

УДК 532.527

## УСТОЙЧИВОСТЬ ВИХРЕВЫХ ШНУРОВ

С. Я. ГЕРЦЕНШТЕЙН, А. М. ТЕРЕЩЕНКО

(Москва)

Рассмотрена задача о нелинейных колебаниях концентрированных вихрей. Для вихревого кольца и спиральной вихревой нити показан характер изменения формы и частоты колебаний с увеличением амплитуды. В случае стоячих волн решение получено в виде ряда по амплитуде возмущения с точностью до членов третьего порядка малости включительно. Для бегущих волн решение построено с помощью метода, аналогичного методу Стюарта.

Эта же задача решена с помощью непосредственного численного интегрирования исходных уравнений движения. Получены значения критических амплитуд, при которых происходит разрушение вихревого кольца. Показано, что вследствие нелинейности уравнений при решении задачи с начальными данными могут интенсивно выделяться высшие гармоники.

Для спиральной вихревой нити исследовано нелинейное взаимодействие возмущений и показано, в частности, что возмущение, устойчивое по линейной теории, в результате нелинейного взаимодействия с близкими возмущениями по длине волны и частоте может стать неустойчивым.

1. Если длина волны, наложенной на некоторый вихрь, много больше толщины этого вихря, то можно заменить исходный вихрь бесконечно тонким вихрем конечной интенсивности. Тогда уравнения, которые описывают изменения формы вихря, существенно упрощаются. Впервые эти уравнения были выведены Бетчовым [1].

Уравнения Бетчова выделены для квадрата кривизны кривой и ее кручения. Для численных расчетов более удобно преобразовать их в уравнения относительно кривизны нити  $K$  и ее кручения  $T$

$$K_t = -(T_t K - 2K_t T), \quad T_t = K^{-1} K_{tt} - K^{-2} K_{tt} K_t + K K_{tt} - 2T T_t \quad (1.1)$$

Система уравнений (1.1) выписана в безразмерном виде. В качестве характерного размера  $l^*$  выбран радиус вихревого кольца или вихревой спирали. В качестве характерного времени  $t^*$  выбрана величина  $t^* = l^{*2} / m$  ( $m = \Gamma |\ln \xi| / 4\pi$ ), где  $\xi$  — осредненный радиус, а  $\Gamma$  — интенсивность вихревой трубки.

Нетрудно видеть, что уравнения (1.1) допускают следующие простые решения:

$$K = 1, \quad T = 0 \quad (1.2)$$

$$K = 1, \quad T = T_0 = \text{const} \quad (1.3)$$

Выражение (1.2) соответствует вихревому кольцу, выражение (1.3) — вихревой спирали.

Рассмотрим слабо нелинейные стоячие колебания вихревого кольца. Решение уравнений (1.1) представим в следующем виде:

$$K(s, t) = 1 + K_1(s, t), \quad T(s, t) = T_1(s, t) \quad (1.4)$$

Вводя новую переменную  $\tau = vt$ , представим  $K_1(s, t)$ ,  $T_1(s, t)$  и  $v$  в виде ряда по степеням малого параметра  $A$

$$K_1(s, t) = AK^1 + A^2 K^2 + A^3 K^3 + \dots$$

$$T_1(s, t) = AT^1 + A^2T^2 + A^3T^3 + \dots$$

$$v = 1 + Av_1 + A^2v_2 + \dots$$

Подставив эти выражения в исходные уравнения, получим уравнения первого, второго и третьего приближений соответственно

$$K_\tau^1 = -T_s^1, \quad T_\tau^1 = K_{s..}^1 + K_s^1 \quad (1.5)$$

$$K_\tau^2 + T_s^2 = -(2K_s^1T + T_s^1K^1 + v_1K_\tau^1) \quad (1.6)$$

$$T_\tau^2 - (K_{s..}^2 + K_s^2) = -K^1K_{s..}^1 - K_{s..}^1K_s^1 + K^1K_s^1 - v_1T_s^1 - 2T^1T_s^1$$

$$K_\tau^3 + T_s^3 = -(v_2K_\tau^1 + 2K_s^1T_s^2 + 2K_s^2T^1 + T_s^1K_2 + T_s^2K^1)$$

$$T_\tau^3 - (K_{s..}^3 + K_s^3) = -(v_2T_\tau - 2T^1T_s^2 - 2T^2T_s^1 - K_{s..}^1K_s^2 - K_{s..}^2K_s^1 - K^1K_{s..}^2 - K^2K_{s..}^1 + K^1K_{s..}^3 + K^1K_s^2 + K^2K_s^1 + 2K^1K_{s..}^1K_s^1) \quad (1.7)$$

Решение уравнений (1.5) можно представить в виде

$$K^1 = \bar{K} \exp(i\lambda s + \sigma\tau), \quad T^1 = \bar{T} \exp(i\lambda s + \sigma\tau) \quad (1.8)$$

где  $\lambda$  — волновое число,  $\sigma$  — коэффициент усиления,  $\bar{K}$  и  $\bar{T}$  — постоянные.

Из условия существования ненулевого решения легко определить [2] параметр  $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$

$$\sigma = \lambda\sqrt{1 - \lambda^2} \quad (1.9)$$

Для вихревого кольца  $\lambda > 1$ , следовательно вихревое кольцо нейтрально устойчиво.

Рассмотрим периодические по  $s$  и ограниченные по  $\tau$  решения задачи. Нетрудно видеть, что при этом  $v_1 = 0$ .

Введем обозначения

$$-2K_s^1T^1 - T_s^1K^1 = P_{12}(\tau) \cos 2\lambda s + P_{10}(\tau)$$

Представим  $K^2$  в виде

$$K^2 = B_{22}(\tau) \cos 2\lambda s + D^2(\tau)$$

Тогда

$$T_s^2 = (P_{12} - B_{22}) \cos 2\lambda s, \quad D_\tau^2 = P_{10}(\tau)$$

Отсюда,

$$T^2 = (P_{12} - B_{22}) \sin 2\lambda s + F(\tau)$$

Подставив  $K^2$  и  $T^2$  во второе уравнение системы (1.6) и воспользовавшись условием периодичности решения по  $s$ , получим обыкновенные дифференциальные уравнения, которые определяют  $B_{22}(\tau)$  и  $F(\tau)$ .

Уравнения третьего приближения легко привести к следующему виду:

$$K_\tau^3 + T_s^3 = P_{31}(\tau) \sin \lambda s + P_{33}(\tau) \sin 3\lambda s$$

$$T_\tau^3 - (K_{s..}^3 - K_s^2) = Q_{31}(\tau) \cos \lambda s + Q_{33}(\tau) \cos 3\lambda s$$

Предположим, что

$$K^3 = B_{31}(\tau) \sin \lambda s + B_{33}(\tau) \sin 3\lambda s$$

Тогда

$$T_s^3 = P_{31} \sin \lambda s + P_{33} \sin 3\lambda s - B_{31}' \sin \lambda s - B_{33}' \sin 3\lambda s$$

Уравнения для определения неизвестных функций  $B_{31}$  и  $B_{33}$  получают-ся в результате подстановки  $K^3$  и  $T^3$  в уравнения третьего приближения и приравнивания нулю коэффициентов при  $\cos \lambda s$  и  $\cos 3\lambda s$ . Выпишем уравнение для  $B_{31}$

$$1/\lambda B_{31}'' + (\lambda^3 - \lambda)B_{31} = Q_{31} + P_{31}'/\lambda$$

Выражение для функции  $Q_{31} + P_{31}' / \lambda$  содержит слагаемое  $q_{31}(v_2) \times \times \cos \omega_1 \tau$ . Так как левая часть уравнения имеет вид  $1 / \lambda \{B_{31}'' + \omega_1^2 B_{31}\}$ , то  $q_{31}(v_2) = 0$ . Отсюда получим выражение для  $v_2$ . Опуская весьма громоздкие выкладки, приведем окончательный результат

$$v_2 = \frac{7\lambda^2 - 2\lambda^4 - 10}{32\lambda(\lambda^2 - 1)^{1/2}}$$

Таким образом, нелинейные эффекты приводят к увеличению периода колебаний вихревого кольца, так как  $\omega_1 \cong \omega_0(1 + v_2 A^2) < \omega_0$ .

Отметим также, что с увеличением волнового числа  $\lambda$  вклад нелинейных членов резко возрастает:  $v_2 \cong -1/16\lambda^2$ .

Данные выводы о влиянии нелинейности уравнений на характер колебаний вихревого кольца относятся к стоячим колебаниям

$$K \cong 1 + A \cos \omega \tau \sin \lambda s$$

2. Рассмотрим поведение возмущений, распространяющихся в виде бегущей волны:

$$\begin{aligned} K(s, t) &= K_{00} + 1/2 \{K_1(t) \exp [i\lambda s + i\omega t] + K_1^* \exp [-i\lambda s - i\omega t]\} + \\ &\quad + K_2 \exp 2(i\lambda s + i\omega t) + K_2^* \exp -2[i\lambda s + i\omega t] + \dots \\ T(s, t) &= T_{00} + 1/2 \{T_1 \exp [i\lambda s + i\omega t] + T_1^* \exp [-i\lambda s - i\omega t]\} + \\ &\quad + T_2 \exp 2[i\lambda s + i\omega t] + T_2^* \exp -2[i\lambda s + i\omega t] + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

Подставляя эти соотношения в уравнения (1.1), приравнявая коэффициенты при членах, содержащих первую гармонику, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} dK_1 / dt &= -[i\lambda T_1 + 3/2\lambda K_2 T_1 + i\omega K_1] \\ dT_1 / dt &= i\lambda T_1^* T_2 - i\omega T_1 + i(\lambda - \lambda^3) K_1 + 5/2\lambda^3 i K_1^* K_2 + \\ &\quad + 1/2\lambda K_1^* K_2 - 3/4\lambda^3 K_1^2 K_1^* \end{aligned} \quad (2.2)$$

Аналогично, собирая члены, содержащие вторую гармонику, будем иметь

$$\begin{aligned} dK_2 / dt &= 3/2 i\lambda K_1 T_1 + 2i\lambda T_2 + 2i\omega K_2 \\ dT_2 / dt &= -i\lambda T_1^2 + (2\lambda - 8\lambda^3) i K_2 + i\lambda^3 K_1^2 + 1/2 i\lambda K_1^2 - 2i\omega T_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из уравнения для нулевой гармоники следует, что  $K_{00}$  и  $T_{00}$  — постоянные. Пусть  $K_{00} = 1$ ,  $T_{00} = 0$ .

Решение (2.2) и (2.3) можно представить в виде

$$K_1 = A_1 \Psi_1 + A_{11} \Psi_{11}, \quad T_1 = A_1 \Phi_1 + A_{11} \Phi_{11}, \quad K_2 = A_1^2 \Psi_2, \quad T_2 = A_1^2 \Phi_2 \quad (2.4)$$

$$K_1^* = A_1^* \Psi_1 + A_{11}^* \Psi_{11}, \quad T_1^* = A_1^* \Phi_1 + A_{11}^* \Phi_{11}, \quad A_{11} = A_1^2 A_1^* \quad (2.5)$$

Здесь величины со звездочкой обозначают комплексносопряженные выражения. Считая функции  $\Phi_{11}$ ,  $\Psi_{11}$  медленно меняющимися функциями времени, подставляя (2.4) и (2.5) в уравнения (2.2), получим систему уравнений для  $A_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Psi_2$

$$\begin{aligned} \Psi_1 (dA_1 / dt) + i\omega A_{11} \Psi + i\lambda A_{11} + A_1^2 A_1^* g_1 &= 0 \quad (g_1 = 3/2 i\lambda \Phi_1 \Phi_2) \\ \Phi_1 (dA_1 / dt) + i\omega A_{11} \Phi_{11} + (\lambda^3 - \lambda) i A_{11} \Psi_{11} + A_1^2 A_1^* g_2 &= 0 \\ (g_2 = i\lambda \Phi_1 \Phi_2 - (5/2\lambda^3 + \lambda) i \Psi_1 \Psi_2 + 3/4 i\lambda^3 \Psi_1^3) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Аналогично, будем иметь

$$\begin{aligned} 2i\omega \Psi_2 + 2i\lambda \Phi_2 &= g_3 \quad (g_3 = -3i\lambda \Psi_1 \Phi_1) \\ (8\lambda^3 - 2\lambda) \Psi_2 + 2i\omega \Phi_2 &= g_4 \quad (g_4 = -i\lambda \Phi_1^2 + (\lambda^3 + 1/2\lambda) i \Psi_1^2) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Решая систему (2.7), определяем  $\Psi_2, \Phi_2$

$$\Psi_2 = 1/4(2 - \lambda^2)\lambda^{-2}, \quad \Phi_2 = 1/2(\lambda^2 - 1)^{1/2}(2\lambda^2 - 1)\lambda^{-2} \quad (2.8)$$

Из системы (2.6) следует:

$$\begin{aligned} \Psi_1 \frac{dA_1}{dt} + [i\omega \Psi_{11} + i\lambda \Phi_{11} + g_1] A_1^2 A_1^* &= 0 \\ \Phi_1 \frac{dA_1}{dt} + [i\omega \Phi_{11} + (\lambda - \lambda^3)i\Psi_{11} + g_2] A_1^2 A_1^* &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Представим  $g_1$  и  $g_2$  в следующем виде:

$$g_1 = k\Psi_1 + (g_1 - k\Psi_1), \quad g_2 = k\Phi_1 + (g_2 - k\Phi_1) \quad (2.10)$$

Постоянная  $k$  определяется из условия разрешимости системы

$$i\omega \Psi_{11} + i\Phi_{11} + (g_1 + k\Psi_1) = 0, \quad i\omega \Phi_{11} + (\lambda - \lambda^3)i\Psi_{11} + (g_2 - k\Phi_1) = 0 \quad (2.11)$$

Условие разрешимости запишется в виде

$$k = \left[ g_1 - \frac{\lambda}{\omega} g_2 \right] \left[ \Psi_1 - \frac{\lambda}{\omega} \right]^{-1}$$

Учитывая ранее полученные соотношения (2.6) и (2.8), получим

$$k = -3/4(\lambda^2 - 1)^{1/2}\lambda^{-1}i \quad (2.12)$$

Для нахождения амплитуды  $A_1$  используем первое уравнение системы (2.9)

$$dA_1 / dt + A_1^2 A_1^* k = 0 \quad (2.13)$$

Нетрудно видеть, что  $|A_1| = a = \text{const}$ . Тогда из уравнения (2.13) имеем

$$dA_1 / dt + ka^2 A_1 = 0 \quad (2.14)$$

Решением (2.14) будет

$$A_1 = \beta l^{i\gamma t}, \quad \gamma = \frac{3(\lambda^2 - 1)}{4\lambda(\lambda^2 - 1)^{1/2}} a^2$$

Следовательно, выражение для частоты колебаний имеет вид

$$\omega = \omega_0 + \frac{3(\lambda^2 - 1)}{4\lambda(\lambda^2 - 1)^{1/2}} a^2 \quad (2.15)$$

Таким образом, для возмущений, распространяющихся в виде бегущей волны, учет нелинейности уравнений приводит к увеличению частоты с увеличением амплитуды возмущений. Отметим, что в данном случае вклад нелинейных членов слабо зависит от волнового числа  $\lambda$ .

3. Рассмотрим устойчивость бегущей волны, распространяющейся по спиральной вихревой нити. Значение волнового числа  $\lambda$  выберем из области нейтрально устойчивых возмущений:  $\lambda > 1$ .

Следуя [3], покажем, что в результате взаимодействия основного колебания с близкими гармониками эти гармоники могут приходить во взаимный резонанс.

Амплитуды возмущающих гармоник при этом будут экспоненциально нарастать, т. е. основное состояние окажется неустойчивым.

Для дальнейшего исследования достаточно иметь решение типа бегущей волны с точностью до второго приближения

$$\begin{aligned} \bar{K} &= 1 + AK_1 \cos \zeta + A^2 K_2 \cos 2\zeta + \dots, \\ \bar{T} &= T_0 + AT_1 \cos \zeta + A_2 T_2 \cos 2\zeta + \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\zeta = \lambda s - \omega t, \quad K_2 = \frac{2 - \lambda^2}{4\lambda^2}, \quad T_2 = \frac{(\lambda^2 - 1)^{1/2}(1 - 2\lambda^2)}{2\lambda^2}$$

$$\omega = \lambda(\lambda^2 - 1)^{1/2}(1 + 3/4\lambda^{-1}A^2) + \dots \quad (3.2)$$

Допустим, что вводится возмущение, состоящее из двух гармонических волн, частоты и волновые числа которых даются соответственно выражениями

$$\lambda_i = \lambda(1 \pm \kappa), \quad \omega_i = \omega(1 + \delta) \quad (3.3)$$

Здесь  $\kappa, \delta$  считаются много меньшими единицы, а амплитуды наложенных волн считаются много меньшими  $A$ . Чтобы исследовать устойчивость волнового движения, описываемого соотношениями (3.1), (3.2), рассмотрим выражения

$$K = \bar{K} + l\bar{K}, \quad T = \bar{T} + l\bar{T} \quad (3.4)$$

Считая  $l$  малым числом, получим линеаризованные уравнения для  $\bar{K}, \bar{T}$

$$\bar{K}_t = -(\bar{K}\bar{T}_t + \bar{K}_t\bar{T} + 2T\bar{K}_s + 2\bar{K}_s\bar{T}) \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_t = -2\bar{T}_t\bar{T} - 2T\bar{T}_t + \bar{K}_s\bar{K} + \bar{K}\bar{K}_s + \bar{K}^{-2}(\bar{K}_{sss}\bar{K} + \bar{K}_{ss}\bar{K}_s - \bar{K}_{ss}\bar{K} - \bar{K}_{ss}\bar{K}) - \\ - 2\bar{K}^3\bar{K}_s(\bar{K}_{ss}\bar{K} - \bar{K}_{ss}\bar{K}_s) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Положим  $\bar{K} = \bar{K}_1 + \bar{K}_2$ , где

$$\bar{K}_i = \xi_i \cos \zeta_i + \lambda A \varepsilon_i \{A_i \cos(\zeta + \zeta_i) + B_i \cos(\zeta - \zeta_i)\} + O(\lambda^2 A^2 \xi_i) \quad (3.7)$$

$$\zeta_i = \lambda(1 \pm \kappa)S - \omega(1 \pm \delta)t - \gamma_i \quad (i = 1, 2)$$

Будем в дальнейшем считать  $\xi_i, \gamma_i$  медленно меняющимися функциями времени. Аналогично, функция кручения имеет вид:  $\bar{T} = \bar{T}_1 + \bar{T}_2$ , где

$$\begin{aligned} \bar{T}_i = \xi_i \alpha_i \cos \zeta_i + \xi_i N_i \sin \zeta_i + \xi_i \gamma_i M_i \cos \zeta_i + \lambda A \varepsilon_i \{C_i \cos(\zeta + \zeta_i) + \\ + D_i \cos(\zeta - \zeta_i)\} + \dots \end{aligned} \quad (3.8)$$

В результате подстановки соотношений (3.7), (3.8) в уравнение (3.6) получаются независимые уравнения для определения коэффициентов  $A_i, B_i, C_i, D_i$  и неизвестных функций  $\xi_i, \gamma_i$ . Выделяя в уравнениях все компоненты с аргументами  $\zeta + \zeta_i$ , т. е. с волновыми числами  $\lambda \pm \lambda_i$ , получим систему уравнений для  $A_i, B_i, C_i, D_i$ , приближенное решение которых, если пренебречь величинами  $O(\kappa, \delta)$ , имеет вид

$$A_{1,2} = \frac{2 - \lambda^2}{2\lambda^2}, \quad C_{1,2} = \frac{(\lambda^2 - 1)^{1/2}(1 - 2\lambda^2)}{\lambda^2} \quad (3.9)$$

$$B_{1,2} = \frac{\lambda^2 - 2}{2\lambda^3}, \quad D_{1,2} = -\frac{(\lambda^2 - 1)^{1/2}}{\lambda^3}$$

Выделяя в уравнениях возмущений компоненты с волновыми числами  $\lambda_i$ , после некоторых преобразований получим уравнения для  $\xi_i$

$$\dot{\xi}_i = \{A^2 X(\lambda) \sin \theta\} \xi_{2,1}, \quad X(\lambda) = \frac{\lambda^4 + 3\lambda^2 + 3}{4\lambda(\lambda^2 - 1)^{1/2}} \quad (3.10)$$

Решение системы (3.10) с начальными данными  $\xi_1(0)$ ,  $\xi_2(0)$  имеет вид

$$\varepsilon_{1,2}(t) = \xi_{1,2}(0) \operatorname{ch} \left\{ A^2 X \int_0^t \sin \theta dt \right\} + \xi_{2,1}(0) \operatorname{sh} \left\{ A^2 X \int_0^t \sin \theta dt \right\} \quad (3.11)$$

Аналогично получаются уравнения для  $\dot{\gamma}_i$

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_i}{dt} = & \frac{\lambda^2 D_i + {}^3/2 \lambda^2 T_1 A_i + \lambda^2 T_1 B_i + (\lambda_i^4 - \lambda_i^2) - (\omega_i - 2T_0 \lambda_i)^2}{2} + \\ & + X(\lambda) A^2 \cos \theta \frac{\varepsilon_{2,1}}{\varepsilon_i} + \\ & + \frac{\lambda(\lambda^2 T_1 (D_i + C_i) - \lambda^2 (B_i + A_i) - \lambda^4 B_i - 7\lambda^4 A_i + \lambda^3)}{2\lambda \sqrt{\lambda^2 - 1}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Складывая уравнения (3.12), после некоторых преобразований получим уравнение

$$\frac{d\theta}{dt} = A^2 X(\lambda) \left( 1 + \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2\xi_1 \xi_2} \cos \theta \right) - \delta^2 Y(\lambda), \quad Y(\lambda) = \frac{\lambda^2 (3 - 2\lambda^2)}{\lambda (\lambda^2 - 1)^{1/2}} \quad (3.13)$$

Пусть

$$\theta = \arccos \left( \frac{\delta^2 Y(\lambda)}{A^2 X(\lambda)} - 1 \right), \quad \xi_1(0) = \xi_2(0) \quad (3.14)$$

Если

$$\frac{\delta^2 Y(\lambda)}{A^2 X(\lambda)} > 0, \quad \left| \frac{\delta^2 Y(\lambda)}{A^2 X(\lambda)} - 1 \right| < 1 \quad (3.15)$$

то

$$\theta = \arccos \left( \frac{\delta^2 Y(\lambda)}{A^2 X(\lambda)} - 1 \right), \quad 0 < \theta < \pi$$

является решением (3.13). Неравенства (3.15) выполняются при достаточно малом  $\delta$ .

Из (3.11) следует, что при  $\theta = \text{const}$  амплитуды возмущений  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  экспоненциально нарастают. Можно показать [3], что решение уравнений (3.13), (3.10) с произвольными начальными данными дает при  $t \rightarrow \infty$  также экспоненциальный рост решений. Исключение составляет случай

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2, \quad Q(0) = \arccos \{ \delta^2 Y / A^2 X(\lambda) - 1 \}, \quad \pi < \theta(0) < 2\pi$$

Условия (3.15) выполняются, как это следует из вида функций  $X(\lambda)$ ,  $Y(\lambda)$  для  $1 < \lambda < ({}^3/2)^{1/2}$ .

Волновые числа, определяемые этим неравенством, лежат в области устойчивости. Таким образом, показано, что устойчивые по линейной теории возмущения могут оказаться неустойчивыми при рассмотрении нелинейных эффектов.

4. Проведенное выше исследование дает возможность судить о поведении возмущений с достаточно малой амплитудой. Представляет большой интерес проведение непосредственных численных расчетов. Расчет сводится к решению задачи Коши для системы нелинейных уравнений (1.1). Начальные условия выбраны в соответствии с линейной теорией

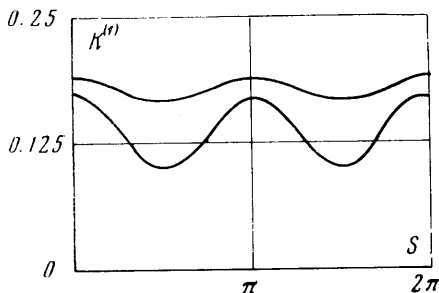
$$K(s, 0) = \bar{K} \sin \lambda s + 1, \quad T(s, 0) = 0$$

Решение задачи получено с помощью метода прямых. Производные по параметру представлялись соответствующими разностями и решение исходной системы нелинейных уравнений в частных производных сводилось к решению системы обыкновенных уравнений.

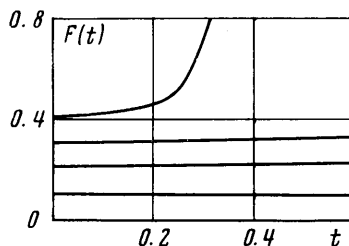
Учитывая результаты линейной теории, решение было представлено в следующем виде:

$$K(s, t) = 1 + \sin \lambda s K^1(s, t) \quad T(s, t) = \cos \lambda s T^1(s, t)$$

Это дало возможность существенно уменьшить число шагов интегрирования в методе прямых. Расчеты были проведены при разбиении интервала интегрирования по  $s$  на пять частей.



Фиг. 1



Фиг. 2

Проведенные численные расчеты подтвердили и несколько расширили результаты аналитического исследования. В частности, рассчитано изменение частоты колебаний, наложенных на вихревое кольцо, с увеличением амплитуды. При увеличении амплитуды колебаний до  $\bar{K} = 0.35$  значение частоты, полученной при счете, совпало с аналитическими результатами вплоть до третьей значащей цифры. Это совпадение показывает, что при аналитическом рассмотрении вклад членов порядка  $\bar{K}^4$  и выше несуществен.

Показан характер изменения формы колебаний с увеличением амплитуды. Учет нелинейных членов приводит к более сильному искривлению формы в отдельных местах вихревого кольца.

На фиг. 1 приведены результаты расчета при  $\lambda = 2$ ,  $K^1(s, 0) = 0.2$ ,  $T^1(s, 0) = 0$ . Верхняя кривая соответствует значению  $\tau = 0.1$ , нижняя — значению  $\tau = 0.3$ . На фиг. 1 отчетливо видно выделение второй гармоники. Расчеты показали, что при  $\bar{K} > 0.4$  амплитуда возмущения ( $\lambda = 2$ ) со временем не растет, а начиная с  $\bar{K} = 0.4$  амплитуда резко возрастает. Зависимость  $F(t) \equiv [K(s, t) - 1] / \cos \omega t$  от  $t$  при  $s = \pi/4$  показана на фиг. 2.

Отметим, что первоначально плоское вихревое кольцо превращается в пространственную фигуру. Амплитуда кручения нарастает интенсивнее, чем амплитуда кривизны.

Расчеты, проведенные при других волновых числах, указывают на уменьшение критической амплитуды разрушения. Например,  $\bar{K}^* = 0.08$  при  $\lambda = 3$ . Такое резкое уменьшение  $\bar{K}^*$  можно качественно объяснить тем, что с увеличением  $\lambda$  в уравнениях (1.1) резко увеличивается вклад нелинейных членов

$$R_1(s, t) \equiv -K^{-2} K_s K_{ss} - 2TT_s, \quad R_2(s, t) \equiv 2TK_s$$

Например, подстановка согласно линейной теории  $K = \bar{K} \sin \lambda s \cos \omega t$  дает, что при  $\lambda = 3$  выражение  $K_s K_{ss}$  примерно в четыре раза больше, чем при  $\lambda = 2$ .

Представляет интерес сравнение полученных результатов с экспериментальными исследованиями колебаний вихревых колец, проведенными в [4]. В работе [4] рассмотрены два случая:  $\lambda = 2$  и 3. Форма наблюдаемых колебаний достаточно хорошо согласуется с теоретическими данными. В [4] показано также начало разрушения вихревого кольца. Характерный размер возмущений при экспериментальном разрушении вихревого кольца примерно равен диаметру вихревой трубки. Данный факт хорошо согласуется с расчетами, которые показали, что крупномасштабные возмущения развиваются менее интенсивно, чем мелкомасштабные. Появление возмущений с характерным размером, меньшим, чем радиус вихревой трубки, не могло быть предсказано в рамках рассмотренных уравнений (1.1).

Авторы благодарят Г. И. Петрова за руководство работой, а также В. Я. Шкадова за внимание к работе.

Поступила 7 IV 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Betchov R. On the curvature and torsion of an isolated vortex filament. J. Fluid Mech., 1965, vol. 22, No. 3.
2. Ham a F. R. Progressive deformation of a curved vortex filament by its own induction. Phys. Fluids, 1962, No. 5.
3. Benjamin T. B., Feir I. E. The disintegration of wave trains on deep water. J. Fluid Mech., 1967, vol. 27.
4. Tutomu Kambe and Toshiharu Takao Motion of distorted vortex Rings. J. Phys. Soc. Japan, 1971, vol. 31, No. 2.