

УДК 532.529

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ В СОПЛАХ

В. К. СТАРКОВ, Л. Е. СТЕРНИН, А. П. ТИШИН,
В. А. ХУДЯКОВ

(Москва)

В широком диапазоне концентраций и размеров частиц проведены расчеты одномерных двухфазных течений в соплах и установлено наличие максимума потерь удельного импульса из-за отставания частиц от газа по скорости и температуре. Полученные результаты сопоставлены с расчетами по линейризованной теории и с экспериментальными данными. Отмечается согласование расчетных и экспериментальных зависимостей.

Рассмотрено равновесное течение двухфазной смеси с отвердеванием жидких частиц. Установлено наличие области аномального течения, когда в рамках модели идеального одномерного равновесного стационарного потока в сопле для истечения в вакуум необходимо наличие двух последовательно расположенных минимальных сечений.

1. Пусть w — скорость, T — температура, p — давление, ρ — плотность, F — площадь, x и r — абсцисса и ордината контура сопла, отнесенные к радиусу минимального сечения r_m , W — отношение расхода частиц к расходу газа, R — газовая постоянная. Отметим параметры частиц индексом s . Одномерное течение смеси газа с частицами описывается уравнениями, приведенными в работе [1] с учетом ряда допущений, оговоренных в этой работе

$$\begin{aligned} \frac{dw_s}{dx} &= v \left(\frac{w}{w_s} - 1 \right), & \frac{dT_s}{dx} &= \tau \frac{T - T_s}{w_s} \\ c_p dT + w dw + W (c dT_s + w_s dw_s) &= 0 & (1.1) \\ \rho w dw + W \rho w dw_s + dp &= 0 \\ \rho w F &= \text{const}, & p &= \rho R T \end{aligned}$$

Здесь c_p и c — соответственно теплоемкость газа при постоянном давлении и теплоемкость частиц; множители v и τ вычисляются по формулам

$$v = \frac{9}{2} \frac{\mu r_m}{\rho_s r_s^2} f(\text{Re}, M), \quad \tau = \frac{3}{2} \frac{\text{Nu}}{\text{Pr}} \frac{c_p}{c} \frac{\mu r_m}{\rho_s r_s^2}$$

где μ — вязкость газа, r_s — радиус частицы, Nu , Pr — числа Нуссельта и Прандтля, $f(\text{Re}, M)$ — функция сопротивления, зависящая от числа Рейнольдса и Маха относительного движения частиц, ρ_s — плотность вещества частиц.

Система уравнений (1.1) определяет неизвестные w , w_s , T , T_s , p и ρ при заданном законе изменения контура сопла $r = r(x)$. При численном интегрировании системы (1.1) возникают трудности, связанные с тем, что решение этих уравнений имеет особенность типа седловой точки [2]. При проведении расчетов прохождение особой точки в сопле заданной геометрии (прямая задача) обеспечивалось за счет небольшой корректировки

множителя ν в малой окрестности этой точки, что является вполне допустимым, так как сама величина ν задается весьма условно [2].

Для расчета двухфазных потоков в соплах используются также методы линеаризации [3, 4] по параметрам, характеризующим отставание частиц от газа по скорости и температуре, когда решение ищется методом разложения в ряд. При этом нулевые члены разложения характеризуют равновесное течение смеси газа с частицами, а первые — течение с малыми отставаниями частиц от газа.

В работе [4] в квадратурах получены выражения для параметров потока. Например, выражения для скоростей газа и частиц, справедливые с точностью до вторых членов разложения, имеют вид

$$w = w_0 \left\{ 1 + \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2} \frac{\varepsilon W}{1 + W} \left[(\gamma - 2\eta\gamma - 1) \frac{d\lambda}{dx} - \frac{1 - \gamma\lambda^2}{\lambda^2} \frac{\kappa_e}{\kappa_e - 1} (\xi - \zeta) \right] \right\}, \quad w_e = w - \varepsilon w_0 \frac{d\lambda}{dx} \quad (1.2)$$

$$\xi = 2\gamma \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\lambda H(\lambda) d\lambda}{T^2(\lambda) dx/d\lambda}, \quad T(\lambda) = 1 - \gamma\lambda^2, \quad \gamma = \frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 1}$$

$$H(\lambda) = 1 + \gamma(2\eta - 1)\lambda^2, \quad \eta = \frac{c}{c_{pe}} \frac{\nu}{\tau}, \quad \varepsilon = \frac{a_*}{\nu r_m}, \quad \lambda = \frac{w_0}{a_*}$$

$$\xi = \xi_* - \frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e} [1 + \eta(\kappa_e - 1)] \left(\frac{d\lambda}{dx} \right)_*, \quad a_* = \sqrt{\frac{2\kappa_e R T_0}{(\kappa_e + 1)(1 + W)}}$$

где T_0 — температура торможения равновесного потока, градусом отмечаются параметры в начальном сечении сопла, звездочкой снизу — параметры в его минимальном сечении, индексом e — параметры равновесного течения, вычисляемые по известным соотношениям для одномерного адиабатического потока газа с видоизмененными свойствами [4].

Потери удельного импульса из-за двухфазности характеризуются величиной $\varphi = I/I_e$, где I — удельный импульс в пустоте с учетом отставания частиц, а I_e — удельный импульс в пустоте при равновесном течении. Величина φ определяется по формуле

$$\varphi = \left[\left(\frac{w}{w_e} + W \frac{w_e}{w_e} \right) \frac{\kappa_e M_e^2}{1 + W} + \frac{T_e}{T_e} \frac{w_e}{w} \right] (\kappa_e M_e^2 + 1)^{-1} \quad (1.3)$$

в которой все параметры вычисляются для выходного сечения сопла. Расчеты величины φ проводились по нелинеаризованной и линеаризованной теориям. При этом в первом случае выполнялось численное интегрирование системы (1.1), а во втором — параметры двухфазного потока определялись по конечным соотношениям типа (1.2).

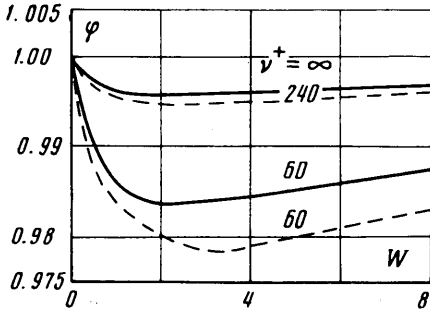
На фиг. 1 и 2 представлено результаты расчетов величины φ по нелинеаризованной и линеаризованной теориям при различных значениях W и ν для сопла с $r = 4.25$. При этом полагалось

$$\nu^+ = \nu l / r_m \sqrt{RT_0}, \quad \kappa = 1.4, \quad \nu / \tau = 1.5, \quad c / R = 3,$$

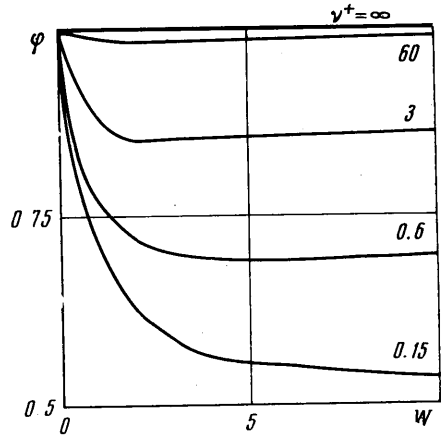
где l — длина сопла. Сплошные кривые соответствуют расчету по нелинеаризованной теории, пунктирные — расчету по линеаризованной теории.

Из рассмотрения этих графиков видно, что при определенном значении W следует минимум величины φ , причем этот минимум несколько смещается в сторону больших значений W при уменьшении величины v^+ .

Наличие минимума φ является очевидным следствием противоположного по характеру влияния на φ непосредственно величины W и отставания частиц от газа, уменьшающегося с ростом W . Уменьшение отставаний с ростом W для двумерных течений отмечено в работе [5].



Фиг. 1



Фиг. 2

Для сопла с бесконечной степенью расширения наличие минимума φ может быть получено чисто аналитически. Так, из уравнения энергии, записанного для неравновесного и равновесного течений, следует зависимость:

$$w_e = w \sqrt{(1 + Wk^2) (1 + W)^{-1}}$$

где $k = w_s / w$ — отношение скорости газа и частиц в выходном сечении сопла при неравновесном течении. Для этого случая величина φ определяется по формуле

$$\varphi = (1 + Wk) [(1 + W) (1 + Wk^2)]^{-1/2}$$

Исследование этой функции на экстремум по W приводит к условию $Wk = 1$, которое объясняет смещение максимума потерь из-за двухфазности (фиг. 2) в сторону больших значений W при уменьшении k , т. е. при уменьшении v^+ — величины, обратно пропорциональной квадрату радиуса частиц. Другими словами, с увеличением размера частиц максимум потерь из-за двухфазности смещается в сторону больших концентраций частиц в газе.

Рассмотрим также двухфазное течение, близкое к равновесному. Потери удельного импульса можно отождествить с уменьшением средней скорости истечения смеси из-за отставания частиц по скорости.

Из уравнения движения частицы в разгоняющемся потоке при стоксовском законе сопротивления следует:

$$w - w_s \sim dw_s / dt$$

При небольшом отставании частиц по скорости от газа их ускорение пропорционально величине скорости истечения и обратно пропорционально времени пребывания (разгона) в сопле. Последнее обратно пропорционально скорости истечения.

Таким образом

$$dw_s / dt \sim w_e^2$$

Поскольку равновесная скорость истечения пропорциональна корню квадратному из газовой постоянной смеси

$$R_e = R / (1 + W)$$

то

$$w_e \sim (1 + W)^{-1/2}, \quad dw_s / dt \sim (1 + W)^{-1}$$

Средняя скорость смеси при неравновесном течении

$$w_m = w - (w - w_s)W / (1 + W)$$

Если не учитывать влияние изменения скорости газа при неравновесном течении по сравнению с равновесной скоростью, то величина потерь

$$\varphi = \frac{w - w_m}{w_s} \approx \frac{w - w_s}{w_s} \frac{W}{1 + W} \sim \frac{W}{(1 + W)^{3/2}}$$

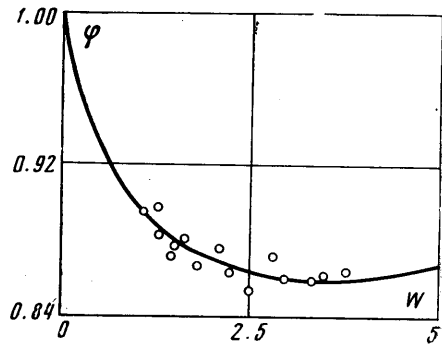
Максимум этого выражения имеет место при $W = 2$.

Существование максимума двухфазных потерь непосредственно следует и из линеаризованной теории. Действительно, выражение для φ с учетом соотношений (1.2) можно приближенно представить в виде

$$\varphi \approx \xi_1 + \xi_2 W(1 + W)^{-3/2}$$

где ξ_1 и ξ_2 — параметры, слабо зависящие от W . Минимум этого выражения достигается при $W = 2$, следовательно, величина φ является наименьшей вблизи значения $W = 2$.

Графики на фиг. 1 также показывают различие между расчетами по нелинеаризованной и линеаризованной теориям. Видно, что расхождение растет с уменьшением величины v^+ (увеличением размеров частиц). Это соответствует общим представлениям о применимости линеаризованной теории лишь в случае малых отставаний частиц от газа (небольшие размеры частиц). На фиг. 3 проведено сравнение теоретических и экспериментальных данных по потерям удельного импульса для конического сопла. В экспериментах в качестве рабочего тела использовалась смесь воздуха с частицами алюминия, средний диаметр которых составлял ~ 20 мкм. Из рассмотрения этого графика видно, что опытные точки согласуются с теоретической зависимостью потерь удельного импульса из-за двухфазности от концентрации частиц в потоке.



Фиг. 3

Таким образом, в результате проведенного исследования установлено существование максимума потерь удельного импульса из-за двухфазности при значениях $W \approx 2 \div 3$. Необходимо специально отметить, что на практике изменение W обычно сопровождается изменением молекулярного веса (состава) газовой фазы. Полученные результаты относятся к условиям течения газа постоянного состава при различном относительном расходе частиц.

2. При равновесном расширении потока газа, в котором имеются жидкие частицы, их температура в некотором сечении сопла может стать меньше температуры плавления; при этом дальнейшее расширение газа на некотором участке сопла будет происходить изотермически, пока теплота плавления частиц не будет полностью передана газу, а частицы не превратятся из жидких в твердые. В реальном случае, при наличии отставаний частиц от газа, протекание этого процесса может лимитироваться как ограниченностью скорости передачи тепла от частиц к газу, так и кинетикой процесса кристаллизации частиц [6].

Равновесное одномерное течение с отвердеванием частиц описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{m}_s &= \rho_s w F, & p &= \rho_s R_s T & (2.1) \\ \rho_s w dw + dp &= 0 \\ \frac{1}{2} w^2 + c_p T + W (\frac{1}{2} w^2 + i_i - z q_m) &= \text{const} \\ (\rho_s &= \rho(1 + W), & R_s &= R(1 + W)^{-1}, & z = W_s / W) \end{aligned}$$

где W_s — отношение расхода твердых частиц к расходу газа, i_i — энтальпия жидких частиц при температуре их плавления, q_m — теплота плавления. Входящая в эти уравнения температура T на участке отвердевания полагается постоянной и равной температуре плавления T_m .

Учитывая, что на участке отвердевания $c_p T = \text{const}$, последнее уравнение (2.1) можно представить в виде

$$w^2 - kz R_s T = \text{const} \quad (k = 2Wq_m (RT)^{-1}) \quad (2.2)$$

Рассмотрим случай, когда отвердевание частиц происходит на участке сопла, включающем в себя критическое сечение. (Другие случаи являются более простыми и исследуются аналогичным образом.) При этом первые три соотношения (2.1) и уравнение (2.2) удобно представить в безразмерном виде, отнеся размерные параметры к их значениям в критическом сечении

$$\rho^+ = \frac{\rho_s}{\rho_{s*}}, \quad p^+ = \frac{p}{p_*}, \quad \lambda = \frac{w}{a_*}, \quad F^+ = \frac{F}{F_*}$$

где $a_* = (R_s T)^{1/2}$ — критическая скорость изотермического потока.

Используя эти соотношения, получим

$$\rho^+ \lambda F^+ = 1 \quad (2.3)$$

$$p^+ = \rho^+ \quad (2.4)$$

$$\rho^+ \lambda d\lambda + dp^+ = 0 \quad (2.5)$$

$$\lambda^2 - kz = \lambda_i^2 \quad (2.6)$$

где λ_i^2 — приведенная скорость в сечении, в котором начинается отвердевание, т. е. где $z = 0$.

Из уравнений (2.3) — (2.6) имеем

$$\lambda^2 = 1 - 2 \ln \rho^+ \quad (2.7)$$

$$F^+ = (\lambda \exp(1 - \lambda^2) / 2)^{-1} \quad (2.8)$$

Отсюда следует, что при $\lambda = 1$ имеет место минимум площади проходного сечения сопла.

Из равенства (2.6) также следует, что в конце участка отвердевания ($z = 1$)

$$\lambda_h = \sqrt{\lambda_i^2 + 2Wq_m / RT}$$

Конечные соотношения (2.4), (2.6) — (2.8) определяют четыре неизвестные функции (p^+ , ρ^+ , λ и z) через относительную площадь проходного сечения F^+ и параметр λ_i (или F_i^+), зависящий от относительной температуры плавления частиц. Параметры, соответствующие концу участка отвердевания, определяются из условия $z = 1$.

В областях, расположенных до и после участка отвердевания, первые три уравнения (2.1) также справедливы, а в четвертом разность $i_i - zq_m$ следует заменить на cT , где c — удельная теплоемкость вещества частиц, находящихся в жидком или твердом состояниях. Кроме того, здесь температура не является постоянной.

На участке, предшествующем течению с отвердеванием, параметры потока удобнее относить к параметрам торможения. Введем обозначения

$$w^{*2} = \frac{w^2}{R_e T_0}, \quad p^* = \frac{p}{p_0}, \quad \rho^* = \frac{\rho_e}{\rho_{e0}}, \quad T^* = \frac{T}{T_0}$$

$$c_e = \frac{c_p + Wc_i}{1 + W}, \quad \kappa = \frac{c_e}{c_e - R_e}, \quad F^* = \frac{F}{F_i}$$

где c_i — теплоемкость жидких частиц.

После интегрирования уравнения количества движения приходим к системе, описывающей обычное равновесное течение двухфазной среды

$$T^* = 1 - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \omega^{*2}, \quad p^* = \rho^{**} = T^{*\kappa/(\kappa-1)} \quad (2.9)$$

$$F^* = \sqrt{\frac{1 - T_i^*}{1 - T^*}} \left(\frac{T_i}{T} \right)^{1/(\kappa-1)}$$

Четыре равенства (2.9) определяют неизвестные величины T^* , ρ^* , p^* и w^* как функции F^* и параметра $T_i^* = T_m / T_0$ — относительной температуры плавления.

Учитывая непрерывность параметров потока при переходе через сечение, в котором начинается отвердевание, получим

$$w_i^{*2} = T_i^* \lambda_i^2$$

или, используя первое соотношение (2.9), приходим к равенству

$$T_i^* = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \lambda_i^2 \right)^{-1} \quad (2.10)$$

Формула (2.10) позволяет по известной относительной температуре плавления T_i^* определить величину λ_i , соответствующую относительной площади сечения F_i^* , в котором начинается отвердевание.

Расчет течения после участка отвердевания производится также по формулам (2.10) с той лишь разницей, что здесь параметры течения относятся к соответствующим параметрам в конце участка отвердевания, а индекс i заменяется индексом k . Кроме того, вместо показателя адиабаты κ следует ввести величину κ_* , определяемую аналогично κ через c_e и R_e с заменой величины c_i на теплоемкость твердых частиц c_s .

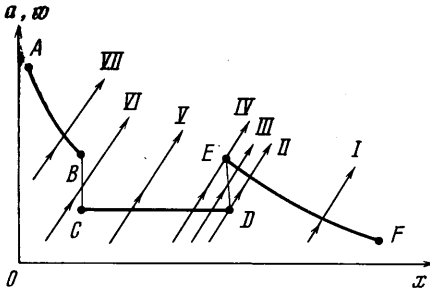
При переходе через сечения, являющиеся границами участков, производные параметров потока терпят разрыв. Так, равновесная скорость звука на участках течения без отвердевания определяется по формулам

$$a_{ei} = \sqrt{\kappa R_e T}, \quad a_{es} = \sqrt{\kappa_* R_e T}$$

а на участке отвердевания

$$a_{ei} = \sqrt{R_e T}$$

На фиг. 4 схематически показано изменение по длине сопла скорости звука (пунктирная линия) и скорости потока (сплошные линии). На участке AB текут жидкие частицы, на участке EF — твердые; отвердевание частиц происходит на участке CD . В зависимости от теплофизических свойств газа и частиц и температуры торможения возрастание скорости по длине сопла может происходить различно, причем во всех случаях критическое сечение совпадает с минимальным сечением сопла. Если температура торможения равна температуре плавления ($T_i^* = 1$) и отвердевание частиц завершилось до критического сечения, то рост скорости в сопле изображается линией I (фиг. 4). С увеличением температуры торможения (при постоянной температуре плавления); т. е. при падении величины T_i^* , изменение скорости течения по длине сопла соответствует последовательно расположенным линиям II , III , IV и т. д.



Фиг. 4

Линия V соответствует типичному случаю, когда переход через скорость звука происходит на участке отвердевания, линия VII — случаю, когда переход совершается на участке, где частицы находятся в жидком состоянии.

Линии II и IV ограничивают аномальную область, в которой истечение в вакуум из сопла с одним минимальным сечением в рамках модели идеально одномерного равновесного и стационарного потока не реализуется. Действительно, рассмотрим изменение скорости потока вдоль линии III . При ее пересечении с линией CD скорость становится сверхзвуковой, а при пересечении с линией DE — снова дозвуковой. Как известно, дозвуковой поток в расширяющейся части сопла не может ускоряться.

Поэтому в данном случае возможно лишь возникновение скачка уплотнения в сечении сопла, соответствующем концу участка отвердевания. Далее за этим сечением должно иметь место изотермическое дозвуковое течение с плавлением, а затем изэнтропическое равновесное дозвуковое течение. Оба этих течения сопровождаются повышением давления и, следовательно, могут быть реализованы при истечении в среду с достаточно высоким противодавлением. При условии монотонного изменения скорости по длине сопла истечение в вакуум возможно лишь при наличии в сопле двух минимумов площади проходного сечения сопла.

Следует отметить, что зона, ограниченная линиями II и IV , весьма узка и определяется неравенством, следующим из уравнения (2.6)

$$1 - k < \lambda_i^2 < \kappa_s - k$$

Это неравенство, используя соотношение (2.10), можно преобразовать к виду

$$\frac{2\kappa + k_0(\kappa - 1)}{3\kappa - 1} > T_i^* > \frac{2\kappa + k_0(\kappa - 1)}{2\kappa + \kappa_s(\kappa - 1)} \quad (2.11)$$

где $k_0 = 2Wq_m / RT_0$, κ — показатель адиабаты равновесного течения с жидкими частицами без отвердевания.

Из рассмотрения неравенства (2.11) следует, что область, ограниченная линиями II и IV , существует полностью, если $k_0 \leq 1$; например, при $k_0 = 0.5$, $\kappa = \kappa_s = 1.15$, $0.96 < T_i^* < 0.97$, т. е. значения T_i^* лежат в очень уз-

ком диапазоне; если $\kappa_s > k_0 > 1$, то существует только часть этой области, ограниченная с одной стороны линией IV. Если же $k_0 \geq \kappa_s$, то данная область отсутствует.

Максимальные изменения проходных сечений сопла в зоне, ограниченной линиями II и IV, определяются по формуле (2.8). Максимальное увеличение площади

$$F_1^+ = \left(\sqrt{\kappa_s} \exp \frac{1 - \kappa_s}{2} \right)^{-1}$$

а ее максимальное уменьшение

$$F_2^+ = \frac{1}{\sqrt{\kappa_s}} \left(\frac{\kappa_s + 1}{2} \right)^{1/(\kappa_s - 1)} \left(1 - \frac{\kappa_s - 1}{\kappa_s + 1} \frac{1}{2} \right)^{1/(\kappa_s - 1)}$$

Например, $F_1^+ = 1.005$, $F_2^+ = 0.995$ при $\kappa_s = 1.15$.

Таким образом, возможное изменение проходных сечений (в том числе и отличие минимальных сечений для сопла с двумя критическими сечениями) оказывается крайне незначительным.

Как следует из (2.8) и (2.11), переход через скорость звука происходит на участке отвердевания, если

$$\frac{2\kappa}{3\kappa - 1} \leq T_i^* \leq \frac{2\kappa + k_0(\kappa - 1)}{3\kappa - 1}$$

При

$$\frac{2}{\kappa + 1} \leq T_i^* < \frac{2\kappa}{3\kappa - 1}$$

отвердевание частиц начинается за минимальным сечением сопла (линия VI на фг. 4), а при $T_i^* < 2 / (\kappa + 1)$ — в расширяющейся части сопла.

Поступила 5 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Bailey W. S., Nilson E. N., Serra R. A., Zupnik T. F. Gas-particle flow in an axisymmetric nozzle. ARS Journal, 1961, vol. 31, No. 6, pp. 793—799. (Рус. перев.: Течение газа с твердыми частицами в осесимметричном сопле. Ракетн. техн., 1961, № 6.)
2. Hoglund R. F. Recent advances in gas-particle nozzle flows. ARS Journal, 1962, vol. 32, No. 5. (Рус. перев.: Последние достижения в исследовании течений газа с твердыми частицами в сопле. Ракетн. техн., 1962, № 5.)
3. Rannie W. D. A perturbation analysis of one-dimensional heterogeneous flow in rocket nozzles. In: Detonation and two-phase flow, N. Y., Acad. Press., 1962. (Рус. перев.: Исследование методом возмущений одномерного гетерогенного течения в ракетных соплах. Сб. «Детонация и двухфазное течение», М., «Мир», 1966, стр. 124—154.)
4. Стернин Л. Е. Экстремальные контуры сопел для потоков газов с отставанием частиц. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
5. Вережак Л. П., Галюн Н. С., Крайко А. Н., Стернин Л. Е. Результаты расчета методом характеристик течения газа с частицами в осесимметричных соплах и сравнение с результатами одномерного приближения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.
6. Тишин А. П., Худяков В. А., Костин В. Н. О задержке кристаллизации частиц конденсата в сопле реактивного двигателя. Изв. вузов, Авиац. техн., 1971, № 2.