

УДК 532.5

**КАВИТАЦИОННОЕ ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНКИ В КАНАЛЕ
ПОТОКОМ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ**

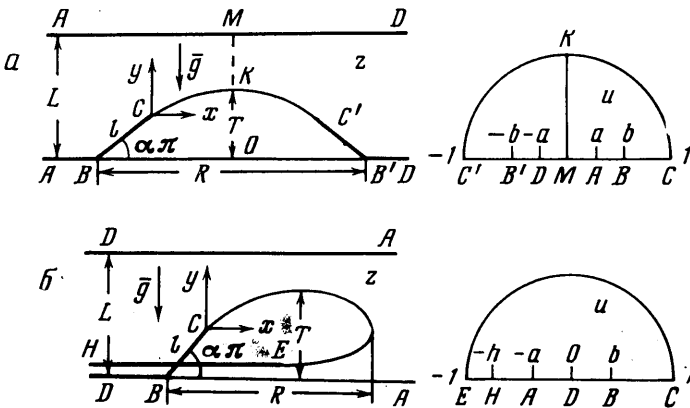
Л. М. КОТЛЯР, О. В. ТРОПОЛЬСКАЯ

(Казань)

Исследуется в точной постановке нелинейная задача о кавитационном обтекании потоком тяжелой жидкости пластинки, расположенной на горизонтальном дне канала, когда вектор силы тяжести направлен перпендикулярно стенкам канала. Рассматриваются две схемы течения — схема Рябушинского и схема Кузнецова [1].

В линейной постановке эта задача исследовалась в работе [2]. Для неограниченного потока подобные задачи рассматривались ранее в [3-7]. Ниже на основе метода, предложенного Биркгофом [8, 9], рассчитываются все основные гидродинамические и геометрические характеристики рассматриваемой задачи.

1. Пластинка BC, расположенная на дне канала ширины L и образующая с дном угол $\alpha\pi$, обтекается по схеме Рябушинского установившимся потоком идеальной тяжелой жидкости. Начало координат в плоскости $z = x + iy$ выбрано в точке C, ось абсцис параллельна стенкам канала. Сила тяжести направлена по оси ординат, причем считаем, что ускорение силы тяжести $g > 0$, если оно направлено вниз.



Фиг. 1

Для решения задачи введем параметрическое переменное u , изменяющееся в полукруге единичного радиуса ($|u| \leq 1, \text{Im } u \geq 0$), и будем искать функцию $z(u)$, отображающую область течения на область изменения u с соответствием точек, указанным на фиг. 1, а.

Легко построить производную комплексного потенциала скорости — функцию dw / du

$$\frac{dw}{du} = N \frac{1 - u^2}{(u^2 - a^2)(1 - u^2 a^2)} \tag{1.1}$$

где N — вещественная постоянная, a — координата точки A в плоскости переменного u .

Рассмотрим функцию

$$\zeta(u) = \frac{1}{V_c} \frac{dw}{dz} = \frac{V}{V_c} e^{-i\theta}$$

Здесь V — модуль вектора скорости, V_c — величина скорости в точке C , θ — угол наклона вектора скорости к оси абсцисс. В случае невесомой жидкости

$$\zeta(u) = \zeta_0(u) = \left(\frac{u^2 - b^2}{u^2 b^2 - 1} \right)^\alpha$$

(b — координата точки B в плоскости u). Для тяжелой жидкости $\zeta(u)$ будем искать в виде

$$\zeta(u) = \zeta_0(u) e^{i\Omega(u)} \quad \left(\Omega(u) = \Phi + i\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} C_n u^n \right) \quad (1.2)$$

Здесь $\Omega(u)$ — неизвестная регулярная в круге $|u| \leq 1$ функция, C_n — действительные коэффициенты. Очевидно, что в силу симметрии течения относительно вертикальной оси OM $C_{2k+1} = 0$ и, кроме того

$$\Omega(1) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k} = 0 \quad (1.3)$$

Из (1.1) и (1.2) найдем функцию dz/du

$$\frac{dz}{du} = \frac{N}{V_c} \frac{1-u^2}{(u^2-a^2)(1-a^2u^2)} \left(\frac{b^2u^2-1}{u^2-b^2} \right)^\alpha e^{-\Omega(u)} \quad (1.4)$$

Для решения задачи необходимо найти неизвестные параметры N , b , a и коэффициенты C_{2k} , входящие в формулы (1.1) — (1.4).

Определяя вычет функции $w(u)$ в точке A , найдем

$$L = \frac{N\pi}{V_\infty} \frac{1}{2a(1+a^2)} \quad (1.5)$$

Второе условие для определения параметров получим, задавая число кавитации Q

$$Q = \frac{2(P_\infty - P_0)}{\rho V_\infty^2} = \frac{V_c^2}{V_\infty^2} - 1 = \left(\frac{1-b^2a^2}{b^2-a^2} \right)^{2\alpha} \exp \left(-2 \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k} a^{2k} \right) - 1 \quad (1.6)$$

Здесь P_∞ — давление на бесконечности при $y=0$, P_0 — давление в каверне. Необходимо также задать отношение длины пластинки l к ширине канала L . Из (1.4) и (1.5) будем иметь

$$\frac{l}{L} = \frac{2a(1+a^2)V_\infty}{\pi V_c e^{c_0}} \lambda \quad (1.7)$$

$$\lambda = \int_b^1 \frac{1-u^2}{(u^2-a^2)(1-u^2a^2)} \left(\frac{1-u^2b^2}{u^2-b^2} \right)^\alpha \exp \left(- \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k} u^{2k} \right) du$$

Неизвестные коэффициенты C_{2k} найдем, используя уравнение Бернулли для свободной поверхности

$$V^2 + 2gy = V_c^2 \quad (1.8)$$

Полагая на свободной поверхности $u = e^{i\sigma}$, получим из (1.2)

$$\frac{V^2}{V_c^2} = \xi \bar{\xi} = e^{2\Phi(\sigma)} = \exp \left(2 \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k} \cos 2k\sigma \right) \quad (1.9)$$

где $\bar{\xi}$ — функция, комплексно-сопряженная ξ .

Из (1.4) с учетом (1.5) найдем координаты точек свободной поверхности

$$x(\sigma) = \frac{4a(1+a^2)V_{\infty}L}{\pi V_c} \int_0^{\sigma} \frac{\sin \sigma \cos[\chi(\sigma) - \Psi(\sigma)] e^{-\Phi(\sigma)}}{1 - 2a^2 \cos 2\sigma + a^4} d\sigma \quad (1.10)$$

$$y(\sigma) = \frac{4a(1+a^2)V_{\infty}L}{\pi V_c} \int_0^{\sigma} \frac{\sin \sigma \sin[\chi(\sigma) - \Psi(\sigma)] e^{-\Phi(\sigma)}}{1 - 2a^2 \cos 2\sigma + a^4} d\sigma$$

$$\left(\chi(\sigma) = \arg \bar{\xi}_0(\sigma) = \pi\alpha - 2\alpha \operatorname{arctg} \left(\frac{1+b^2}{1-b^2} \operatorname{tg} \sigma \right) \right)$$

Используя (1.9) и (1.10), запишем уравнение Бернулли для свободной поверхности

$$e^{2\Phi(\sigma)} = 1 - \frac{8ga(1+a^2)V_{\infty}L}{\pi V_c^3} \int_0^{\sigma} \frac{\sin \sigma \sin[\chi(\sigma) - \Psi(\sigma)] e^{-\Phi(\sigma)}}{1 - 2a^2 \cos 2\sigma + a^4} d\sigma \quad (1.11)$$

Дифференцируя последнее соотношение по σ , получим

$$\Phi'(\sigma) = - \frac{4ag(1+a^2)V_{\infty}^3L}{\operatorname{Fr} \pi V_c^3 l} \frac{\sin \sigma \sin[\chi(\sigma) - \Psi(\sigma)]}{1 - 2a^2 \cos 2\sigma + a^4} e^{-3\Phi(\sigma)} \quad (1.12)$$

где $\operatorname{Fr} = V_{\infty}^2 / gl$ — число Фруда.

Однозначная разрешимость уравнения (1.12) для достаточно больших чисел Фруда легко доказывается [9, 10].

Учитывая (1.7), из (1.12) найдем формулы для определения коэффициентов C_{2k} ($k = 1, 2, \dots$)

$$C_{2k} = \frac{4 \exp \left(2 \sum_{h=1}^{\infty} C_{2h} a^{2h} \right)}{k\pi \operatorname{Fr} \lambda} \times \\ \times \left(\frac{b^2 - a^2}{1 - a^2 b^2} \right)^{2\alpha} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \sigma \sin 2k\sigma \sin[\chi(\sigma) - \Psi(\sigma)]}{1 - 2a^2 \cos 2\sigma + a^4} e^{-3\Phi_1(\sigma)} d\sigma \quad (1.13) \\ \left(\Phi_1(\sigma) = \sum_{h=1}^{\infty} C_{2h} \cos 2h\sigma \right)$$

Вычисления проводятся следующим образом: задаются значения параметров b , a и числа Фруда Fr , из (1.13) итерационным методом определяются коэффициенты C_{2k} ($k = 1, 2, \dots$), причем за нулевое приближение выбирается решение для невесомой жидкости, т. е. $C_{2k}^{(0)} = 0$. Затем по формулам (1.6) и (1.7) с учетом условия (1.3) вычисляются Q и l/L .

Относительные размеры каверны находятся по формулам

$$\frac{R}{l} = 2 \cos \alpha \pi + \frac{4}{\lambda} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \sigma \cos[\chi(\sigma) - \Psi(\sigma)] e^{-\Phi_1(\sigma)}}{1 - 2a^2 \cos 2\sigma + a^4} d\sigma$$

$$\frac{T}{l} = \sin \alpha \pi + \frac{2}{\lambda} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \sigma \sin [\chi(\sigma) - \Psi(\sigma)] e^{-\Phi_1(\sigma)}}{1 - 2a^2 \cos 2\sigma + a^4} d\sigma$$

где R — длина каверны, T — ее ширина.

Сопротивление пластинки

$$X = \int_B^c (P - P_0) dy$$

Отсюда коэффициент сопротивления

$$C_x = \frac{2X}{\rho V_\infty^2 l \sin \alpha \pi} = 1 + Q + \frac{\sin \alpha \pi}{Fr} - \left(\frac{1 - a^2 b^2}{b^2 - a^2} \right)^{2\alpha} \times \\ \times \frac{\exp \left(-2 \sum_{h=1}^{\infty} C_{2h} a^{2h} \right)}{\lambda} \int_b^1 \frac{1 - u^2}{(u^2 - a^2)(1 - u^2 a^2)} \left(\frac{u^2 - b^2}{1 - u^2 b^2} \right)^\alpha \exp \left(\sum_{h=1}^{\infty} C_{2h} u^{2h} \right) du$$

2. Рассмотрим другую схему течения [1], согласно которой каверна заканчивается струйкой, переходящей на втором листе римановой поверхности в полубесконечную прямолинейную пластину, параллельную стенкам канала. Схема течения и соответствие точек в плоскостях z и u изображены на фиг. 1, б.

Для этого случая функции $(dw/du)(u)$ и $\zeta(u)$ будут иметь вид

$$\frac{dw}{du} = N \frac{1 - u^2}{u(u+a)(ua+1)} \quad (2.1)$$

$$\zeta(u) = \frac{1}{V_c} \frac{dw}{dz} = \left(\frac{u-b}{ub-1} \right)^\alpha \left(\frac{u+h}{uh+1} \right) e^{\alpha(u)} \quad (2.2)$$

где b , $-h$, $-a$ — координаты точек B , H и A соответственно в плоскости u .

Из (2.1) и (2.2) получим $z(u)$

$$z(u) = \frac{N}{V_c} \int_1^u \frac{1 - u^2}{u(u+a)(1+ua)} \left(\frac{ub-1}{u-b} \right)^\alpha \left(\frac{uh+1}{u+h} \right) \exp \left(-\sum_{n=0}^{\infty} C_n u^n \right) du \quad (2.3)$$

В формулы (2.1), (2.2) и (2.3) входят неизвестные параметры N , b , h и a и коэффициенты C_n , удовлетворяющие условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n = 0 \quad (2.4)$$

Определяя из (2.1) вычет функции $w(u)$ в точке D , найдем

$$L = N\pi / V_\infty a \quad (2.5)$$

Задание числа кавитации и отношения длины пластинки к ширине канала дают два условия для определения неизвестных параметров

$$Q = \frac{V_c^2}{V_\infty^2} - 1 = h^{-2} b^{-2\alpha} e^{-2c_0} - 1 \quad (2.6)$$

$$\frac{l}{L} = \frac{b^\alpha a h}{\pi} \lambda_1 \quad (2.7)$$

$$\lambda_1 = \int_b^1 \frac{1-u^2}{u(u+a)(1+ua)} \left(\frac{uh+1}{u+h} \right) \left(\frac{1-ub}{u-b} \right)^\alpha \exp \left(- \sum_{n=1}^{\infty} C_n u^n \right) du$$

Еще одно условие получим, приравнявая ширину канала на бесконечности слева и справа

$$b^\alpha h \left(\frac{1-ha}{h-a} \right) \left(\frac{1+ab}{a+b} \right)^\alpha \exp \left[- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n a^n \right] = 1$$

Из последнего равенства, обозначая

$$\frac{(a+b)^\alpha}{b^\alpha (1+ab)^\alpha} \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} C_n (-a)^n \right] = \gamma$$

будем иметь для нахождения h следующую формулу:

$$h = \frac{1-\gamma}{2a} + \frac{1}{2a} \sqrt{(1-\gamma)^2 + 4\gamma a^2} \quad (2.8)$$

Для определения неизвестной функции $\Omega(u)$ получается интегродифференциальное уравнение, аналогичное уравнению (1.12).

Коэффициенты C_n определяются из системы уравнений

$$C_n = \frac{4b^{2\alpha} h^2}{n\pi \text{Fr } \lambda_1} \int_0^\pi \frac{\sin \sigma \sin n\sigma \sin[\chi_1(\sigma) - \Psi(\sigma)]}{1 + 2a \cos \sigma + a^2} e^{-3\Phi_1(\sigma)} d\sigma \quad (2.9)$$

Здесь

$$(n = 1, 2, \dots)$$

$$\Phi_1(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos n\sigma$$

$$\chi_1(\sigma) = \alpha\pi - 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1-h}{1+h} \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \right) - 2\alpha \operatorname{arctg} \left(\frac{1+b}{1-b} \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \right)$$

Относительные размеры каверны найдем, используя (2.3)

$$\begin{aligned} \frac{R}{l} &= \cos \alpha\pi + \frac{2}{\lambda_1} \int_0^{\alpha_1} \frac{\sin \sigma \cos[\chi_1(\sigma) - \Psi(\sigma)]}{1 + 2a \cos \sigma + a^2} e^{-\Phi_1(\sigma)} d\sigma \\ \frac{T}{l} &= \sin \alpha\pi + \frac{2}{\lambda_1} \int_0^{\alpha_0} \frac{\sin \sigma \sin[\chi_1(\sigma) - \Psi(\sigma)]}{1 + 2a \cos \sigma + a^2} e^{-\Phi_1(\sigma)} d\sigma \end{aligned} \quad (2.10)$$

где σ_j ($j = 0, 1$) – корни следующих уравнений:

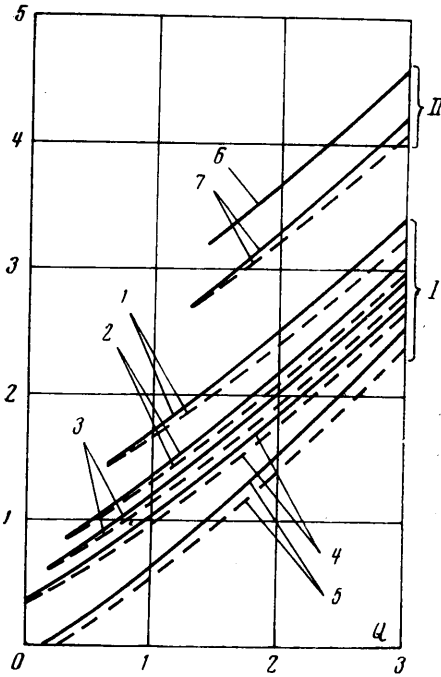
$$\arg \zeta(\sigma_j) = \Psi(\sigma_j) - \chi_1(\sigma_j) = j\pi / 2$$

Коэффициент сопротивления пластинки определяется по формуле

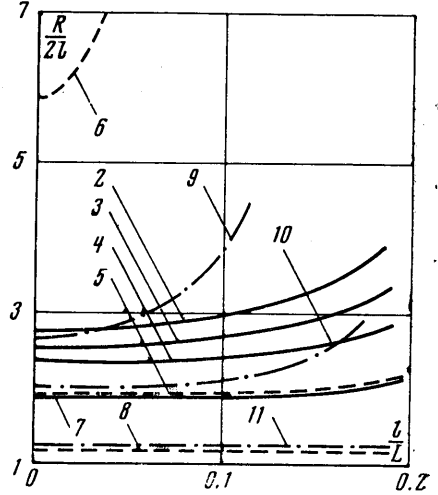
$$C_x = Q + 1 + \sin \alpha\pi / \text{Fr} - \frac{1}{b^{2\alpha} h^2 \lambda_1} \int_b^1 \frac{1-u^2}{u(u+a)(1+ua)} \left(\frac{u-b}{1-ub} \right)^\alpha \left(\frac{u+h}{1+uh} \right) \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n u^n \right) du$$

Расчеты для этого случая проводятся так же, как и для первой схемы, только к системе уравнений (2.9), (2.4) добавляется уравнение (2.8).

Некоторые результаты расчетов на ЭВМ представлены на фиг. 2—5. На фиг. 2 изображены зависимости коэффициента сопротивления пластинки C_x от числа кавитации Q при относительных глубинах ка-

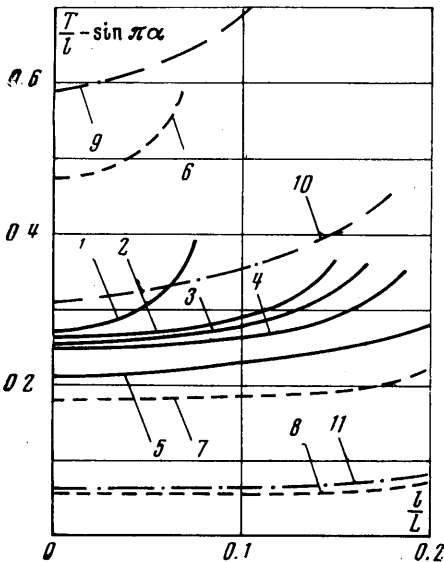


Фиг. 2

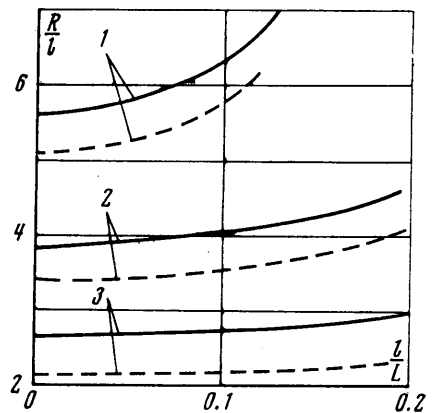


Фиг. 3

нала $l/L=0.1$ (сплошная линия) и $l/L=0.4$ (пунктирная линия) для $\alpha = 1/6$ и при различных числах Фруда (группа кривых I), кривые 1—5 вычислены для чисел Фруда $Fr = 1, 5, 50, -5, -1$, соответственно. На фиг. 2 также представлена зависимость $C_x(Q)$ при $Fr = 1$ для различных значений α . Как видно



Фиг. 4



Фиг. 5

из этих графиков, при $\alpha = 1/2$ (кривая б) коэффициент C_x практически один и тот же при различных отношениях l/L . С уменьшением угла α

влияние стенок на C_x оказывается заметным (кривые 7 и 1 вычислены для $\alpha = 1/3, 1/6$).

На фиг. 3, 4 изображены зависимости относительной длины и ширины каверны от l/L для различных чисел Фруда (кривые 1–5 вычислены для чисел $Fr = 1, 5, 50, -5, -1$ соответственно) при фиксированных $Q = 0.75$ и $\alpha = 1/6$. Кривые 6, 7, 8 показывают, как изменяются размеры каверны для различных Q ($Q = 0.5, 1.0, 2.0$ соответственно) и при $Fr = 5, \alpha = 1/6$. Цифрами 9, 10, 11 обозначены кривые $R/l(l/L)$ и $T/l(l/L)$ при $Fr = 1; Q = 2.0$ для некоторых значений α ($\alpha = 1/2, 1/3, 1/6$ соответственно).

Значения T/l , вычисленные по схемам Рябушинского и Кузнецова, при одних и тех же значениях α, Q, Fr и l/L совпадают. Значения R/l , как видно из фиг. 5, для схемы Рябушинского (сплошная линия) больше, чем для схемы Кузнецова (пунктирная линия), при одних и тех же значениях параметров на величину, близкую к $l \cos \lambda \alpha$. На фиг. 5 представлены зависимости $R/l(l/L)$, вычисленные для $\alpha = 1/6, Fr = 5$ и $Q = 0.75, 1.0, 1.5$ (соответственно кривые 1, 2, 3).

Отметим, что случай $l/L = 0$ соответствует обтеканию пластинки бесконечно глубоким потоком, а при $Fr = \infty$ (невесомая жидкость) результаты расчетов совпадают с результатами, приведенными в работе [4].

Поступила 7 II 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов А. В. Об одной схеме кавитационного обтекания. Тр. семинара по краевым задачам, вып. 1. Изд. Казанск. ун-та, 1964.
2. Старобинский В. Б. Отрывное обтекание тонкого клина потоком жидкости конечной глубины. Тр. Ленингр. ин-та водн. трансп., 1965, вып. 81.
3. Бутузов А. А. Об искусственном кавитационном течении за тонким клином, помещенным на нижнюю поверхность горизонтальной стенки. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 2.
4. Гузевский Л. Г. Кавитационное обтекание пластины в поперечном поле силы тяжести. ПМТФ, 1971, № 5.
5. Зуйков Ю. П., Шепеленко В. Н. Расчет плоских кавитационных течений в поперечном поле силы тяжести. Сб. «Материалы Всесоюзной конференции по краевым задачам», Изд. Казанск. ун-та, 1970.
6. Троепольская О. В. Об одной схеме кавитационного течения тяжелой жидкости. Изв. вузов, Математика, 1963, № 6.
7. Шепеленко В. Н. К расчету кавитационных течений. ПМТФ, 1968, № 5.
8. Birkhoff G., Zarantonello E. H. Jets, wakes and cavities. N. Y., Acad. Press., 1957. (Русск. перев.: Струи, следы, каверны. М., «Мир», 1964).
9. L e n a u C. W. A nonlinear theory for supercavitating flow past a wedge in a longitudinal gravity field. Dept. of C. E. Tech. Rept. No 28, Stanford Univ., 1963.
10. Котляр Л. М. О разрешимости одной струйной задачи тяжелой жидкости. Тр. Семинара по краевым задачам, вып. 5, Изд. Казанск. ун-та, 1968.
11. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.