

УДК 532.517.4

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА ПУЛЬСАЦИОННОЙ ЭНЕРГИИ В ТЕОРИИ ПРИСТЕНОЧНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Н. И. АКАТНОВ, В. Ф. ТУЛЬБЕРТ

(Ленинград)

Рассматривается турбулентное течение несжимаемой жидкости в плоском канале, круглой трубе и пограничном слое на плоской пластине. Система уравнений, описывающая движение жидкости, состоит из уравнений Рейнольдса и уравнения баланса средней кинетической энергии турбулентных пульсаций. На основании анализа опытных данных формулируются гипотезы относительно кинематического коэффициента турбулентной вязкости ϵ и длины l , входящей в выражение для удельной диссипации турбулентной энергии в тепло.

Считается, что в центральной (внешней) части потока в канале ϵ и l постоянны и для них приняты выражения, использовавшиеся для свободного пограничного слоя, а в пристенной области l изменяется по линейному закону, а ϵ — по закону, близкому к линейному. Результаты расчетов распределения пульсационной энергии, средней скорости и коэффициента сопротивления хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными. Значения двух эмпирических коэффициентов, входящих в систему уравнений, вследствие введения гипотез оказываются близкими к полученным для свободного пограничного слоя.

1. Рассмотрим турбулентное течение несжимаемой жидкости в прямой круглой трубе радиуса R и плоском канале высотой $2h$. Начало прямоугольной системы координат x, y, z расположим на стенке трубы (канала), ось x направим вдоль стенки вниз по течению. Проекция вектора осредненной скорости на оси x, y, z обозначим соответственно u, v, w , а проекции вектора пульсационной скорости — u', v', w' . Предполагаем, что осредненное движение установившееся. В этом случае от нуля отлична лишь одна проекция осредненной скорости u и все характеристики потока зависят от единственной координаты y — расстояния от стенки трубы (канала).

Воспользуемся классической двухслойной схемой течения и будем считать, что у стенок существует тонкий ламинарный подслой [1], в формировании которого основную роль играют вязкие силы, а за его пределами лежит область турбулентного течения, характеристики которой от вязкости не зависят.

Для описания течения жидкости в турбулентной области используем уравнение Рейнольдса [1] в проекции на ось x

$$\frac{1}{(y-R)^k} \frac{d}{dy} [(y-R)^k \langle u'v' \rangle] = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \quad (1.1)$$

и уравнение баланса средней кинетической энергии турбулентных пульсаций [2], которое для установившегося течения несжимаемой жидкости в отсутствие внешних сил имеет вид

$$\frac{1}{(y-R)^k} \frac{d}{dy} \left[(y-R)^k \left\langle v' \left(\frac{p'}{\rho} + b' \right) \right\rangle \right] + \langle u'v' \rangle \frac{du}{dy} + W = 0 \quad (1.2)$$

$$(b' = 1/2(u'^2 + v'^2 + w'^2))$$

В записанных уравнениях $k=0$ соответствует плоскому течению, $k=1$ — течению в круглой трубе, p' — пульсационная составляющая давления, ρ — плотность жидкости, W — удельная диссипация пульсационной энергии в тепло.

Для замыкания исходной системы уравнений (1.1) и (1.2) примем следующие выражения [2]:

$$\begin{aligned} \tau &= -\rho \langle u'v' \rangle = \rho \varepsilon (du/dy) \\ - \left\langle v' \left(\frac{p'}{\rho} + b' \right) \right\rangle &= \varepsilon \frac{db}{dy}, \quad W = c \frac{b \sqrt{b}}{l} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $\varepsilon = \varepsilon(y)$ — кинематический коэффициент турбулентной вязкости, $b = 1/2 \langle u'^2 + v'^2 + w'^2 \rangle$ — средняя кинетическая энергия пульсационного движения единицы массы жидкости, $l = l(y)$ — некоторая длина, c — эмпирический коэффициент.

Чтобы сформулировать гипотезы относительно $\varepsilon(y)$ и $l(y)$, используем некоторые известные из опытов факты. Экспериментальные исследования турбулентных течений в трубках [3], плоских каналах [4] и в пограничном слое на пластине [5] показывают, что изменение формы кривых $b(y)/v_*^2$ (v_* — динамическая скорость) с изменением числа Рейнольдса лежит в пределах разброса опытных данных, а отношение b_m/v_*^2 (b_m — максимальное значение b , имеющее место вблизи границы ламинарного подслоя) для всех этих течений оказывается примерно одинаковым. Отсюда заключаем [4], что распределение $b(y)/v_*^2$ от числа Рейнольдса не зависит. Этот факт, как допущение, положим в основу последующих гипотез. Обработка экспериментальных профилей скорости турбулентного течения в трубах [6] показывает, что коэффициент турбулентной вязкости в пристеночной области $0 \leq y \leq (0.2 \div 0.3)R$ возрастает по закону, близкому к линейному, а в центральной части трубы остается почти постоянной величиной. Учитывая это, считаем, что в центральной (внешней) части потока в канале $\varepsilon = \varepsilon_b = \text{const}$ и примем для ε в этой области формулу, использовавшуюся [7] для свободного пограничного слоя

$$\varepsilon = \varepsilon_b = aL(\sqrt{b})_{cp} = aL \frac{1}{L} \int_0^L \sqrt{b} dy = a \int_0^L \sqrt{b} dy \quad (1.4)$$

Здесь a — эмпирический коэффициент, $L = y_2 - y_1$, y_1 и y_2 — координаты y точек, в которых скорость u принимает значения $0.1 u_{\max}$ и $0.9 u_{\max}$ (u_{\max} — максимальная скорость потока). Поскольку u_1 в данном случае имеет порядок толщины ламинарного подслоя, то можно принять $y_1 = 0$.

Выражение для ε в пристеночной области можно записать в виде, аналогичном (1.4):

$$\varepsilon = \varepsilon_n = a \int_0^{L_1} \sqrt{b} dy \quad (1.5)$$

При этом в соответствии с классической гипотезой Прандтля используется допущение о линейном росте длины L_1 в пристеночной области, т. е. $L_1 = Ay$, где $A = \text{const}$. В непосредственной близости от стенки (1.5) дает

$$\varepsilon_n = a \sqrt{b_m} Ay \quad (1.6)$$

Сравнивая (1.6) с выражением для ε , следующим из формулы Прандтля

$$\varepsilon = \varepsilon_n = \kappa v_* y \quad (\kappa = \text{const}) \quad (1.7)$$

получим

$$A = \frac{\kappa}{a} \frac{v_*}{\sqrt{b_m}};$$

границу пристеночной области y_e для ε найдем из условия $L_1 = Ay_e = y_2$.

Аналогично для течения в круглой трубе используется формула для ε , применявшаяся [7] для осесимметричного свободного пограничного слоя

$$\varepsilon = \frac{2a}{2R - L_1} \int_0^{L_1} \sqrt{b} (R - y) dy \quad (1.8)$$

где $L_1 = Ay$ при $0 \leq y \leq y_e$ и $L_1 = y_2$ при $y > y_e$ (A и y_e определены здесь так же, как и для плоского канала).

Относительно длины $l(y)$ сделаем допущение, что в центральной части канала при $y_l < y \leq h$, $l = l_b = \text{const}$, а в пристеночной области ($0 \leq y \leq y_l$)

$$l = l_n = By \quad (B = \text{const}) \quad (1.9)$$

Для центральной области течения в канале и трубе примем соответственно [7]

$$l_b = \int_0^{2h} \left(\frac{b}{b_m} \right)^{1/2} dy, \quad l_b = \left[8 \int_0^R \left(\frac{b}{b_m} \right)^{1/2} (R - y) dy \right]^{1/2} \quad (1.10)$$

Коэффициент B в (1.9) определим следующим образом. Умножив уравнение баланса пульсационной энергии (1.2) на ε , рассмотрим получившееся уравнение при $y \rightarrow 0$, имея при этом в виду, что $\varepsilon \rightarrow 0$; $b \rightarrow b_m$, $\varepsilon du / dy \rightarrow \tau_w / \rho = v_*^2$ при $y \rightarrow 0$.

Тогда

$$v_*^4 - caAb_m^2 / B = 0 \quad (1.11)$$

откуда

$$B = caAb_m^2 / v_*^4 = c\kappa b_m \sqrt{b_m} / v_*^3 \quad (1.12)$$

Граница пристеночной области для $l(y)$ определяется из условия $y_l = l_b / B$.

Все коэффициенты, входящие в составленную систему уравнений и гипотез, будут определены, если заданы величины a , c , κ и b_m / v_*^2 . Кроме того, поскольку применяется двухслойная модель, необходимо задать также коэффициент α , входящий в определение толщины ламинарного подслоя.

2. Рассмотрим основные этапы решения задачи о течении жидкости в круглой трубе. Проинтегрировав по y уравнение (1.1) и учитывая, что $du / dy = 0$ при $y = R$, получим

$$\varepsilon \frac{du}{dy} = - \frac{y - R}{R} v_*^2 \quad (2.1)$$

Подставляя в уравнение (1.2) выражения (1.3) и используя (2.1), приведем это уравнение к виду

$$\frac{\varepsilon}{y - R} \frac{d}{dy} \left[(y - R) \varepsilon \frac{db}{dy} \right] + \frac{(y - R)^2}{R^2} v_*^4 - \frac{c\varepsilon b \sqrt{b}}{l} = 0 \quad (2.2)$$

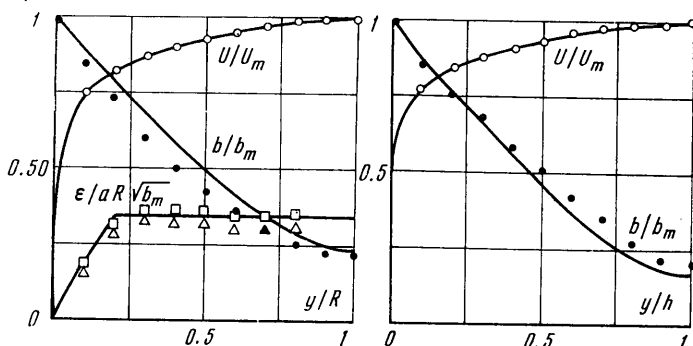
Введем в рассмотрение следующие безразмерные величины:

$$y' = \frac{y}{R}, \quad b' = \frac{b}{b_m}, \quad l' = \frac{l}{BR}, \quad \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{aR\sqrt{b_m}} \quad (2.3)$$

и, подставляя (2.3) в (2.2), найдем

$$\left(a \frac{b_m}{v_*^2} \right)^2 \frac{\varepsilon'}{1-y'} \frac{d}{dy'} \left[(1-y') \varepsilon' \frac{db'}{dy'} \right] - \frac{ca}{B} \frac{b_m^2}{v_*^4} \frac{\varepsilon' b' \sqrt{b'}}{l'} + (1-y')^2 = 0 \quad (2.4)$$

Поскольку распределение величины b' предполагается не зависящим от числа Рейнольдса, то граничные условия для b' можно перенести с



Фиг. 1

верхней границы ламинарного подслоя на стенку трубы и записать их тогда в виде

$$b' = 1 \quad \text{при } y' = 0, \quad db' / dy' = 0 \quad \text{при } y' = 1 \quad (2.5)$$

Как указывалось выше, чтобы уравнение (2.4) можно было интегрировать, необходимо кроме известных величин κ и b_m / v_*^2 задать постоянные a и c . При проведении расчетов в данном случае фактически подбирались величины y_e' и y_i' , дающие наилучшее согласие с экспериментом, а далее по найденным y_e' и y_i' находились a и c .

Как показывают опыты [8], для профилей осредненной скорости в круглых трубах в интервале чисел Рейнольдса от $4 \cdot 10^3$ до $3 \cdot 10^6$ величина y_2 / R изменяется от 0.5 до 0.3. В плоском канале [4] величина y_2 / h находится в тех же пределах. В настоящей работе для упрощения расчетов принималось $y_2 / R = y_2 / h = 0.4$. Поскольку, как отмечалось ранее, нарастание ε в пристеночной области происходит до значений $y_e = (0.2 \div 0.3) R$, здесь принималось, что $y_e = 0.2 R$, т. е. $A = 2$.

Сделав указанные допущения, используя экспериментальные значения b_m / v_*^2 и принимая $\kappa = 0.4$, можно определить все числовые коэффициенты в уравнении (2.4). В этом уравнении $l' = l_n' = y'$ при $0 \leq y' \leq y_i'$ и $l' = l_b' = y_i'$ при $y_i' \leq y' \leq s$. Значение y_i' подбиралось по согласованию вычисленных кривых $b(y) / b_m$ с экспериментальными. Наилучшее соответствие отмечалось при значениях y_i' , близких к y_e' (в работе полагалось $y_i' = y_e'$). После интегрирования уравнения (2.4) можно определить значение l_b и далее, воспользовавшись тем, что $l_b' = l_b / BR = y_i' = y_i / R$, определить коэффициент B , а из (1.12) — постоянную c .

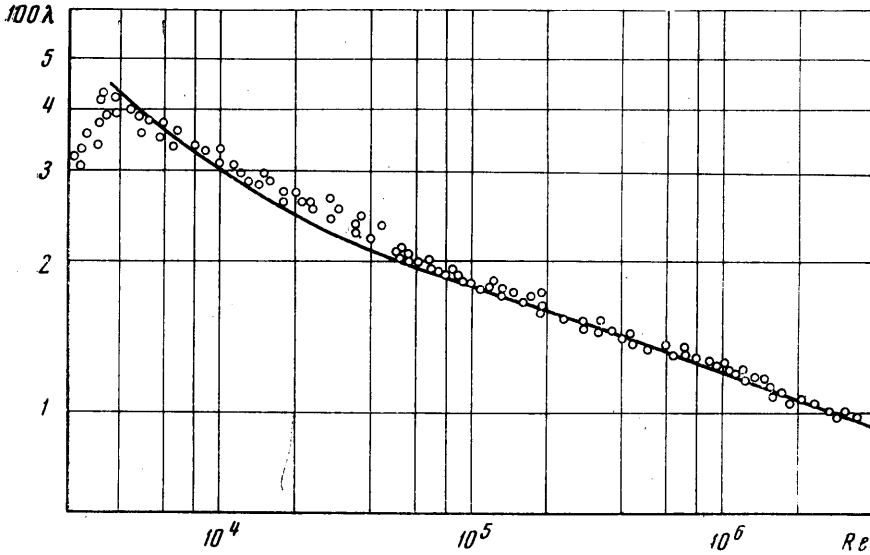
Уравнение (2.4) интегрировалось при граничных условиях (2.5) на БЭСМ-2М. На фиг. 1 построены графики вычисленных функций $b(y') / b_m$ для круглой трубы (фиг. 1, а) и для плоского канала (фиг. 1, б) и точками нанесены экспериментальные данные Лауфера для трубы [2] и Конт-

Белло для канала [4]. На фиг. 1, а также приводится сравнение с опытом [6] рассчитанной зависимости $v'(y')$.

После того как найдена зависимость $b(y) / b_m$, можно проинтегрировать уравнение (2.1). Краевые условия для этого уравнения ставим на границе ламинарного подслоя, используя известные соотношения [1]

$$u = \alpha v_* \quad y = \alpha v / v_* \quad (2.6)$$

где ν — кинематический коэффициент молекулярной вязкости, α — постоянная ($\alpha = 11.5$). Вычисленные профили осредненной скорости для трубы ($Re = 1.05 \cdot 10^5$) и канала ($Re = 2.3 \cdot 10^5$) представлены на фиг. 1, а и б.



Фиг. 2

Там же кружками нанесены профили скорости, измеренные при тех же числах Рейнольдса [4, 8]. Профили скорости были вычислены для значений чисел Re от $4 \cdot 10^3$ до $3 \cdot 10^6$, и во всем указанном диапазоне получено хорошее согласие теоретических профилей с опытными.

На фиг. 2 точками нанесены экспериментальные значения коэффициента гидравлического сопротивления круглой трубы $\lambda = 8(v_* / u_c)^2$ (u_c — средняя скорость) по данным многих авторов [9], а сплошной линией — коэффициент λ , вычисленный на основе настоящей теории.

Значения эмпирических коэффициентов a и c , вычисленные по данным Конт-Белло [4] для канала и Лауфера [3] для трубы приведены в таблице. Значения этих коэффициентов находятся в удовлетворительном согласии между собой и со значениями a и c , найденными для струйных течений [7].

	Плоский канал	Круглая труба	Пограничный слой на пластине	Край затопленной струи	Плоская струя	Круглая струя
a	0.092	0.095	0.090	0.081	0.100	0.084
c	1.7	2.4	—	2.1	2.1	1.8
c'	2.4	2.6	2.2	2.4	2.5	2.35
b_m / v_*^2	4.8	4.4	5.0	—	—	—

В качестве длины l , входящей в выражение для W (1.3) вместо (1.10) можно использовать ширину зоны пульсационного движения, определив, например, $l = l'$, где l' — расстояние между такими двумя точками в данном сечении пограничного слоя, в которых $b / b_m = 0.05$. Для трубы и канала при таком определении будем иметь соответственно $l' = 2R$ и $2h$. Значения постоянной $c = c'$, соответствующие новому определению $l = l'$, для канала и трубы, а также для струйных течений приведены в таблице.

3. Перейдем к рассмотрению турбулентного пограничного слоя на гладкой плоской пластине при постоянной скорости U набегающего потока. Как и в случае потоков в каналах и трубах, рассматривается область течения, лежащая вне ламинарного подслоя, в которой характеристики течения от вязкости не зависят. Тогда уравнения стационарного турбулентного пограничного слоя имеют вид [1]

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

Ось x прямоугольной системы координат направлена вдоль пластины вниз по потоку, ось y — перпендикулярно к пластине в сторону течения (начало координат расположено на пластине). К системе уравнений (3.1) присоединим уравнение баланса пульсационной энергии

$$u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left\langle v' \left(\frac{p'}{\rho} + b' \right) \right\rangle - W \quad (3.2)$$

Система уравнений (3.1) и (3.2) замыкается выражениями (1.3), а коэффициент турбулентной вязкости $\varepsilon(y)$ и длину $l(y)$ определим, как и для течения в плоском канале, а именно:

$$\varepsilon = a \int_0^{L_1} \sqrt{b} dy, \quad L_1 = 2y \quad (0 \leq y \leq y_e) \quad (3.3)$$

$$L_1 = 2y_e = y_2 \quad (y_e < y < \infty)$$

$$l = By \quad (0 \leq y \leq y_1)$$

$$l = l_b = \text{const} \quad (y_1 < y < \infty) \quad (3.4)$$

В качестве характерной длины $l = l_b$ во внешней части пограничного слоя используем толщину области пульсаций δ_0 , которую определим как расстояние от стенки до точки, в которой значение $b = 0.05 b_m$. Считая, что количественные соотношения, характеризующие течение в пристеночной области в канале и пограничном слое весьма близки, принимаем коэффициент B в формуле (3.4) близким к его значению для течения в канале. В расчете по аналогии с течением в канале также полагалось, что $y_2 = 0.4 \delta_0$.

Интегральное соотношение Кармана для турбулентного пограничного слоя в рассматриваемом случае запишется в виде

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{1}{2} c_f, \quad \theta = \int_0^y \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy \quad (3.5)$$

где θ — толщина потери импульса, $c_f = 2\tau_w / \rho U^2$ — коэффициент местного трения. Введем вместо c_f величину $\omega = \sqrt{c_f} / 2 = v_* / U$ и перепишем соотношение (3.5) следующим образом:

$$d\theta / dx = \omega^2 \quad (3.6)$$

Решение системы уравнений (3.1) и (3.2) будем искать в виде

$$u = v_* f(\eta_1), \quad b = v_*^2 \varphi(\eta_1), \quad \eta_1 = y / \theta \quad (3.7)$$

Введем функцию

$$\psi = v_* \theta \int f(\eta_1) d\eta_1 = v_* \theta F(\eta_1)$$

такую, что

$$\partial \psi / \partial y = u, \quad \partial \psi / \partial x = -v$$

И тогда, имея в виду, что $\partial / \partial y = \theta^{-1} d / d\eta_1$, принимая $l = B\theta l'$, а также предполагая, что $dv_* / dx = 0$, получим

$$a \frac{d}{d\eta_1} \left(\Phi \frac{d^2 F}{d\eta_1^2} \right) + \omega^2 F \frac{d^2 F}{d\eta_1^2} = 0$$

$$a \frac{d}{d\eta_1} \left(\Phi \frac{d\varphi}{d\eta_1} \right) + \omega^2 F \frac{d^2 \varphi}{d\eta_1^2} - \frac{c}{B} \frac{\varphi \sqrt{\varphi}}{l'} + a \Phi \left(\frac{d^2 F}{d\eta_1^2} \right)^2 = 0 \quad (3.8)$$

Здесь Φ — безразмерный коэффициент турбулентной вязкости, причем $\varepsilon = av_* \theta \Phi$.

Перенесем начало системы координат на верхнюю границу ламинарного подслоя, т. е. будем считать, что $\eta = \eta_1 - \delta_l / \theta$, где δ_l — толщина ламинарного подслоя, определяемая [1] как $\delta_l = \alpha v / v_*$. При таком преобразовании системы координат уравнения системы (3.8) останутся теми же, необходимо лишь учесть, что при $\eta = 0$:

$$l' = l'_0 = \eta_l = \delta_l / \theta, \quad \Phi = \Phi_0 = 2\sqrt{\varphi_m} \eta_l, \quad (\varphi_m = b_m / v_*^2).$$

Граничные условия для системы (3.8) принимаются такими

$$F = 0, \quad dF / d\eta = \alpha; \quad \varphi = \varphi_m \quad (\eta = 0)$$

$$dF / d\eta = 1 / \omega, \quad \varphi = 0 \quad (\eta \rightarrow \infty) \quad (3.9)$$

Задаваясь экспериментальными значениями φ_m , можем определить все числовые коэффициенты в системе (3.8). Постоянные a и c определяются как и для течений в трубах и каналах.

Система уравнений (3.8) с граничными условиями (3.9) интегрировалась численно, расчеты производились на БЭСМ-2М.

Для сравнения результатов расчета с экспериментальными данными необходимо иметь связь между толщиной пограничного слоя δ , толщиной вытеснения δ^* и θ . Известно, что профиль скорости в пограничном слое на пластине, записанной в виде

$$(U - u) / v_* = f(y / \delta) \quad (3.10)$$

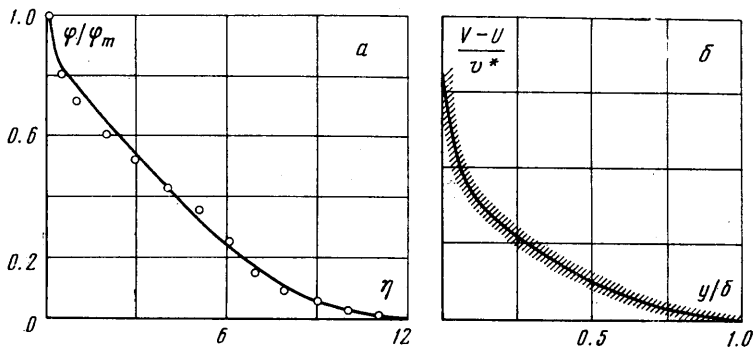
в пределах разброса опытных данных не зависит от числа Рейнольдса. Тогда, если $f(y / \delta) = f(\zeta)$ — универсальная функция, можно записать

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy = \delta \frac{v_*}{U} J_1, \quad J_1 = \int_0^1 f(\zeta) d\zeta \cong 3,5 \quad (3.11)$$

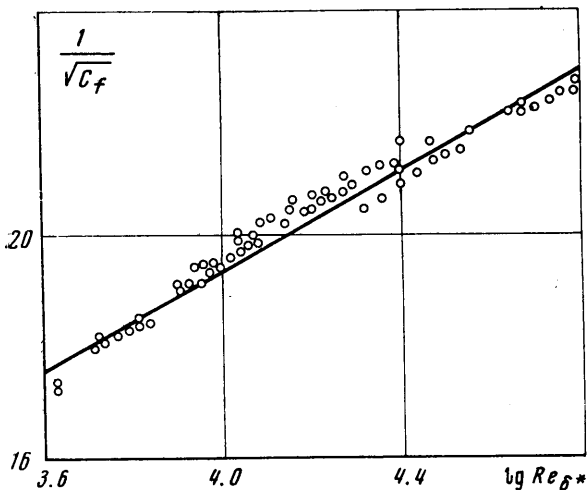
Кроме того

$$\begin{aligned} \theta &= \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy - \\ &- \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right)^2 dy = \delta^* \left(1 - \frac{v_*}{U} J_2\right) \\ \left(J_2 &= \int_0^{\infty} \left(\frac{U-u}{v_*}\right)^2 d\left(\frac{yv_*}{\delta^* U}\right)\right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Расчеты показывают, что в пограничном слое на пластине $J_2 \cong 6$. С помощью (3.11) и (3.12) можно провести сравнение рассчитанных профилей φ / φ_m и $(U-u) / v_*$ с экспериментальными данными (фиг. 3). На фиг. 3, а



Фиг. 3



Фиг. 4

точками нанесены экспериментальные значения профиля пульсационной энергии по данным Клебанова [1], а профиль дефекта скорости (фиг. 3, б) сравнивается с данными Хама, Шульц-Грунова и других исследователей [2]. Разброс экспериментальных точек показан в виде заштрихованной области.

Далее была вычислена зависимость местного коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса (фиг. 4). Для этого профили скорости $u/v_* = F'(\eta)$ были рассчитаны при различных значениях ω и для каждого ω расчет проводился при ряде значений η . Затем величина $\omega F'(1)$ (здесь $F'(1) = dF(\eta)/d\eta$ при $\eta = 1$, взятая с профилем скорости, вычисленных при разных η , строилась в зависимости от $\alpha/\eta_1 = \omega Re_\theta$ для разных ω). На построенных таким образом кривых выбирались точки, которым по оси ординат соответствует $\omega F'(1) = 1/\sqrt{2}$, а по оси абсцисс — некоторое значение $\omega Re_\theta = (\omega Re_\theta)_{\sqrt{2}}$. Наконец, остается построить зависимость $F'(1) = \omega^{-1} 2^{-1/2} = c_f^{-1/2}$ от $\lg(\omega Re_\theta) \sqrt{2}$, которая и является искомым законом сопротивления. Имея (3.11) и (3.12), можно вычислить зависимость $c_f^{1/2} = f(U\delta^*/\nu)$, которая и изображена на фиг. 4 сплошной линией. Там же кружками показаны экспериментальные точки Шульц — Грунова и Смита и Уокера [2].

Имея зависимость $c_f = c_f(Re_\theta)$, можно решать конкретные задачи пограничного слоя. Для этого перепишем (3.5) в виде

$$\int_0^\theta \frac{2 d\theta}{c_f(Re_\theta)} = x \quad \text{или} \quad 2 \int_0^{Re_\theta} \frac{d Re_\theta}{c_f(Re_\theta)} = Re_x \quad (3.13)$$

Здесь предполагается, что $\theta = 0$ при $x = 0$. Подставляя в (3.13) зависимость $c_f = c_f(Re_\theta)$, найдем $Re_\theta = f(Re_x)$, а далее можно найти все представляющие интерес величины в зависимости от x .

Поступила 28 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.
2. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1. М., «Наука», 1965.
3. Laufer J. The structure of turbulence in fully developed pipe flow. NACA Rept 1174, 1954.
4. Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. М., «Мир», 1968.
5. Klebanoff P. S. Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient. NACA Rept 1247, 1955.
6. Хинце И. О. Турбулентность. М., Физматгиз, 1963.
7. Акатнов Н. И., Кузнецов А. П. Уравнение баланса энергии турбулентных пульсаций в теории свободного пограничного слоя. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 6.
8. Nikuradse J. Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Röhren. VDI, Forschung., 1932, S. 356. (Рус. перев.: В сб. «Проблемы турбулентности», ОНТИ, 1938.)
9. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.