

Будем разыскивать решения ψ, θ системы (1.1), периодические по x, z с периодами $2\pi / \alpha$, 2 такие, что ψ нечетна по x, z; θ четна по x и нечетна по z.

Чтобы зафиксировать аддитивную постоянную, предположим также, что

$$\int_{-2\pi/\alpha}^{2\pi/\alpha}\int_{-1}^{1}\psi dz\, dx = 0 \tag{1.2}$$

Система уравнений (1.1) сведена в [3] к операторному уравнению в специально выбранном пространстве пар функций $w = (\psi, \theta)$

$$Aw = RB(t)w + L(w, w)$$

$$Aw = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\partial}{\partial t} \Delta - \Delta\Delta & 0 \\ 0 & \sqrt{p} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \theta \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

$$B(t)w = \begin{pmatrix} 0 & \Phi \frac{\partial}{\partial x} \\ c \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \theta \end{pmatrix}$$

$$L(w_1, w_2) = -\begin{pmatrix} \frac{1}{p} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi_2}{\partial z} - \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial \Delta \psi_2}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial \theta_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Пусть критическое значение R_* числа Рэлея простое. Соответствующее ему T — периодическое по времени решение линеаризованного уравнения

$$Aw = RB(t)w \tag{1.4}$$

обозначим через $\varphi = (\psi_0, \theta_0)$.

Для исследования течений, ответвляющихся от состояния покоя $W_0 = (0, a)$, применим метод Ляпунова — Шмидта [4].

Уравнение (1.3) с помощью следующей замены приведем к виду

$$w = Rw_0 + u, \qquad u = (\psi, \theta) \tag{1.5}$$

$$Au - R_*B(t)u = \varepsilon^2 B(t)u + L(u, u), \qquad \varepsilon^2 = R - R_* \tag{1.6}$$

Решение уравнения (1.6) ищем в виде ряда

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k \tag{1.7}$$

Коэффициенты $u_1, u_2, \ldots$ определяются из уравнений

$$Au_k - R_*Bu_k = Bu_{k-2} + \sum_{r+s=k} L(u_r, u_s) \equiv f_k \tag{1.8}$$

При этом $u_k = 0$, если $k \leqslant 0$. Из (1.8) последовательно выводим

$$u_1 = \beta\varphi, \qquad u_2 = \beta^2 w_1 \tag{1.9}$$

Здесь w_1 — решение неоднородной задачи

$$Aw - R_*Bw = L(\varphi, \varphi) \tag{1.10}$$

Условие разрешимости для уравнения (1.10) выполнено

$$\int_0^T (L(\varphi, \varphi), w_*)_E dt = 0 \tag{1.11}$$

Скалярное произведение в (1.11) определено следующим образом:

$$(w, w')_E = ((\psi, \theta), (\psi', \theta'))_E = (\psi, \psi')_{L_2} + (\theta, \theta')_{L_2} \tag{1.12}$$

вектор-функция $w_* = (\psi_*, \theta_*)$ — решение сопряженной задачи

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\partial}{\partial t} \Delta\psi + \Delta\Delta\psi = -R_* c(t) \frac{\partial \theta}{\partial x}, \qquad \sqrt{p} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \Delta\theta = -R_* \Phi(t) \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{1.13}$$

Постоянная β определяется из условия разрешимости уравнения (1.8) при $k=3$

$$\int_0^T (f_3, w_*)_E dt = 0, \qquad f_3 = Bu_1 + L^\circ(u_1, u_2) \tag{1.14}$$

$$L^\circ(u_1, u_2) = L(u_1, u_2) + L(u_2, u_1)$$

Из (1.9), (1.14) выводим

$$\beta^2 = \left[R_* \int_0^T (L^\circ(\varphi, w_1), w_*)_E dt \right]^{-1} \tag{1.15}$$

Для обоснования метода Ляпунова — Шмидта достаточно показать, что постоянная β вещественна и отлична от нуля [4].

Тогда существует одно с точностью до сдвига [1], нетривиальное решение уравнения (1.3)

$$w = \beta\varepsilon\varphi + \beta^2\varepsilon^2 w_1 + O(\varepsilon^3), \qquad \varepsilon = \sqrt{R - R_*} \tag{1.16}$$

Для исследования вопроса об устойчивости этого решения составляем уравнение в вариациях

$$Au - R_* Bu - \varepsilon\beta L^\circ(\varphi, u) + \varepsilon^2\beta^2 L^\circ(w_1, u) + \ldots = -\sigma u \tag{1.17}$$

где опущены слагаемые, содержащие ε^3, ε^4 и т. д.

Как и в [5, 6], можно показать, что решение (1.16) будет устойчивым или неустойчивым в зависимости от того, в левой или в правой полуплоскости окажется собственное число σ_ε уравнения (1.17), возникающее из $\sigma_0 = 0$. Нетрудно вывести, что

$$\sigma_\varepsilon = -\zeta(R + R_*)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad \zeta = \left[R_* \int_0^T (\varphi, w_*)_E \, dt \right]^{-1} \tag{1.18}$$

Таким образом, течение (1.16) устойчиво по линейному приближению, если $\zeta(R - R_*) > 0$, и неустойчиво, если $\zeta(R - R_*) < 0$. С помощью результатов [7] можно показать, что имеет место и нелинейная устойчивость.

2. Случай знакопостоянных внешних сил. Пусть функция вибрации $\Phi(t)$ и равновесный градиент температуры $c(t)$ положительны во все моменты времени $t > 0$. Существование и простота критического числа Рэлея в этом случае доказаны в [3].

Теорема. Пусть $\Phi(t) > 0$, $c(t) > 0$. Тогда при $R > R_*$ и достаточно близких к R_* существует одно с точностью до сдвига периодическое по времени устойчивое решение системы (1.1)

$$\psi = \varepsilon\beta\psi_0 + \varepsilon^2\beta^2\psi_1 + O(\varepsilon^3), \qquad \theta = \varepsilon\beta\theta_0 + \varepsilon^2\beta^2\theta_1 + O(\varepsilon^3) \tag{2.1}$$

Доказательство. Решение системы (1.4) ищем в виде

$$\psi = \psi(t)\sin\alpha x \sin\pi z, \qquad \theta = \theta(t)\cos\alpha x \sin\pi z \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в уравнения системы (1.4), получим

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\frac{d\psi}{dt} + k^2\psi = R_*\frac{\alpha}{k^2}\psi\theta, \qquad \sqrt{p}\frac{d\theta}{dt} + k^2\theta = R_*\alpha c\psi$$

$$k^2 = \alpha^2 + \pi^2, \qquad \int_0^T \theta dt = 1 \tag{2.3}$$

Периодическое решение системы (2.3) существует и положительно [8]. Сопряженная система (1.13) допускает решение

$$\psi_* = \psi_*(t)\sin\alpha x \sin\pi z, \quad \theta_* = \theta_*(t)\cos\alpha x \sin\pi z \tag{2.4}$$

причем функции $\theta_*(t)$ и $\psi_*(t)$ положительны.

Решение $w_1 = (\psi_1, \theta_1)$ неоднородной системы

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi - \Delta\Delta\psi = R_*\Phi\frac{\partial\theta}{\partial x} \tag{2.5}$$

$$\sqrt{p}\frac{\partial\theta}{\partial t} - \Delta\theta = R_* c\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\pi\alpha}{2}\psi_0(t)\theta_0(t)\sin 2\pi z$$

ищем в виде

$$w_1 = \varphi_1(t)\sin 2\pi z \tag{2.6}$$

Здесь $\varphi_1(t) = (\psi_1(t), \theta_1(t))$ — T-периодическое решение системы

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\frac{d\psi_1}{dt} + 4\pi^2\psi_1 = 0, \qquad \sqrt{p}\frac{d\theta_1}{dt} + 4\pi^2\theta_1 = -\frac{\pi\alpha}{2}\psi_0\theta_0 \tag{2.7}$$

Легко видеть, что

$$\psi_1 = 0, \quad \theta_1 = -\frac{\pi\alpha}{2\sqrt{p}}e^{-\gamma t}\left[\int_0^t e^{\gamma\tau}\psi_0\theta_0\,d\tau + \frac{e^{-\gamma T}}{1-e^{-\gamma T}}\int_0^T e^{\gamma\tau}\psi_0\theta_0\,d\tau\right] < 0$$

$$(\gamma = 4\pi^2/\sqrt{p}) \tag{2.8}$$

Подставляя (2.2), (2.4) и (2.6) в (1.15), получим

$$\beta^2 = -\left[\pi^3 R_*\int_0^T \psi_0\theta_*\theta_1\,dt\right]^{-1} > 0 \tag{2.9}$$

Таким образом, существование нетривиального течения (2.1) доказано. Из (1.18), (2.2) и (2.4) выводим

$$\zeta = \frac{\alpha}{2R_*\pi}\left[\int_0^T \psi_0\psi_*\,dt + \int_0^T \theta_0\theta_*\,dt\right]^{-1} > 0 \tag{2.10}$$

Следовательно, вторичное течение устойчиво.

3. Случай знакопеременной внешней силы. Пусть градиент температуры $c = \mathrm{const}$, а функция $\Phi(t)$ задается равенством

$$\Phi(t) = 1 + \eta\sin\omega t \tag{3.1}$$

При $\eta > 1$ функция $\Phi(t)$ меняет знак и методы из п. 2, использующие положительность решения системы (2.3), неприменимы. Действительно, как видно из фиг. 1, функции $\psi(t)$ и $\theta(t)$ в этом случае меняют знак при изменении времени от 0 до T. (Зависимости $\theta(t)$ нанесены пунктиром).

Для выяснения знака интегралов, стоящих в правых частях равенств (1.15), (1.18), использован прямой численный расчет.

При этом применяется метод, предложенный в [9].

Система уравнений (2.3) сводится к одному уравнению [1]

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+k^2\frac{1+p}{\sqrt{p}}\frac{d\theta}{dt}+\left[k^4-\frac{\alpha^2}{k^2}R_*^2(1+\eta\sin\omega t)\right]\theta=0 \qquad (3.2)$$

решение которого ищется в виде ряда Фурье

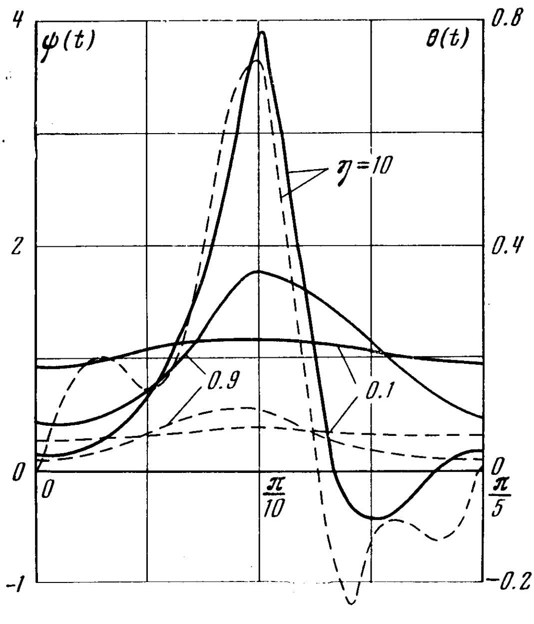
$$\theta=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\omega t} \qquad (3.3)$$

Коэффициенты c_n удовлетворяют бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$a_n c_n+c_{n-1}-c_{n+1}=0,\qquad n=0,\mp1,\mp2,\ldots \qquad (3.4)$$

$$a_n=\frac{2k^4(1+p)n\omega}{\sqrt{p}\,\alpha^2 R_*^2\eta}-i\frac{2k^2}{\alpha^2R_*^2\eta}\left(k^4-R_*^2\frac{\alpha^2}{k^2}-n^2\omega^2\right)$$

Решение системы (3.4) с $|c_n|\to0$ при $|n|\to\infty$ единственно с точностью до постоянного множителя и дается формулами



Фиг. 1

$$c_0=1,\ c_n=\rho_1\rho_2\ldots\rho_n\ (n>0),\quad c_n=(\rho_0\rho_1\ \ldots\ \rho_{n+1})^{-1}\ (n<0) \qquad (3.5)$$

$$\rho_n=-\cfrac{1}{a_n+\cfrac{1}{a_{n+1}+\ldots}}\quad (n>0)$$

$$\rho_n=a_{n-1}+\cfrac{1}{a_{n-2}+\cfrac{1}{a_{n-3}+\ldots}}\quad (n<0)$$

Функция тока $\psi(t)$ легко определяется теперь из второго уравнения системы (2.3). Аналогично находятся w_* и w_1.

Вычисления проводились для различных значений амплитуды и частоты. Далее обсуждается случай $\eta=10$. Заметим, что качественно картина сохраняется и при других $\eta>1$.

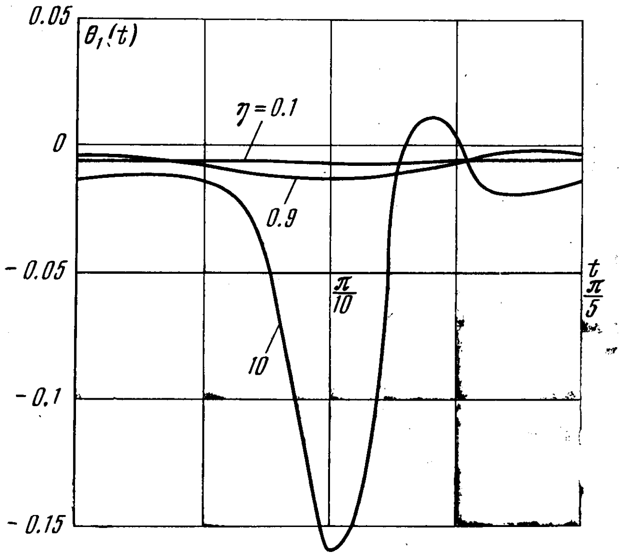
Вычисления показали, что $\zeta>0$ при всех значениях ω. Отсюда следует отсутствие присоединенных векторов [9], и тем самым доказана простота критического числа Рэлея.

---

[1] К этому же уравнению сводится система (2.3) в случае отсутствия вибрации, если градиент температуры имеет вид (3.1).

При $\omega < \omega_* = 141{,}2$ интеграл в (1.15) меньше нуля, следовательно, вторичное течение существует при малых, $R - R_* < 0$. В этом случае величина σ_ε больше нуля, т. е. ответвляющееся течение неустойчиво.

При $\omega > \omega_*$ рождается устойчивое сверхкритическое вторичное течение.



Фиг. 2

На фиг. 2 приведены результаты расчета $\theta_1(t)$ для тех же значений частоты и амплитуды модуляции, что и на фиг. 1 ($\omega = 10$, $\eta = 0.1$, 0.9, 10). Постоянная β при этих значениях η равна соответственно 0.13, 0.0196, -0.001286.

Поступила 6 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдович В. И. Свободная конвекция и ветвление. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О параметрическом возбуждении конвективной неустойчивости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
3. Маркман Г. С. О возникновении конвекции, периодической по времени. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 4.
4. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Методы Ляпунова — Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие. Усп. матем. н., 1962, т. 17, вып. 2 (104).
5. Юдович В. И. Пример потери устойчивости и рождения вторичного течения жидкости в замкнутом сосуде. Матем. сб., 1967, т. 74 (116), вып. 4.
6. Юдович В. И. Устойчивость конвекционных потоков. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
7. Юдович В. И. Об устойчивости вынужденных колебаний жидкости. Докл. АН СССР, 1970, т. 195, № 2.
8. Маркман Г. С. О неустойчивости равновесия жидкости, находящейся под действием вибрационных сил и периодического по времени градиента температуры. Сб. «Математический анализ и его приложения», т. 2, Изд-во Ростовск. ун-та, 1970.
9. Юдович В. И. Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.